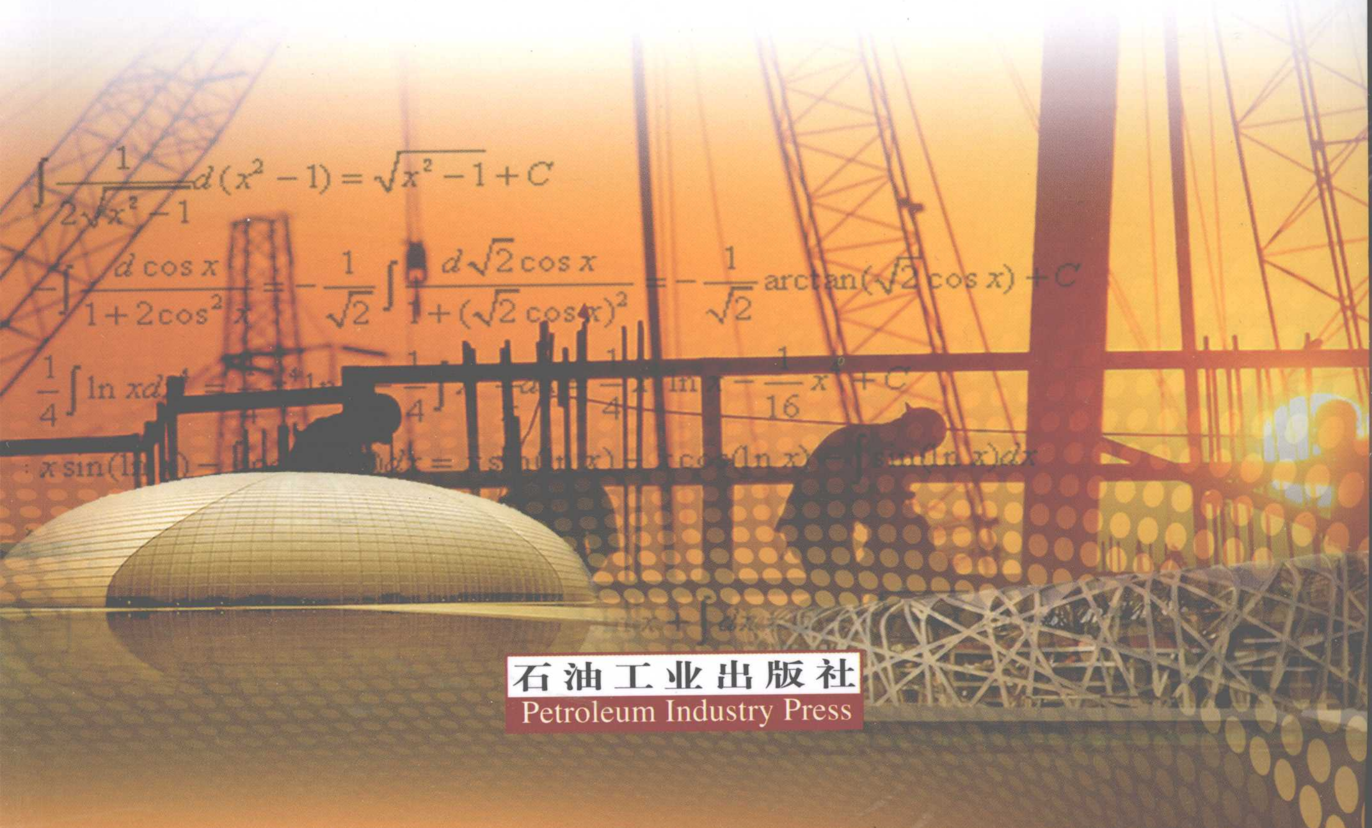
北京市高等教育精品教材立项项目

高等数学

（下册）

宋国华　主编



石油工业出版社
Petroleum Industry Press

北京市高等教育精品教材立项项目

高等数学

（下册）

宋国华　主编

石油工业出版社

内 容 提 要

本书为北京高等教育精品教材立项项目，全书分为上、下两册。下册内容包括：向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。本书注重应用性，在讲述基础理论的同时，注意数学思维方式与应用的介绍，适当增加实例及例题分析。全书各章节都配有习题和总习题，用以掌握和巩固所学知识。

本书可作为建筑类院校本科教材，也可作为地方普通工科院校本科或工科院校夜大、函授教育教材和教师参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/宋国华主编．
北京：石油工业出版社，2009.8

ISBN 978-7-5021-7153-7

Ⅰ．高…
Ⅱ．宋…
Ⅲ．高等数学-高等学校-教材
Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 078341 号

出版发行：石油工业出版社
（北京安定门外安华里 2 区 1 号　100011）
网　址：www.petropub.com.cn
编辑部：（010）64523546　发行部：（010）64523620
经　销：全国新华书店
印　刷：中国石油报社印刷厂

