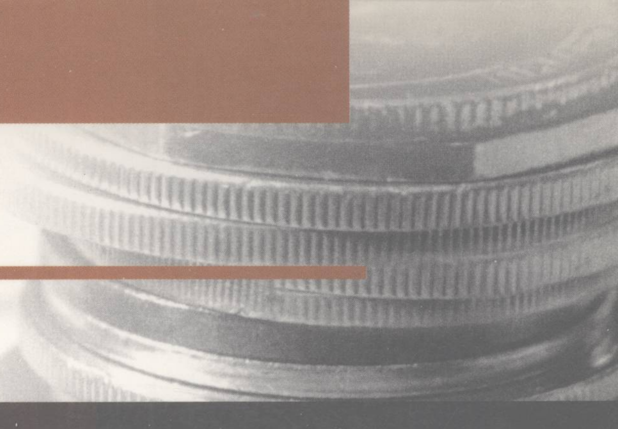

GAOZHI GAOZHUAN CAIJINGLEI XILIE JIAOCAI
高职高专财经类系列教材

经济应用数学
—— 线性代数

Jingji Yingyong Shuxue
—— Xianxing Daishu

王磊 主编

重庆大学出版社

高职高专财经类系列教材

CAIJING

经济应用数学
——线性代数

Jingji Yingyong Shuxue
Xianxing Daishu

王　磊　\主　编
王建刚　齐晓东　陈晓敏　\副主编
赵云霞　\参　编

重庆大学出版社

内容提要

本书是高职高专财经类系列教材《经济应用数学》的第二分册，内容分为两部分. 第一部分为线性代数，主要包括行列式、矩阵、n 维向量与线性方程组；第二部分为线性规划，主要包括线性规划的数学模型、线性规划问题的图解法、单纯形法、对偶线性规划问题及对偶单纯形法，每章均有学习目标和小结，并配有丰富的例题，各章后面另有适量的习题供大家练习（书末附有答案）.

本书结构清晰、内容精练、通俗易懂，富有应用性，并力求启发性和趣味性. 本书可作为高职高专院校、民办高校和成人高校财经类、管理类及相关专业的教材，也可供具有一定数学基础的人员自学或从事经济管理等相关工作的人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学——线性代数/王磊主编. —重庆：重庆大学出版社，2004. 7
（高职高专财经类系列教材）
ISBN 7-5624-3170-1

Ⅰ. 经... Ⅱ. 王... Ⅲ. 线性代数—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. F224. 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 048616 号

高职高专财经类系列教材
经济应用数学——线性代数
主 编 王 磊
副主编 王建刚 齐晓东 陈晓敏
责任编辑：梁 涛 何建云 版式设计：梁 涛
责任校对：任卓惠 责任印制：张立全
*
重庆大学出版社出版发行
出版人：张鸽盛
社址：重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区)内
邮编：400030
电话：(023) 65102378 65105781
传真：(023) 65103686 65105565
网址：http://www.cqup.com.cn
邮箱：fxk@cqup.com.cn（市场营销部）
全国新华书店经销
自贡新华印刷厂印刷
*
开本：787 × 960 1/16 印张：10. 25 字数：184 千
2004 年 7 月第 1 版 2004 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—5 000
ISBN 7-5624-3170-1/O · 227 定价：15. 00 元

QIANYAN

前言

当今世界,各行各业不同工作岗位上的技术在不断地数学化.数学不仅是一门科学、文化,还是一门技术.本书是为适应新时期高职高专院校财经类、管理类专业学生技能培养和文化素质教育的需要而编写的教材《经济应用数学》的第二分册,书中凝结了作者多年来讲授经济数学课程的经验和体会,并在编写过程中着重注意了以下几方面的问题:

第一,注意到"经济数学基础"是高职高专院校财经类、管理类专业学生的一门重要的基础课.按照教学大纲和课程标准的要求,本分册比较完整地介绍了线性代数和线性规划的基础知识.其主要目的是培养学生的基本数学能力:运算能力、抽象概括能力、逻辑推理能力、空间想像能力、将实际问题转化为数学问题的能力以及自学能力等.

第二,注意到高职高专院校财经类、管理类学生的数学基础都较为薄弱.本分册内容始终贯彻循序渐进、由浅入深、通俗易懂的原则,删除了绝大部分理论证明,代之以思想方法的介绍.这样做不仅使教材更为简明,而且还使学生不会由于数学基础的不足而产生畏难情绪.本分册结构合理紧凑、语言简洁流畅,便于学生自学.

第三,以“理论够用为度,注重实际操作和应用”为原则.本分册不追求理论体系的完整性,尽可能地做到以方法的阐述和实际操作为主线带动理论阐释,重在使学生掌握最基本的理论和实用方法;另外,本分册还选入了相当数量的具有使用价值的例题和习题,使学生真正体会到数学在现实生活和工作中是如何应用的,以激发学生学习数学的热情和兴趣,提高学生对数学实际运用能力.

