全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

主编　马　颖

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育“十一五”规划教材

高 等 数 学

主编 马 颖
副主编 朱化平 初东丽

高等教育出版社

内容提要

本书是全国高职高专教育“十一五”规划教材。它以高职教育办学方向和培养目标为指导思想，以教育部“高职高专数学教学的基本要求”为依据，以“必需、够用”为原则，结合编者多年教学经验以及针对教学新情况所做的教改成果编写而成。

内容包括极限、导数与微分，中值定理与导数应用，积分及应用，向量代数与空间解析几何、多元函数微积分，无穷级数，常微分方程等，另外还编入了数学建模和 MATLAB 软件的使用等内容。书后附有初等数学常用公式、基本初等函数的图像及性质、常用积分公式以及习题参考答案。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校以及本科院校的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校等院校的理工类专业的高等数学教材，也可用作数学建模培训、数学实验的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学／马颖主编.—北京：高等教育出版社，2009.8
ISBN 978-7-04-027621-3

Ⅰ.高… Ⅱ.马… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 112659 号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 张耀明 **市场策划** 唐维东 **封面设计** 张 志
责任绘图 尹 莉 **版式设计** 余 杨 **责任校对** 殷 然 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京鑫海金澳胶印有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2009年8月第1版
印　　张	23	**印　　次**	2009年8月第1次印刷
字　　数	570 000	**定　　价**	29.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 27621-00

前　言

本教材以高职教育办学方向和培养目标为指导思想，以教育部“高职高专数学教学的基本要求”为依据，以“必需、够用”为原则，并且注意不失数学体系的完整性；教材淡化理论，省略复杂的理论推导和证明，强化应用能力培养，注重培养学生的两个能力，一是分析和解决数学问题的能力，二是运用数学知识解决工程及其他实际问题的能力。教材呈现以下特点：

1. 简明扼要。教材结构紧凑、内容精练、实用。在内容的安排上，改变传统的教材结构，精选教材内容组合，既考虑高等数学本身的连贯性，又注重高职对数学教学的要求。在每章小结中，对主要知识点、主要数学思想和方法、主要题型及解法，简要地作出归纳总结，对教和学具有一定的参考价值。

2. 注重实用。首先，练习体现“基本题”和“提高题”两个层次，对应习题的 A 和 B，有利于不同层次的学生选做，并便于老师们分层教学时选用。其次，在各章介绍数学内容时，尽可能列举数学解决工程技术问题或其他实际问题的实例，以求将数学知识溶于实际应用中，书中实例，我们都进行了认真的研讨，力求它的正确性、科学性；在每章最后都有一个段落，用来概括叙述本章知识及数学思想方法在工程技术中的应用，以使学生明晰所学内容有什么用处，可以解决什么问题，从而明确学习目的，增加学习动力；在每章的小结中，对该章中的主要数学思想和方法作出了归纳和介绍，以使学生在学习数学知识的同时，进一步了解和掌握数学思想方法，以便能触类旁通、举一反三，将其用于生活和工作实践中。最后，在本教材中加入了数学建模一章，重点介绍了 Matlab 软件及其使用、数学建模的基本概念和基本方法以及近年来全国数学建模大赛的部分题目的解答。特别以 2006 年竞赛 C 题为例，在综合了多篇获得全国一等奖的论文的基础上，完整的给出了求解中多次试探、失败、改进、最后找到合理方法的过程，这对学生认识和理解数学建模，学到具体而实用的方法和技巧，具有很好地指导帮助作用。从而为高校参加全国数学建模大赛的老师和同学们提供学习和培训方面的参考资料，使更多的师生对数学建模有所了解，产生兴趣，使学生的数学应用能力得到提高和培养。

本教材由济南铁道职业技术学院马颖老师担任主编，天津铁道职业技术学院朱化平老师和山东纺织职业学院初东丽老师担任副主编。第 1 章由朱化平老师和马颖老师编写，第 2 章、第 8 章由山东纺织职业学院丛国超老师编写，第 3 章由济南铁道职业技术学院宋金丽老师编写，第 4 章由初东丽老师编写，第 5 章由马颖老师编写，第 6 章由济南铁道职业技术学院尹树国老师编写，第 7 章由山东英才学院娄万东老师编写。各章最后一个段落，关于本章知识及数学思想方法在工程技术中应用的内容，以及本章小结由马颖老师编写，马颖老师对全书进行了统稿，其中部分章节作了大幅修改或重写，并最终定稿。