2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
787×1092 毫米　开本：1/16　印张：15.5
字数：397 千字

定价：28.00 元
（如出现印装质量问题，我社发行部负责调换）
版权所有，翻印必究

前 言

本书是在2002年北京市教育委员会教改立项的基础上，于2007年确立的北京市高等学校精品教材立项课题，是课题组成员多年教学改革和实践工作的总结。

目前国内外《高等数学》教材版本较多，主要适用于一般工科院校。本书的特点是结合地方工科院校学生实际和建筑类院校学科专业需求，遵照“在基础课教学中，要以应用为目的”，着重思想方法及应用的介绍，以“必须”、“够用”为度，坚持“服务于技术基础课、专业课”的原则。在教材内容编排上，注重对知识的重点、难点分析，以及知识点的概括和归纳总结。注重相关知识在工程实践中的应用，选编了部分有工程实践背景的例题和习题。注重学生入学前基础知识的差别，以及专业之间需求重点的差别。在习题选编方面，既考虑到对教材基本知识的消化理解，以巩固所学知识，又考虑到后续各专业基础课和专业课的学习，使之为工程教育服务；同时也考虑到报考研究生学生的需求。由于目前高等数学课程学时普遍减少和相关专业对高等数学课程要求的差异，以及地方院校生源的水平、层次之间的差别和部分学生考研等的需要，在教材内容及例题的配备方面，尽量融教材、解题方法、学习指导为一体。

整套教材由《高等数学》(上、下册)和与之配套的《高等数学习题详解》两部分组成。《高等数学》(上册)内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分应用、微分方程共七章；《高等数学》(下册)内容包括：向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数共五章。每节后配有习题，每章后配有总习题。

《高等数学》(上、下册)各章撰稿人分别是：第一章刘颖，第二章吕亚芹，第三章马龙友、李泽好，第四章程士珍，第五章和第八章宋国华，第六章代西武，第七章窦家维，第九章李泽好，第十章寿玉亭、李泽好，第十一章马龙友、宋国华，第十二章刘长河、张艳。《高等数学习题详解》各章习题审定及习题撰稿人分别是：第一章和第三章张蒙，第二章吕亚芹，第四章程士珍，第五章白羽，第六章代西武，第七章窦家维，第八章和第十一章侍爱玲，第九章和第十章王晓静，第十二章张艳、刘长河。整套教材的内容结构由主编宋国华教授和李泽好教授主持设计制定，并负责统稿和定稿。

本教材出版之前，邀请了沈阳航空工业学院、沈阳建筑大学和北京建筑工程学院部分教师对《高等数学》教材进行了认真的审查，同时在北京建筑工程学院部分专业进行试用，根据大家的意见和建议，编写组又做了进一步的修改。本教材的出版，得到了北京市教育委员会高教处、北京建筑工程学院领导及教务处同志们的热情关心和极大的帮助，在此，我们一并表示诚挚的谢意。

由于作者水平有限，书中的错误和不当之处，敬请读者和同行批评指正。

作者

2009年4月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第八章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何是学习多元函数微积分的基础．空间解析几何与平面解析几何相仿，也是用代数的方法来研究几何问题，使数和形紧密地结合，这种结合的基本方法是坐标法．

本章首先建立空间直角坐标系，引进向量的概念和相关运算，然后以向量为工具来研究空间的曲面和曲线及平面和直线，最后介绍常见的二次曲面．

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

与平面解析几何类似，为了确定空间中任意一点的位置，需要在空间中引进坐标系，最常用的坐标系是空间直角坐标系．

在空间任意选定一点 o，过点 o 作三条互相垂直的数轴 ox,oy,oz，它们都以 o 为原点且具有相同的长度单位．这三条轴分别称作 x 轴（横轴），y 轴（纵轴），z 轴（竖轴），统称为坐标轴．它们的正方向符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向（图 8－1）．这样就构成了一个空间直角坐标系，称为空间直角坐标系 $o-xyz$．定点 o 称为该坐标系的原点．

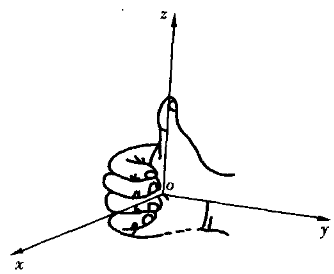


图 8－1

任意两条坐标轴确定一个平面，这样可确定三个互相垂直的平面，统称为坐标面．其中，由 x 轴与 y 轴所确定的坐标面称为 xoy 面，类似地有 yoz 面和 zox 面．三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限．如图 8－2 所示，八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、…Ⅷ表示，其中含 x 轴、y 轴和 z 轴正半轴的是第Ⅰ卦限，在 xoy 面上的其他三个卦限按逆时针方向排定依次为第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限；在 xoy 面下方与第Ⅰ卦限相邻的为第Ⅴ卦限，然后也按逆时针方向排定依次为第Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限．