第四,对于重要的或难于理解的概念,尽可能由实例引入,以使学生对概念理解得深、理解得透,或使概念易于理解;对于重要的方法及时进行归纳总结,给出解题步骤;每章选入的丰富而难度适中的例题和习题将帮助学生更好地掌握知识、提高能力;尤其是每章颇具特色的小结,绝不是知识点的简单罗列,它将使学生在每一章学完后,不仅知识更系统,还会使学生受它的启发而有新的收获.

第五,本书毕竟是一本数学教材,所以不失一般教材的科学性,具有较强的逻辑性以及相对的严谨性.

我们希望学生通过对本教材的学习,能够获得他们未来学习、生活和工作所需的数学知识、数学技能以及数学的一些思想方法:如掌握代数学的运算原理,了解线性规划中的优化决策思想等.

本分册参考学时为36学时.教师可以根据实际需要进行内容取舍,不必求全.

本分册由王磊担任主编,王建刚、齐晓东、陈晓敏担任副主编.其分工如下:河北工业职业技术学院王建刚编写第1章,河北工业职业技术学院王磊编写第2章,河北交通职业技术学院齐晓东编写第3章,石家庄市城乡建设学校赵云霞编写第4章4.1节、4.2节,成都电子机械高等专科学校陈晓敏编写第4章4.3节、4.4节.

本分册的编写参考了有关的文献,在此向参考文献的各位作者表示衷心的感谢.同时,向为本书的出版付出辛勤劳动的重庆大学出版社,向给予支持和帮助的河北

工业职业技术学院的领导和同志们表示由衷的谢意.

由于时间仓促,更由于水平有限,书中难免存在疏漏之处,恳请读者批评指正.

编 者

2003 年 12 月

参考文献

[1] 吴应明. 线性代数与线性规划初步. 北京:兵器工业出版社,1994
[2] 杨学中,张爱民. 经济应用数学. 北京:中国商业出版社,1994
[3] 李林曙,施光燕. 线性代数. 北京:中央广播电视大学出版社,2000
[4] 顾静相. 经济数学基础(下册). 北京:高等教育出版社,2000
[5] 工程类数学教材编写组. 工程数学. 北京:高等教育出版社,2003
[6] 金子瑜. 线性代数及其计算方法. 石家庄:河北人民出版社,1986

MULU

目录

第 *1* 章 行列式

【学习目标】

1. 理解行列式的概念,了解行列式的代数余子式的概念,掌握行列式的性质.

2. 能按对角线展开法熟练计算二阶、三阶行列式,能使用行列式的性质熟练计算 n ($n \leqslant 5$)阶行列式.

3. 了解克兰姆法则,会用该法则解较简单的线性方程组.

在科学技术和生产实践中,经常会遇到解线性方程组(即一次方程组)的问题,行列式就是线性方程组解的一种记忆方式.它是研究矩阵以及向量组的线性相关性的一种工具,也是线性代数的研究对象之一.本章从二、三阶行列式出发引进一般行列式的概念,进而讨论行列式的性质和计算方法,最后介绍解线性方程组的克兰姆法则.

1.1 行列式的定义

行列式是通过观察线性方程组解的形式与线性方程组所含方程的系数之间的关系而发现的.在中学阶段,我们已经学过二阶、三阶行列式.为便于理解,仍从这里谈起.

1.1.1 二元一次方程组与二阶行列式

设有二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法易得其解:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

从解的形式中,可以看出其分母是由未知项的系数交叉相乘再求差组成,而分子则由其中一个未知项的系数与常数项交叉相乘再求差组成.

为方便记忆及应用,引进符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,表示算式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,称这个符号为**二阶行列式**.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.2}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的**元素**,横排为**行**,纵排为**列**. a_{ij} 的第一个下标 i 表示所在行,叫**行指标**,第二个下标 j 表示所在列,叫**列指标**. a_{ij} 就是第 i 行与第 j 列交叉位置的元素.此外,从左上角到右下角的对角线叫**主对角线**.

常用大写字母 D,D_1,D_2 等表示行列式.如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

称之为方程组(1.1)的**系数行列式**.

再按照(1.2)式得到下面的行列式:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}$$

则当 $D \neq 0$ 时,方程组(1.1)的解可记为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

例 1.1 求下列各二阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - 3 \times 4 = -14$;

(2) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x - (-\cos^2 x) = 1$;

(3) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4x - x^2$.

1.1.2 三元一次方程组与三阶行列式

设有三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.3}$$

用消元法,可得其解为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} + b_2 a_{32} a_{13} + b_3 a_{12} a_{23} - b_3 a_{22} a_{13} - b_2 a_{12} a_{33} - b_1 a_{32} a_{23}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} a_{33} + b_3 a_{21} a_{13} + b_1 a_{33} a_{23} - b_3 a_{11} a_{23} - b_2 a_{13} a_{31} - b_1 a_{21} a_{33}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 a_{22} a_{11} + b_1 a_{32} a_{21} + b_2 a_{12} a_{31} - b_3 a_{21} a_{12} - b_2 a_{11} a_{32} - b_1 a_{31} a_{22}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23}}$$

可以看出,解的分母是由方程组的 9 个系数排列成三行三列并按对角线三元素相乘再求代数和组成.