北京联合大学王信峰教授审阅了全书，并提出了许多非常有价值的修改意见，高等教育出版社邓雁城编辑对该书的编写也提出了许多宝贵建议，另外，书中我们引用了李心灿教授主编的《高等数学应用 205 例》中的一些例子，在此一并致谢！

由于时间仓促，水平有限，编写内容难免有错误和不尽如人意之处，敬请读者指正。

编者

2009 年 5 月

目　录

第 1 章　极限、导数与微分

【学习目标】 理解极限、函数连续、无穷小、无穷大、导数和微分的概念；理解导数、微分的几何意义；掌握极限、导数及微分的运算方法；了解极限、导数及微分在实际中的应用.

极限、导数、微分是微积分学的基本内容，而极限是微积分学的基础，它贯穿微积分的始终. 导数和微分是研究函数变化及特性的主要工具，它在现代科技的各个领域有着广泛的应用. 学好本章内容，对微积分的学习，以及后续专业课的学习，有重要作用.

§1.1　预 备 知 识

本节主要复习初等函数的有关知识、为学习高等数学奠定必要的数学基础.

1.1.1　函数的概念

函数既是初等数学的主要内容，也是高等数学研究的主要对象. 因为，无论是在自然界中，还是科学技术中，事物之间都不是孤立的，而是按一定的规律相互联系的，而这种联系大都可以通过变量与变量的关系来反映，这种变量之间的关系就是我们研究的函数. 比如，导体中的电流随时间的变化而变化是一种函数关系 . 下面我们来复习函数的定义.

1. 函数定义

定义 1　设 D、M 是给定的两个非空实数集，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照某种对应法则 f，都有唯一确定的 $y\in M$ 与之对应，那么，称 y 是关于 x 的**函数**. 记为

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，自变量 x 的取值范围 D 称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**，$M=\{y\mid y=f(x)\quad x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

函数的定义域和对应法则是构成函数的两个要素. 换句话说，两个函数，只要定义域、对应法则一样，这两个函数就是相同函数.

例 1　判断下列各对函数是否为相同函数：

（1）$y=x$ 和 $y=(\sqrt{x})^2$；（2）$y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$；（3）$y=x^2$ 和 $s=t^2$.

解　（1）不同函数. 因为，$y=x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，而 $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为$[0,+\infty)$.

（2）不同函数. 因为，定义域虽然相同，但

$$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

显然，当 $x<0$ 时，两个函数的对应法则不同.

（3）相同函数. 因为两个函数的定义域和对应法则都一样.

2. 定义域的求法

确定函数的定义域，一般考虑以下两点：

（1）如果函数代表一定的实际意义，那么，函数的定义域要根据自变量代表的实际意义具体来确定. 例如，圆的面积 $S=\pi\cdot r^2$ 中，自变量半径 r 的取值范围应为 $\{r\mid r>0\}$.

（2）如果函数就是一个纯粹的数学解析式，不代表任何实际意义，那么，能使解析式有意义的自变量所有取值即为函数的定义域.

要使数学解析式有意义，一般需要满足以下条件：

（1）解析式中有分式，分母不等于零；

（2）解析式中有偶次方根，被开方数非负（大于或等于零）；

（3）解析式中有对数函数，真数大于零（零和负数没有对数）；

（4）解析式中有三角函数或反三角函数，应符合相应函数定义域的要求.

3. 邻域

设 x_0 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，则集合 $\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$ 称为点 x_0 的 **δ 邻域**，记为 $U(x_0,\delta)$，如图 1.1(1)，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

点 x_0 称为 $U(x_0,\delta)$ 的**中心**，δ 称为 $U(x_0,\delta)$ 的**半径**. 实际上

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta);$$

而集合 $\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 称为点 x_0 的去心 **δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，如图 1.1(2)，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

实际上

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

点 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$ 表示的是点 x_0 及其左、右近旁的点；而点 x_0 的 δ 去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 表示的是点 x_0 左、右近旁的点，但不含点 x_0.