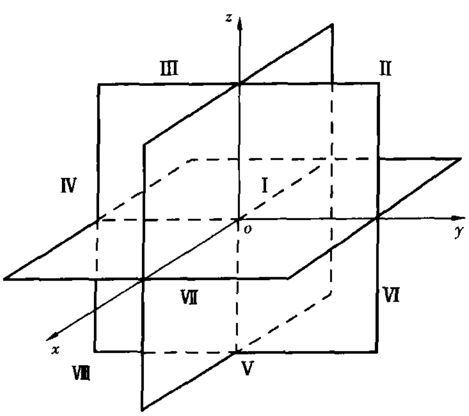


图 8－2

至此，在空间直角坐标系中，有一个原点，三条坐标轴，三个坐标面和八个卦限．

二、空间点的直角坐标

取定空间直角坐标系 $o-xyz$ 后，就可以建立空间的点与一个有序数组之间的一一对应关系．

如图 8－3 所示，设 M 是空间的一点，过 M 点分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面．设这三个平面与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点依次为 P、Q、R，点 P、Q、R 分别称为点 M 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影．又设点 P、Q、R 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x、y 和 z，于是点 M 确定了一个有序数组 x、y、z. 反之，如果给定一个有序数组 x、y、z，可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后过点 P、Q、R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面，它们相交于空间的一点 M，点 M 就是由有序数组 x、y、z 所确定的点．这样一来，空间的点 M 与有序数组 x、y、z 之间就建立了一一对应的关系．把有序数组 x、y、z 称为点 M 的坐标，记作 $M(x,y,z)$，其中 x 称为横坐标，y 称为纵坐标，z 称为竖坐标．

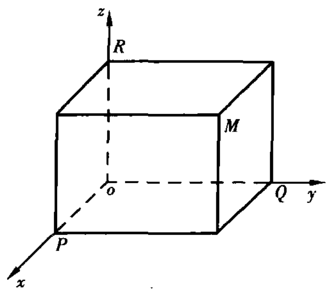


图 8－3

由图 8－3 易知，原点 o 的坐标为 $(0,0,0)$；若点 M 在 x 轴上，则其坐标为 $(x,0,0)$；同样对于 y 轴上的点，其坐标是 $(0,y,0)$；对于 z 轴上的点，其坐标为 $(0,0,z)$；同样，位于 xoy 平面上的点，其坐标为 $(x,y,0)$；位于 yoz 平面上的点，其坐标为 $(0,y,z)$；位于 xoz 平面上的点坐标为 $(x,0,z)$. 可见，位于坐标轴上、坐标面上和各卦限内的点，其坐标各有特点，请读者注意．

三、空间两点间的距离

利用点的坐标，可以导出空间两点之间的距离公式．

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点，过 M_1 和 M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（图 8－4），它的三条棱长分别是 $|x_2-x_1|$、$|y_2-y_1|$、$|z_2-z_1|$，由于 M_1 和 M_2 之间的距离 d 就是该长方体的对角线 M_1M_2 的长度，且 $\triangle M_1NM_2$ 和 $\triangle M_1PN$ 都是直角三角形，故由勾股定理得

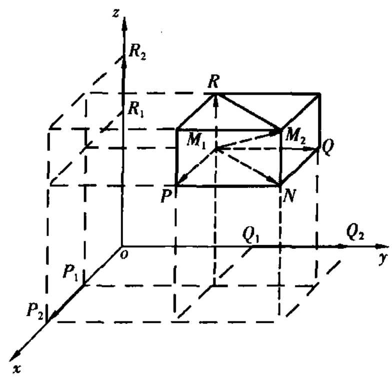


图 8－4

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

这就是空间两点间的距离公式．

特殊地，空间的点 $M(x,y,z)$ 与原点 $o(0,0,0)$ 之间的距离为

$$d=|oM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 8－1 设 P 在 x 轴上，它到 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的 2 倍，求点 P 的坐标．

解 因点 P 在 x 轴上，故设 $P(x,0,0)$，由于

$$|PP_1|=\sqrt{x^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11},$$

$$|PP_2| = \sqrt{x^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{x^2+2},$$

$$|PP_1| = 2|PP_2|,$$

即
$$\sqrt{x^2+11} = 2\sqrt{x^2+2}.$$

从而解得 $x = \pm 1$. 所求点为(1,0,0)和(-1,0,0).