为方便对方程组(1.3)的解的记忆,引进符号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,称为**三阶行列式**,它表示算式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$$

在使用时,常用 D 表示这个行列式,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23} \tag{1.4}$$

(1.4)式右端被称为三阶行列式的展开式. 它有如下特点:一共有 6 项,每一项都是行列式的不同行、不同列的三个元素的乘积,其中三项带有"+"号,另三项带有"-"号. 为便于记忆,画出图 1.1,图中用实线连接的三元素之积带有"+"号,用虚线连接的三元素之积带有"-"号. 这种展开三阶行列式的方法称为**对角线展开法**.

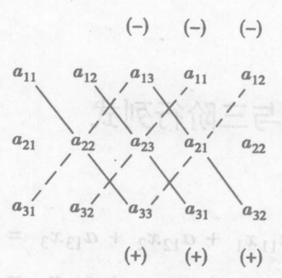

图 1.1

类似地,若记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则当 $D \neq 0$ 时，方程组(1.3)的解可记为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例 1.2 求下列各三阶行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

解 (1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$
$$=1\times1\times3+3\times2\times2+(-1)\times4\times0-2\times1\times(-1)-0\times3\times3-1\times2\times4$$
$$=9;$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=1\times4\times2+2\times1\times3+3\times6\times2-3\times4\times3-2\times2\times2-1\times1\times6=0.$$

例 1.3 解下面三元一次方程组.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$$

解
$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=7 \qquad D_1=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=7$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=7 \qquad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=7$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1$； $x_2=\dfrac{D_2}{D}=1$； $x_3=\dfrac{D_3}{D}=1$.

1.1.3　n 阶行列式的定义

前面,给出了二阶和三阶行列式的定义．三阶以上的行列式如何定义呢？不妨回过头来再看一看三阶行列式:

$$\begin{aligned}D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ &\quad (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1.5}$$

可以看到,一个三阶行列式可化为它的第一行的每一个元素与其对应的二阶行列式的乘积之和的形式．这就意味着三阶行列式可化为二阶行列式来计算. 利用这个特点可以定义四阶行列式、五阶行列式……

为此,先引入余子式和代数余子式的概念.

定义 1.1　在一个行列式中,去掉元素 a_{ij} 所在行和列,其余各元素按照原来的相对位置排列而成的低一阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记作 D_{ij}. 若在 D_{ij} 的前面添加符号 $(-1)^{i+j}$,则称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**,记作 A_{ij},即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$.

例如,在三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中,

a_{12} 的余子式 $D_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$,

a_{12} 的代数余子式 $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

引入代数余子式的概念后,由(1.5)式,三阶行列式可表示为它的第一行的每一个元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

依此类推，可得到四阶、五阶直至 n 阶行列式的定义.

定义 1.2　n^2 个元素排列成 n 行 n 列的形式表示一个算式，记为 D. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 当 $n=1$ 时，规定：$D=|a_{11}|=a_{11}$. 当 $n\geqslant 2$ 时，假设 $n-1$ 阶行列式已经定义，那么 n 阶行列式

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}.$$

例 1.4　计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解　$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}+4\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2\times(-6)-4\times(-17)=56.$$

1.2　行列式的性质

1.2.1　行列式的性质

由行列式的定义计算行列式的值是非常麻烦的. 因此，要讨论行列式的性质以简化计算. 下面主要以二阶或三阶行列式为例介绍行列式的性质. 而

所有这些性质对 n 阶行列式均成立.

性质 1.1 行列式的行与列互换,行列式的值不变.

用二阶行列式来验证

因为 $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

所以 $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式称为行列式 D 的**转置行列式**,记为 D'或 D^{T}.

于是,性质 1.1 又可写成:行列式 D 与其转置行列式 D'相等.

这个性质说明:行列式中,行与列的地位是相当的,即行列式对行成立的性质对列也是成立的.

性质 1.2 将行列式中任意两行(列)互换位置后,行列式的值变号.

例如 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$

所以 $D = -D_1$,而 D 与 D_1 中第一行与第二行是互换的.

推论 1.1 若行列式中有两行(列)对应元素完全相同,则此行列式之值为零.

设行列式为 D. 将 D 中相同的两行互换,则由性质 1.2 得 $D = -D$,故$D = 0$.

性质 1.3 如果行列式中某一行(列)的所有元素有公因子,那么此公因子可以提到行列式符号外面. 如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

推论 1.2 若行列式中某一行(列)的元素全为零,则行列式之值为零.

推论 1.3 若行列式中某两行(列)的对应元素成比例,则行列式之值为零.

由性质 1.3 和推论 1.1,立刻得出推论 1.3.

性质 1.4 如果行列式中某一行(列)的所有元素均为两项之和的形式,则此行列式等于把这些二项式各取一项作为相应的行(列),而其余各行(列)不变的两个行列式的和. 如

$$\begin{vmatrix} a+b & c \\ e+f & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix},$$