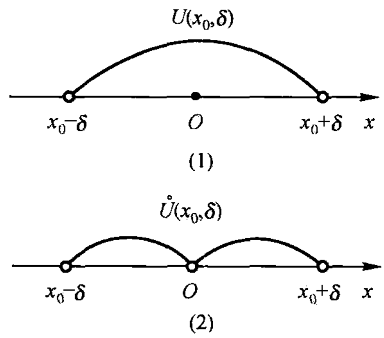


图 1.1

例 2　求 $y=\sqrt{x+3}+\dfrac{\lg(2-x)}{x+1}$ 的定义域.

解　要使函数有意义，必须

$$\begin{cases}x+3\geqslant 0,\\ 2-x>0,\\ x+1\neq 0,\end{cases}\ \text{解得}\begin{cases}x\geqslant -3,\\ x<2,\\ x\neq -1,\end{cases}$$

即 $-3\leqslant x<2$ 且 $x\neq -1$. 所以，函数的定义域为 $[-3,-1)\cup(-1,2)$.

4. 函数的表示法

表示一个函数通常有**表格法**、**图像法**、**解析法**.

解析法又称公式法，是最常用的表示法，根据解析式的特点和形式，用这种方法表示的函数又可分为显函数、隐函数. 显函数的一般形式为 $y=f(x)$，隐函数的一般形式为 $F(x,y)=0$，之后还要具体介绍.

为了反映函数关系，有的函数需要用多个表达式来表达，即自变量在不同范围内取值时用不同的表达式来表示对应法则的函数，把这样的函数称为分段函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<-1,\\ 1, & x=-1,\\ x, & -1<x<1,\\ 1-x, & x>1,\end{cases}$$

其图像如图 1.2(1)所示. 分段函数的定义域，就是自变量各个取值范围的并集.

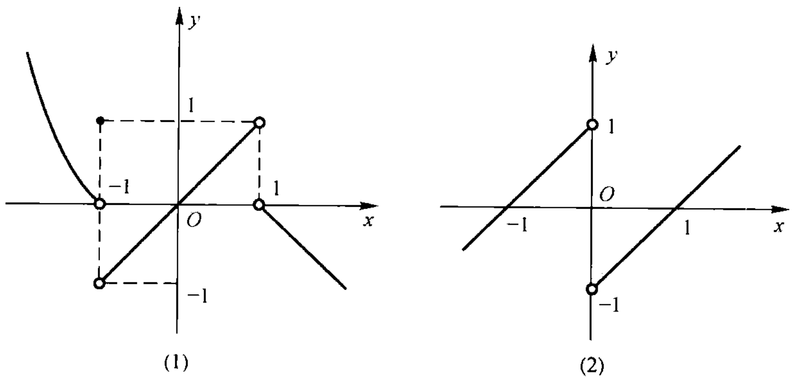


图 1.2

例 3 已知 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x-1, & x>0,\end{cases}$ 求：

(1) 定义域；(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$；(3) 作出 $f(x)$ 的图像.

解 (1) 定义域为 $\{x \mid x\neq 0\}$，即 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

(2) 因为 $\frac{1}{2}>0$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$；同样的，因为 $-\frac{1}{2}<0$，故

$$f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2};$$

(3) $f(x)$ 的图像如图 1.2(2).

1.1.2 基本初等函数

下列五类函数为基本初等函数：

幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为任意实数）；

指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$；当 $a=\mathrm{e}$ 时，记作 $y=\ln x$，称为自然对数）；

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

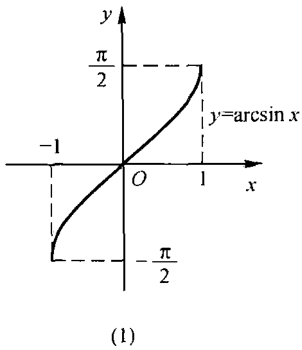
反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

例如，函数 $y=\arcsin x$ 和 $y=\arctan x$，图像如图 1.3.

有关基本初等函数的图像和性质的内容，可参考本教材的附录二.

1.1.3 复合函数

定义 2 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=g(x)$，当 x 在某一范围内取值时，



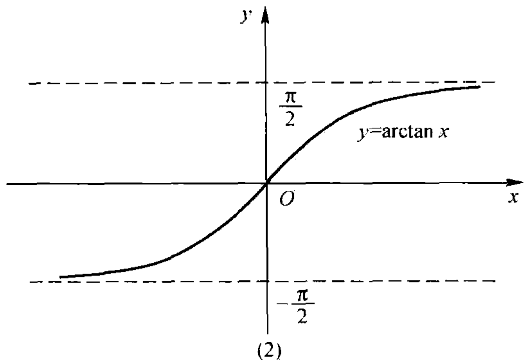


图 1.3

相应的 u 值能使 $y=f(u)$ 有意义，则称 y 是由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=g(x)$ 构成的**复合函数**，记为 $y=f[g(x)]$，其中 x 是**自变量**，u 称为**中间变量**. f 称为**外层函数**，g 称为**内层函数**.