例 8-2 试证明以三点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证明 由于
$$|AB| = \sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2} = 7,$$
$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2} = 7,$$
$$|BC| = \sqrt{(10-2)^2+(-1-4)^2+(6-3)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2},$$

所以
$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2,\ |AB| = |AC|.$$

故$\triangle ABC$为等腰直角三角形.

习题 8-1

1. 画出空间直角坐标系,并描绘下列各点 $A(0,-1,1)$;$B(0,0,5)$;$C(-5,0,3)$;$D(-2,2,4)$.
2. 指出下列各点位置的特殊性质:

(1)(6,0,0); (2)(0,-2,0);

(3)(0,-2,3); (4)(8,0,6).

3. 设某一点与给定点(a,b,c)分别对称于各坐标面、各坐标轴及坐标原点,求它的坐标.
4. 求点 $M(2,-3,6)$与原点及各坐标轴间的距离.
5. 求顶点为 $A(2,1,4)$,$B(3,-1,2)$,$C(5,0,6)$的三角形各边的长.
6. 在 yoz 面上,求与已知点 $A(3,1,2)$;$B(4,-2,-2)$和 $C(0,5,1)$等距离的点.

第二节 向量的概念、向量的线性运算

一、向量的概念

在研究力学、物理以及工程技术的计算中,经常会遇到这样一些量,仅知道它们数值的大小是不够的,还需要指出它们的方向.例如,力、速度、加速度,等等.这种既有大小,又有方向的量称为向量(或矢量).

在数学上,常用有向线段来表示向量.以 A 为起点,B 为终点的有向线段记作$\overrightarrow{AB}$(图 8-5),它代表一个以 A 为起点,B 为终点的向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.有时也用一个黑粗体字母 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 等或书写体用一个上面带箭头的字母$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$等来表示向量.

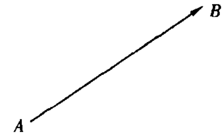


图 8-5

以坐标原点 o 为起点,向一个点 M 引向量$\overrightarrow{oM}$,这个向量称

为点 M 对于点 o 的向径,常用黑粗体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示.

向量的大小即长度,也称为向量的模(或范数). 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记作 $|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量称为单位向量. 模等于零的向量称作零向量,记作 $\boldsymbol{0}$. 显然零向量的起点和终点是重合的. 所以规定零向量的方向是任意的.

向量有两个要素:模和方向. 如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,且方向相同,就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

从两个向量相等的定义可知,一个向量经平行移动后所得的向量与原向量具有相同的模和方向,所以此向量与原向量相等. 由此得到一个向量经平移后仍然是这个向量,也就是说向量的起点可以放在空间的任意一点上. 把这种与起点位置无关的向量称为自由向量(以后简称向量). 这里所研究的向量如果没有特别说明,均为自由向量.

必须注意:在实际问题中,有些向量不能平移. 例如,用向量表示一个作用于弹簧上的力时,力的作用点就是向量的起点,而这个起点是不能任意改变的. 像这样,不仅具有确定的大小和方向,而且起点位置固定的向量称为固定向量.

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反,就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 规定零向量与任一向量平行. 任一组平行向量都可平移到同一条直线上,因此,平行向量也称为共线向量.

如果把一组向量平行移动到同一个起点上,它们是在同一个平面内,就称这组向量是共面的. 显然,任意两个向量总是共面的. 共线向量一定是共面向量.

二、向量的加减法

1. 向量的加法

设有两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,在空间任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则向量 $\overrightarrow{OB}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和,记作 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 向量的求和运算称为向量的加法,如图 8-6 所示. 上述运算称为向量加法的三角形法则.

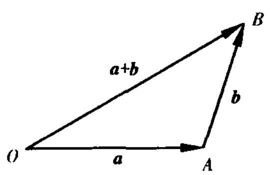


图 8-6

物理学中关于力的合成与分解的"平行四边形法则"实际上正是向量加法的应用之一,利用这种方法给出两个向量相加的平行四边形法则.

对任意两个不平行的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,在空间任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,以 OA 和 OB 为边作平行四边形 $OACB$,则对角线上的向量 $\overrightarrow{OC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和,记作 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 如图 8-7 所示.

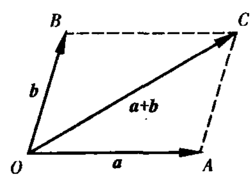


图 8-7

根据平行四边形的性质可知三角形法则与平行四边形法则是一致的.