由定义不难看出，函数的复合是有限制的. 例如，$y=\ln u$，$u=-2+\sin x$，因为内层函数 $u=-2+\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的值域为 $u\in[-3,-1]$，而外层函数 $y=\ln u$ 的定义域为 $u\in(0,+\infty)$，即所有的 $u(u\in[-3,-1])$ 值都使函数 $y=\ln u$ 无意义，因此，形式上的复合函数 $y=\ln(-2+\sin x)$ 是没有意义的，亦即函数 $y=\ln u$ 和 $u=-2+\sin x$ 不能构成复合函数.

上述定义给出了只有一次复合过程的复合函数，事实上，存在着具有多层复合过程的更为复杂的复合函数. 例如，$y=e^{\arctan\sqrt{1+x^2}}$. 熟练掌握复合函数在复合过程中的拆分方法，对后续学习导数、微分和积分的运算等知识非常重要.

例 4　设函数 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=1-2x$，写出复合函数 $y(x)$.

解　$y=\sin^2(1-2x)$.

此复合函数由三层函数复合而成：

外层　$y=u^2$——幂函数；

中层　$u=\sin v$——三角函数；

内层　$v=1-2x$——幂函数与常数的四则运算.

例 5　写出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$；(2) $y=\ln(2+3x^2)$；(3) $y=e^{\arctan\sqrt{1+x^2}}$.

解　(1) 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 复合而成；

(2) 函数 $y=\ln(2+3x^2)$ 是由 $y=\ln u$，$u=2+3x^2$ 复合而成；

(3) 函数 $y=e^{\arctan\sqrt{1+x^2}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\arctan v$，$v=\sqrt{w}$，$w=1+x^2$ 复合而成.

拆分复合函数的复合过程的关键，是能正确的看出它是由哪些基本初等函数或者基本初等函数与常数进行四则运算所得到的函数复合而成，由外向内，逐层分解，而每层写出的函数只能含有(五种函数中的)一种函数关系.

例如，$y=\ln^2(1-\sin x)$，正确的拆分是，$y=u^2$，$u=\ln v$，$v=1-\sin x$，而如果一开始便拆成 $y=\ln^2u$，或者第三步拆成 $v=1-w$，$w=\sin x$，都是不正确的拆分.

1.1.4 初等函数

定义 3 由基本初等函数与常数，经过有限次的四则运算和有限次的复合所构成的函数称为初等函数.

例如，$y=3\mathrm{e}^{\cos 2x}+\ln\dfrac{x+1}{x-1}$，$y=\dfrac{x\arctan\sqrt{x}}{1-x^2}$等都是初等函数.

分段函数一般不是初等函数，但有些特殊的分段函数，例如

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

因为它可以写成 $y=\sqrt{x^2}$这种形式，所以它是初等函数.

初等函数不仅是初等数学讨论的内容，也是高等数学研究的对象. 因此，必须熟练掌握初等函数的知识.

习 题 1.1

A

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x}{x^2-3x-4}$； (2) $y=\sqrt{2-\log_{\frac{1}{2}}x}$；

(3) $y=\sqrt{x^2-1}+\ln(3-x)$； (4) $y=\arcsin\dfrac{1-2x}{3}$.

2. 下列各对函数是否为相同函数：

(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$； (2) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$与 $y=x-1$；

(3) $y=\sqrt{x^2-1}$与 $y=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$； (4) $y=\sqrt{1-x^2}$与 $y=\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}$.

3. 设$f(x)=x^2+3x-2$，求$f(2+\ln x)$.

4. 设$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<0,\\ x-1, & 0<x<1,\\ \dfrac{1}{4}x, & x\geqslant 1,\end{cases}$

(1) 求函数$f(x)$的定义域；(2) 计算$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\{f[f(2)]\}$；(3) 画出$f(x)$的图像.

5. 写出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\ln(1-3x)$； (2) $y=\cos\dfrac{1}{x}$； (3) $y=\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(4) $y=\arctan\sqrt{1+x^2}$； (5) $y=\mathrm{e}^{\cos(3x-1)}$； (6) $y=\ln^3\sin x$.