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

这是因为,按照向量加法的三角形法则,从图 8-7 可见

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

所以符合交换律．又如图 8－8 所示，先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再加上 $\boldsymbol{c}$，即得和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加，则得同一结果，符合结合律．

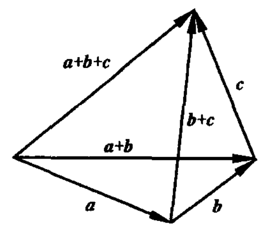


图 8－8

从上述结合律的证明过程中可以看到，将三个向量首尾相接，便得到了它们的和向量，这种方法对三个以上的向量也完全适用．

在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，$\cdots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，根据向量加法的三角形法则

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\cdots=\overrightarrow{OA_n}$$

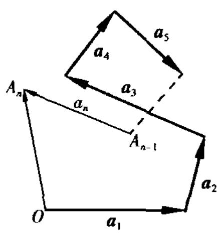


图 8－9

这就是将 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 首尾相接，即：以前一个向量的终点作为后一个向量的始点．则以第一个向量的始点为始点，以最后一个向量的终点为终点的向量，便是这 n 个向量之和．可称为 n 个向量的加法的多边形法则（图 8－9）．

2. 向量的减法

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 之和为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$，向量减法是向量加法的特例．若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 之差 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 这里有一个固定的准则，即差向量的终点与被减向量的终点重合（图 8－10）．

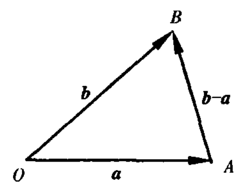


图 8－10

由三角形一边长不大于另两边长度之和，不小于另两边长度之差，可以得到两个常用的不等式 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$. 显然，等号成立的必要条件是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线．

三、向量与数的乘法

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，且 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，那么自然会认为向量 $\boldsymbol{a}$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 的 2 倍，并记作 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$. 这实际上是，$\boldsymbol{a}$ 等于实数 2 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的乘积．由此可知，尽管数量与向量是两类不同的量，但可以定义它们之间的一种运算，向量与数的乘法．

定义 8－1　向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的长度是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 它的方向是：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向任意．特别地当 $\lambda=\pm1$ 时，$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

数乘向量的实质就是将一个向量沿着原来的方向或相反的方向延伸或缩短．

向量与数的乘积符合下列运算规律：

（1）结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$；

（2）第一分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

（3）第二分配律：$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

证明 只需证明向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 与向量 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 模相等且方向相同．根据数乘向量的定义有 $|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\lambda||\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|$，$|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|$，从而 $|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|$.

下面考虑方向问题，由数乘向量的定义可知，向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$，$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$，$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都是共线向量，它们的方向也是相同的．所以 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$.

同样可以根据向量与数的乘积的定义来证明分配律(2)、(3)，留给读者自己来完成．

由上述运算规律可知，数乘向量的运算规律与实数运算是类似的．

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，因此常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系，即有：

定理 8－1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，那么，向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是，存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

证明 由数乘向量的定义可知条件的充分性是显然的．下面证明条件的必要性．

设 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，取 $|\lambda|=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，λ 取正值；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，λ 取负值．即有 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$. 这是因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{b}$ 同向，且 $|\lambda\boldsymbol{b}|=|\lambda||\boldsymbol{b}|=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|$.

下面证明数 λ 的唯一性．设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，又设 $\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{b}$，两式相减，得 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{b}=0$，即 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{b}|=0$. 因为 $|\boldsymbol{b}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

已知模为 1 的向量为单位向量，利用数乘向量的定义可以得到单位向量的一种表达式．设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，$\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，则 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$. 事实上，由于 $|\boldsymbol{a}|>0$，所以 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$ 与 $\boldsymbol{a}^0$ 同方向，即与 $\boldsymbol{a}$ 同方向．又因为 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$ 的模是 $||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}^0|=|\boldsymbol{a}|\cdot 1=|\boldsymbol{a}|$，所以 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$ 与 $\boldsymbol{a}^0$ 不仅方向相同模也相等．这说明任何非零向量均可表示成它的模与同方向的单位向量的乘积；反之，由任何非零向量乘以它的模的倒数，就得到与它同方向的单位向量，即

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

向量的加法、减法和数乘向量统称为向量的线性运算．

例 8－3 设 $\boldsymbol{i}$ 为与数轴正方向一致的单位向量，P 为轴上一点，且坐标为 u，证明 $\overrightarrow{OP}=u\boldsymbol{i}$.

证明 当 $u>0$ 时，$\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{i}$ 同方向，所以 $\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OP}|\boldsymbol{i}$. 因 $|\overrightarrow{OP}|=u$，所以 $\overrightarrow{OP}=u\boldsymbol{i}$.

当 $u<0$ 时，$\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{i}$ 方向相反，所以 $\overrightarrow{OP}=-|\overrightarrow{OP}|\boldsymbol{i}$. 又因 $|\overrightarrow{OP}|=-u$，所以 $\overrightarrow{OP}=u\boldsymbol{i}$.

当 $u=0$ 时，$\overrightarrow{OP}=0$，$u\boldsymbol{i}=0$，也有 $\overrightarrow{OP}=u\boldsymbol{i}$.

例 8－4 如图 8－11 所示，用向量法证明：三角形两边中点的连线平行且等于第三边的一半．

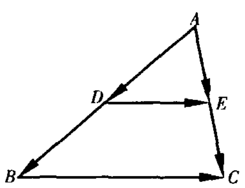


图 8－11

证明 设 D，E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 的中点，则

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},$$

所以 $$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

由数乘的定义知 $DE/\!/BC$ 且 $|DE|=\frac{1}{2}|BC|$.

例8-5 求与向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 角平分线同向的单位向量($\boldsymbol{a}\neq 0,\boldsymbol{b}\neq 0$).

解 由于 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线,不一定是角平分线,只有当 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 时才表示角分线. 为此,先分别求向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的单位向量,$\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},\boldsymbol{b}_0=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$,由于 $|\boldsymbol{a}_0|=|\boldsymbol{b}_0|$,从而 $\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{b}_0$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的角分线同向,所以,$\dfrac{\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{b}_0}{|\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{b}_0|}$ 即表示与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 角分线同向的单位向量.

习题 8-2

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c},\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$.
2. 已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2+6\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{e}_1+6\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$,求 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$.
3. 用向量方法证明:对角线互相平分的四边形是平行四边形.
4. 要使 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 成立,向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 应满足什么关系?

第三节　向量的坐标及线性运算的坐标表示

在物理学中,经常要讨论一个力在某个方向或一条轴上的作用力大小的问题,这就涉及向量在轴上的投影.

一、向量在轴上的投影

首先引进两向量夹角的概念.

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,任取空间一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则 $\angle AOB=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 8-12),记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$,即 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 如果向量 a 和 b 中有一个是零向量,规定它们的夹角可在 0 与 π 之间任意取值.

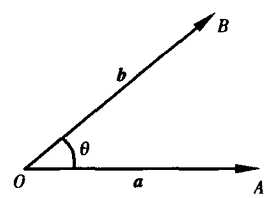


图 8-12

显然,当 $\theta=0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向;当 $\theta=\pi$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向;当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 类似地可规定向量与轴的夹角或空间两轴的夹角,不再赘述.

其次,引进轴上向量代数值的概念.

向量 $\boldsymbol{a}$ 在与其共线的轴 l 上的代数长(或代数值)等于 $\pm|\boldsymbol{a}|$,当 $\boldsymbol{a}$ 与 l 同向时,取正号;反之则取负号.

下面来定义空间一点与一向量在轴 l 上的投影. 设有一轴 l,A 是空间一点,过点 A 作与轴 l 垂直的平面 π,则垂足 A' 称为点 A 在轴 l 上的投影(或投影点)(图 8-13).

显然,如果点 A 在轴 l 上,则投影点就是点 A 的本身. 设点 A 和点 B 在轴 l 上的投影点分别是 A' 和 B'(图 8-14),则向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的投影向量.

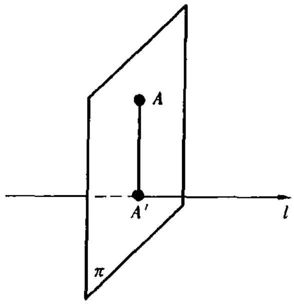


图 8 - 13

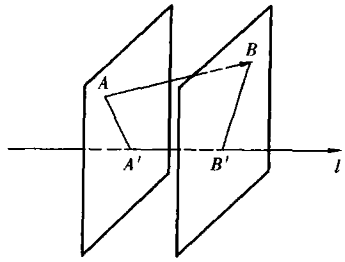


图 8 - 14

显然,如果$\overrightarrow{AB}$与轴 l 共线,则投影向量就是$\overrightarrow{AB}$本身.

向量$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的投影向量$\overrightarrow{A'B'}$的代数长 $A'B'$ 称为向量$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的投影,记作 $\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}$或$(\overrightarrow{AB})_l$,即 $\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=A'B'$. 轴 l 称为投影轴(Prj表示投影,Prj_l表示在轴 l 上的投影).

向量的投影有下面的计算公式.

定理 8 -2 向量$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角 θ 的余弦. 即

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta. \tag{1}$$

(显然结果是一个数)

证明 如图 8 - 15,π_1,π_2 分别是过点 A、B 与轴 l 垂直的平面,垂足为 A'、B',则$\overrightarrow{A'B'}$是$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的投影向量,作$\overrightarrow{A'B_1}=\overrightarrow{AB}$,则 $A'B_1BA$ 是平行四边形,从而$\overrightarrow{B_1B}/\!/\overrightarrow{A'A}/\!/\pi_1/\!/\pi_2$,因此 B_1 也在π_2 上,B'也是 B_1 在轴 l 上的投影点. 从而有$(\overrightarrow{AB})_l=(\overrightarrow{A'B_1})_l=\pm|\overrightarrow{A'B'}|$,由于$\triangle A'B'B_1$ 是直角三角形,必有$|\overrightarrow{A'B'}|=|\overrightarrow{A'B_1}||\cos\theta|=|\overrightarrow{AB}||\cos\theta|$.