B

1. 设$f(2x+1)=x^2-2$，求$f(x+2)$.

2. 已知$f(x)$函数定义域是$[0,1)$，求函数$f(\ln x)$的定义域.

3. 已知 $f(\mathrm{e}^x)$ 函数定义域是 $[0,1)$，求函数 $f(x)$ 的定义域.

4. 已知 $f(x)$ 函数定义域是 $[0,1)$，求函数 $f\left(x+\dfrac{1}{4}\right)-f(2-2x)$ 的定义域.

5. 写出函数 $y=\sin^3(x^2-1)^2$ 的复合过程.

§1.2　极限的概念

1.2.1　数列的极限

引例　2000 多年前，我国《庄子 · 天下篇》中有一段记载“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，这其中除了蕴含着辩证的哲学思想外，还体现出一种观察事物的发展趋势和目标的思想，这种思想即是我们本节将要介绍的极限的概念. 将上面提到的《庄子 · 天下篇》中的内容用数学形式表达出来就是

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$$

可以看出，这个过程是越分越小，逐渐趋向于 0.

对数列的这样一种现象，我们给出如下定义.

定义 1　设数列 $\{y_n\}$：$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots$.

若 n 无限增大($n\to\infty$)时，数列的项 y_n 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为数列 $\{y_n\}$ 的**极限**(或称数列**收敛**于 A)，记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \quad 或 \quad y_n \to A\ (n\to\infty).$$

此时，也称数列 $\{y_n\}$ 的**极限存在**；否则，称数列 $\{y_n\}$ 的**极限不存在**(或称数列是**发散**的).

由定义，我们现在可以说，引例中给出的数列，它的极限是 0，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

例 1　写出下列数列的前四项，并观察极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

(1) $\left\{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$；(2) $\{(-1)^n\}$；(3) $\left\{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n\right\}$；(4) $\{3\}$.

解　(1) $\left\{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$：$-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, -\dfrac{8}{27}, \dfrac{16}{81}, \cdots$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n=0$；

(2) $\{(-1)^n\}$：$-1, 1, -1, 1, \cdots$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在(原因是“不趋近于一个确定常数”)；

(3) $\left\{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n\right\}$：$-\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}, -\dfrac{27}{8}, \dfrac{81}{16}, \cdots$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n=\infty$ (不存在，也可称此极限值为无穷大)；

(4) $\{3\}$：$3, 3, 3, 3, \cdots$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}3=3$.

例 2　通过图形观察数列$\left\{\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$的极限.

解　将数列$\left\{\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$的各项列出：

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\frac{6}{5},\frac{5}{6},\cdots,$$

并将这些项在图形上标出来，如图 1.4. 由图可以看出，各项的值随着 n 的增大，在 1 的上下摆动，并越来越靠近 1，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

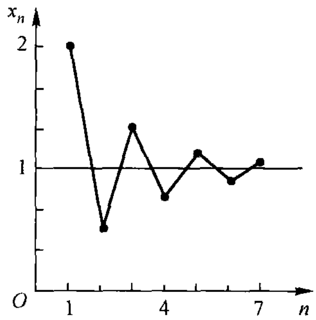


图 1.4

例 3　利用极限的方法求和：$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}+\cdots$.

解　设上式的和为 S，其前 n 项之和为 S_n，由等比数列的求和公式，得

$$S_n=\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

不难看出，和 S_n 又构成了一个新的数列$\{S_n\}$：$\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{9},\dfrac{13}{27},\dfrac{40}{81},\cdots$，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2},$$

所以，$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}+\cdots=\dfrac{1}{2}$.

这里有一个值得思考的问题，如果例题中等比数列的公比 $q\geqslant 1$，其结果会怎样呢？请验证以下结论：

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0, & |q|<1,\\ 1, & q=1,\\ \infty, & |q|>1,\\ \text{不存在}, & q=-1.\end{cases}$$

当一个数列随 n 的增大而趋于无穷大时，根据极限定义可知它的极限是不存在的. 但是从“极限是揭示变量的变化趋势”这一点来看，也可以说数列的极限是无穷大.

我们知道，数列$\{y_n\}$：$y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n,\cdots$的通项 y_n 是以自然数 n 为自变量的函数，这种函数也称为整标函数，即 $y_n=f(n)\,(n\in\mathbf{N}_+)$.

如数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$：$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$的通项 $y_n=f(n)=\dfrac{1}{n}$. 所以，求数列的极限，实际上就是求整标函数的极限. 那么，函数的极限又如何确定呢？

1.2.2　函数的极限

引例　如图 1.5 所示闭合电路，电源的电动势 E 和内阻 r 均为定值，外电路的可变电阻为

R，当开关 K 接通后，电路中的电流 i 随 R 的变化而改变，由欧姆定律得

$$i=i(R)=\frac{E}{R+r},$$

分析

$$i=i(R)=\frac{E}{R+r}\begin{cases}\to 0, & R\to+\infty\ (\text{断路时}),\\ \to\dfrac{E}{r}, & R\to 0^{+}\ (\text{短路时}).\end{cases}$$

上述例子反映的是：当可变电阻 R 变化($R\to+\infty$ 或 $R\to 0^{+}$)时，引起电流 $i=i(R)$ 向着一个确定的值$\left(0\text{ 或}\dfrac{E}{r}\right)$趋近．本节我们就研究：当自变量 x 有一确定的变化过程时，函数 $f(x)$ 的变化趋势，即函数的极限.

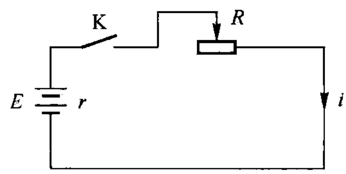


图 1.5

显而易见，一般函数自变量 x 的变化情况有如下两种：

(1) x 的绝对值无限增大，记为 $x\to\infty$，

$$\text{包括}\begin{cases}x\to-\infty,\\ x\to+\infty;\end{cases}$$

(2) x 无限接近于一个有限数 x_0，记为 $x\to x_0$，

$$\text{包括}\begin{cases}x\to x_0^{-}\ (\text{从 } x_0 \text{ 的左侧接近于 } x_0),\\ x\to x_0^{+}\ (\text{从 } x_0 \text{ 的右侧接近于 } x_0).\end{cases}$$

下面我们分别就这两种情况，讨论一般函数的极限问题.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

观察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时的变化趋势.

如图 1.6 所示，当 x 的绝对值无限增大(记 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$图像无限贴近 x 轴，即函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$的值无限趋近于 0.

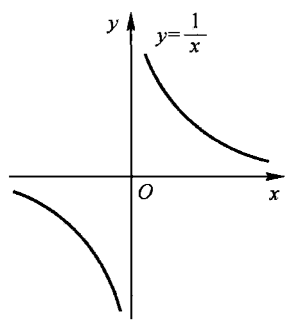


图 1.6

对于函数的这种变化特性，我们给出当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 极限的概念.

定义 2　如果 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A \quad (x\to\infty).$$

此时，也称**极限** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ **存在**；否则，称**极限** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ **不存在**.

于是，上述观察的函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$当 $x\to\infty$ 时的变化趋势，即极限，可以表示为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

将定义中 $x\to\infty$，换成 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$ 时，我们就可以类似的得到 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$

时函数极限的定义，不再赘述.

定义 2 中 $x\to\infty$，包含了 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 两种情况，因此，不难得出下面的结论：

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A,\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B,\\ A=B\end{cases}\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

也可以表示为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

这就是说，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在且相等.

例 4　讨论极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$，$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 是否存在.

解　根据定义，结合图 1.7，图 1.8，可得

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty\text{（不存在）},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{x\to-\infty}e^x=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在；　所以 $\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 不存在.

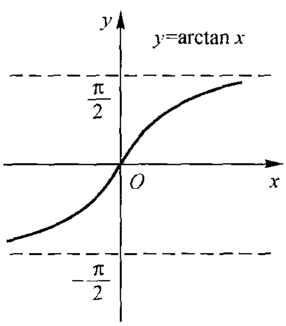


图 1.7

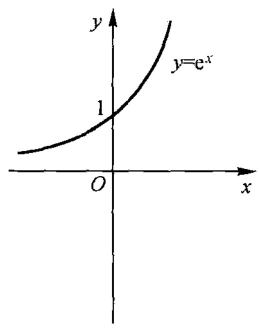


图 1.8

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

引例　讨论当 $x\to1$ 时，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势.

我们先用列表取值的方法进行观察（如表 1.1）.