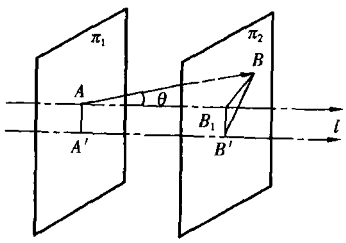


图 8 - 15

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时,定理显然成立;

当 $\theta<\frac{\pi}{2}$时,$\overrightarrow{A'B'}$与轴 l 方向相同,其代数长与 $\cos\theta$ 皆为正值,故$(\overrightarrow{AB})_l=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$;

当 $\theta>\frac{\pi}{2}$时,$\overrightarrow{A'B'}$与轴 l 方向相反,其代数长与 $\cos\theta$ 皆为负值,故此时仍有$(\overrightarrow{AB})_l=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$.

由定理 8 -2 及证明过程,不难得出如下推论.

推论 相等向量在同一轴上的投影相等,相反向量在同一轴上的投影绝对值相等,符号相反.

向量在轴上的投影有如下运算性质.

定理 8 -3 两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影的和,即

$$\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{b} \tag{2}$$

证明 任取一点 A,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,设点 A,B,C 在轴 l 上的投影点分别为 A',B',C',如图 8 -16. 则向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$在轴 l 上的投影向量分别是$\overrightarrow{A'B'}$,$\overrightarrow{B'C'}$和$\overrightarrow{A'C'}$,且有$\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}$. 那么投影 $\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,$\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}$,$\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{b}$ 恰好分别等于同一轴上向量$\overrightarrow{A'C'}$,$\overrightarrow{A'B'}$,$\overrightarrow{B'C'}$的代数长,即 $\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=A'C'$,$\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}=A'B'$,$\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{b}=B'C'$.

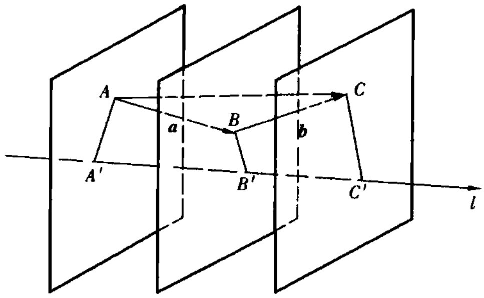


图 8－16

由于不论 A',B',C' 在轴 l 上的位置如何，总有 $A'B'+B'C'=A'C'$，所以 $\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}+\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{BC}=\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AC}$，即 $\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{b}$.

显然定理 8－3 可推广到有限个向量，即

$$\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_n.$$

定理 8－4 向量与数的乘积在轴 l 上的投影，等于向量在轴 l 上的投影与数的乘积，即

$$\mathrm{Prj}_l\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}=\lambda|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a}\,\widehat{,}\,l). \tag{3}$$

证明 设 $\boldsymbol{a}$ 与轴 l 的夹角为 θ，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与轴 l 的夹角为 θ_1，则当 $\lambda>0$ 时，$\theta=\theta_1$；当 $\lambda<0$ 时，$\theta_1=\pi-\theta$. 于是

当 $\lambda>0$ 时，$\mathrm{Prj}_l(\lambda\boldsymbol{a})=|\lambda\boldsymbol{a}|\cos\theta_1=\lambda|\boldsymbol{a}|\cos\theta=\lambda\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}$；

当 $\lambda<0$ 时，$\mathrm{Prj}_l(\lambda\boldsymbol{a})=|\lambda||\boldsymbol{a}|\cos\theta_1=-\lambda|\boldsymbol{a}|(-\cos\theta)=\lambda\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}$；

当 $\lambda=0$ 时，显然成立．

例 8－6 设一向量 $\boldsymbol{a}$ 的模是 2，它与投影轴的交角是 $60°$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 在该轴上的投影．

解 设投影轴为 l，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在该轴上的投影 $\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos60°=2\times\frac{1}{2}=1$.