表 1.1

x	0.9，0.99，0.999，0.999 9，$\cdots\to1\leftarrow\cdots$，1.001，1.01，1.1
$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1(x\neq1)$	1.9，1.99，1.999，1.999 9，$\cdots\to2\leftarrow\cdots$，2.001，2.01，2.1

可以看出，当 x 的取值越接近于 1，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值就越接近于确定的值 2.

再作出函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的图像，如图 1.9.

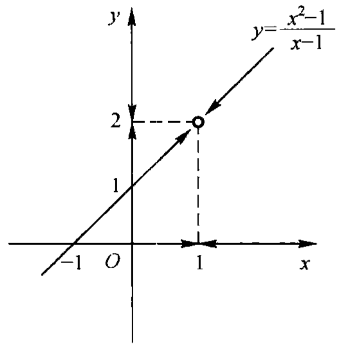


图 1.9

观察图像，我们也会得到同样的结论.

定义 3　如果 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (x \to x_0).$$

此时，也称**极限** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ **存在**；否则，称**极限** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ **不存在**.

根据定义，上面的引例中当 $x \to 1$ 时，函数的变化趋势，可以用极限表示为

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

由于 $x \to x_0$，包含了 $\begin{cases} x \to x_0^- \text{（从 } x_0 \text{ 的左侧接近于 } x_0\text{）} \\ x \to x_0^+ \text{（从 } x_0 \text{ 的右侧接近于 } x_0\text{）} \end{cases}$ 这两种情况，我们把 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 叫做 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限，$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 叫做 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的右极限.

定义 4　如果 $x \to x_0^-$（$x \to x_0^+$）时，函数 $f(x)$ 无限接近一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**左（右）极限**，记作

$$\lim_{\substack{x \to x_0^- \\ (x \to x_0^+)}} f(x)=A.$$

由定义 2，显然可以得到

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=A, \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=B, \\ A=B \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x)=A.$$

也可以写成

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)=\lim_{x \to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x)=A.$$

这就是说，极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $f(x)$ 的左极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在且相等.

需要注意的是，当讨论 $x \to x_0$ 时函数的极限时，如果遇到在点 x_0 左、右两侧的函数表达式不同的情况，就用上述结论. 例如，分段函数在自变量趋近于分段点时的极限问题，就属于这种情况.

例 5　已知分段函数

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<0, \\ 1+x, & 0<x<1, \\ -1, & x=1, \\ 3, & x>1, \end{cases}$$

讨论极限 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

解　因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(1+x)=2,$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}3=3,$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)\neq\lim_{x\to1^+}f(x),$$

所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在，如图 1.10 所示.

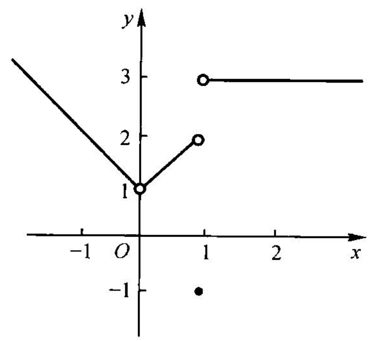


图 1.10

由例 5 可以看出，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$反映的是函数$f(x)$在点$x_0$左、右近旁的变化趋势，它与$f(x)$在点$x_0$处的取值无关. 也就是说，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$的存在与否，与函数$f(x)$在点$x_0$处有无定义无关.

习题 1.2

A

1. 先列出数列$\{y_n\}$：$y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n,\cdots$，再观察其极限$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$：

(1) $\left\{\dfrac{1}{3^n}\right\}$；　(2) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$；　(3) $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$.

2. 填空：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n=$________；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n=$________；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}=$________；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-100}{n}=$________.

3. 根据极限定义填空：

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=$________；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=$________；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\sin x$________；　(4) $\lim\limits_{x\to e}\ln x=$________.

4. 下列极限是否存在？为什么？

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$；　(4) $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$.

5. 已知分段函数$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x^2+1, & x>0,\end{cases}$求极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$及$\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

B

1. 先列出数列$\{y_n\}$：$y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n,\cdots$，再观察其极限$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$：

(1) $\left\{\dfrac{2^n+(-1)^n}{2^n}\right\}$；　(2) $\left\{\dfrac{5n+100}{n^2}\right\}$.

2. 填空：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3}{3n^2+1}=$________；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n\pi}{n}=$________.