二、向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标

为了沟通向量与数的研究，可利用空间直角坐标系建立向量与有序数组之间一一对应的关系．这可以利用向量在坐标轴上的投影来实现．

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量，过点 M_1,M_2 分别作垂直于三个坐标轴的平面，这六个坐标面围成一个以向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 为对角线的长方体，如图 8－17 所示．

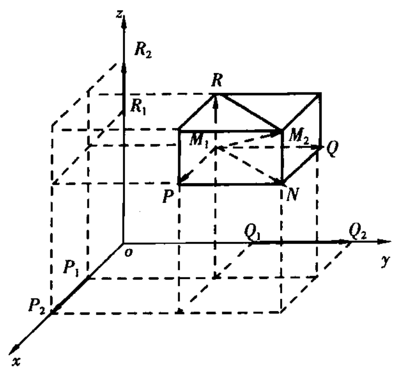


图 8－17

由向量加法的法则知，$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1N}+\overrightarrow{NM_2}$，而 $\overrightarrow{M_1N}=\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}$，$\overrightarrow{NM_2}=\overrightarrow{M_1R}$，但是 $\overrightarrow{M_1P}=\overrightarrow{P_1P_2}$，$\overrightarrow{M_1Q}=\overrightarrow{Q_1Q_2}$，$\overrightarrow{M_1R}=\overrightarrow{R_1R_2}$，所以 $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{Q_1Q_2}+\overrightarrow{R_1R_2}$.

向量$\overrightarrow{P_1P_2}$,$\overrightarrow{Q_1Q_2}$,$\overrightarrow{R_1R_2}$分别称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在x轴、y轴、z轴上的分向量．也就是向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在这三个坐标轴上的投影向量．

在空间坐标系$o-xyz$中，设$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$分别为与x轴、y轴、z轴正方向一致的单位向量，称这三个向量为这个坐标系的基本单位向量或坐标向量．

那么$\overrightarrow{P_1P_2}=a_x\boldsymbol{i}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$，表示向量$\boldsymbol{a}$在$x$轴上的分向量；

$\overrightarrow{Q_1Q_2}=a_y\boldsymbol{j}=(y_2-y_1)\boldsymbol{j}$，表示向量$\boldsymbol{a}$在$y$轴上的分向量；

$\overrightarrow{R_1R_2}=a_z\boldsymbol{k}=(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$，表示向量$\boldsymbol{a}$在$z$轴上的分向量．

因此

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{4}$$

即

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k} \tag{4$'$}$$

式(4)′称为向量$\boldsymbol{a}$按基本单位向量的分解式．其中：x_2-x_1表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在x轴上的投影；y_2-y_1表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在y轴上的投影；z_2-z_1表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在z轴上的投影．

由此可知，向量$\boldsymbol{a}$可以唯一地确定出它在x轴上的投影a_x，在y轴上的投影a_y，在z轴上的投影a_z；反过来由a_x,a_y,a_z可以唯一地确定出向量$\boldsymbol{a}$，这样有序数组a_x,a_y,a_z就与向量$\boldsymbol{a}$一一对应．向量$\boldsymbol{a}$在三条坐标轴上的投影a_x,a_y,a_z称为向量$\boldsymbol{a}$的坐标．并记作

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\} \tag{5}$$

式(5)称为向量$\boldsymbol{a}$的坐标表示式．

于是，起点为$M_1(x_1,y_1,z_1)$，而终点为$M_2(x_2,y_2,z_2)$的向量的坐标表示式为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

这说明，任何一个向量的坐标就是其终点与起点对应坐标之差，零向量的起点和终点重合，所以它的坐标表示式为$\boldsymbol{0}=\{0,0,0\}$．

特别是，将任何一个向量$\boldsymbol{a}$平移使起点与坐标原点重合，其终点为M．规定起点为坐标原点，终点为$M(x,y,z)$的向量坐标为向径$\overrightarrow{oM}$的坐标，即

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{oM}=\{x,y,z\} \tag{6}$$

注意 (1)向量$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$在三个坐标轴上的投影是三个数，分别为$a_x$($x$轴上的投影)，$a_y$($y$轴上的投影)，$a_z$($z$轴上的投影)；

(2)向量$\boldsymbol{a}$在三个坐标轴上的分向量是三个向量，分别是$a_x\boldsymbol{i}$(x轴上的分向量)，$a_y\boldsymbol{j}$(y轴上的分向量)，$a_z\boldsymbol{k}$(z轴上的分向量)；

(3)坐标向量$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$是分别与x轴、y轴、z轴正向一致的单位向量．

例 8－7 求坐标向量$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$的分解式及坐标表示式．

解 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$的分解式分别为

$\boldsymbol{i}=1\cdot\boldsymbol{i}+0\cdot\boldsymbol{j}+0\cdot\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{j}=0\cdot\boldsymbol{i}+1\cdot\boldsymbol{j}+0\cdot\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{k}=0\cdot\boldsymbol{i}+0\cdot\boldsymbol{j}+1\cdot\boldsymbol{k}$.

它们的坐标表示式分别为：$\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$,$\boldsymbol{j}=\{0,1,0\}$,$\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$.

三、向量线性运算的坐标表示

设$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，即$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则利用向量线性运算的运算规律有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com