測绘資料汇編

第 1 集

第 4 册

平差法

測繪出版社

测绘資料汇編

第1集

第4册

平差法

测繪出版社

統一書号：15039·86
定价：0.40 元

測絵資料汇編

第1集 第4册

平差法

測繪出版社

1957·北京

目 錄

介紹几种簡便的測量平差方法

王 之 卓

測量平差的方法在基本上不外乎間接观測平差法同条件观測平差法兩种。这兩种方法都是根据最小二乘法原理推演出來的，理論很嚴格而应用的范圍也很广泛。但是缺点在解算法方程式。法方程式是联立方程式，联立方程式数目多了之后，解算比較麻煩。这里介紹几种簡便的平差方法，都是苏联所習用的方法。我們加以适当的选用，对于中國的測量計算工作，一定可以得到很大的帮助。

現在分下列:

1.逐漸趋近方法

2.巴保夫(Попов)方法

3.比較誤差方法

4.代替綫方法

四种來加以最簡單的介紹。这几种方法适用于水准網及導綫網的平差計算。導綫網的平差是指例用的近似平差方法而言。就是把折角的閉合差平均之后，再計算導綫的縱横座标差。把導綫網中各導綫的折角，縱座标同横座标三种孤立起來看待，導綫網同水准網平差的問題就相类似了。在今年暑假期間，交通大学測量隊參加鄭州市市郊区的測量工作，曾經采用逐漸趋近方法來解算綜錯的導綫網，結果很成功。本文介紹各种方法选用了水准測量的一个比較簡單的例子。

1. 逐漸趨近方法

逐漸趋近方法最好根据一个实例來加以說明。按圖1假定A，B，C，D，E是五个水准点，A点的高程已知是10.000公尺，各綫段圈內的数字代表該節的距离，以公里为單位。箭头指向較高的方向，旁边的数字代表观測的高程差以公厘为單位。譬如以AB節为例，距离是

7.0 公里，高程差是1.432 公厘， B 点較高。由 A 点的已知高程，同

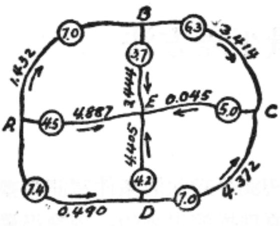

圖 1

各观測的数値 ，可以求得各水准点 B, C, D, E 等的第一次近似高程。也就是表一內“近似値之演算”欄內 “I” 下面的各数値。第一次的近似高程本可以随意假定，但以愈近其眞值愈佳。此时我們集中看 B 点的高程，它可以分别由 A, E 及 C 点計算出來，这种計算列在表一的第一大行。在“近似値之演算”欄“II”內，根据 A 点的巳知高程及C, E 兩点的近似高程及“高程差”欄內所列的数値分别求出自 A, C, 及E 点求得 B 点的高程为11.432, 11.432及11.443 公尺。求三値的平均値时应考慮其权，假定权 P与距离 S 成反比，或 $P=\frac{1}{S}$. 为求权平均値計算的方便，更將P值改算为P′值，使P′的和为 1，各値分别列在表一 “权” 欄內。如此求得水准 点B 的第二次近似

出發點	節點	高程差（公尺）	距離 S（公里）	權		近似值之演算		
				$p=\frac{1}{S}$	p′	I	II	III
A	B	+1.432	7.0	0.14	0.25		11.432	11.432
C		−3.414	6.3	0.16	0.28		11.432	11.437
E		−3.444	3.7	0.27	0.47		11.443	11.443
				0.57	1.00	11.432	11.437	11.438
B	C	+3.414	6.3	0.16	0.32		14.851	14.852
D		+4.372	7.0	0.14	0.28		14.862	14.855
E		−1.045	5.0	0.20	0.40		14.842	14.842
				0.50	1.00	14.846	14.851	14.849
A	D	+0.490	7.4	0.14	0.27		10.490	10.490
C		−4.372	7.0	0.14	0.27		10.479	10.477
E		−4.405	4.2	0.24	0.46		10.482	10.482
				0.52	1.00	10.490	10.483	10.482
A	E	+4.887	4.5	0.22	0.24		14.887	14.887
B		+3.444	3.7	0.27	0.29		14.881	14.882
C		+0.045	5.0	0.20	0.21		14.896	14.894
D		+4.405	4.2	0.24	0.26		14.888	14.887
				0.93	1.00	14.887	14.887	14.887

表 一

高程为11.437公尺。此值仍旧系近似值，因为所引用的C点及E点之出發高程都是近似高程。

此时再依次考慮水准点C。它的高程可以分别由B,D及E三点計算,求得C点。第二次近似值为14.851。再依次完成D点及E点的第二次近似高程，列在表一“近似值之演算II”欄內。

同理求各水准点的第三次近似高程，因为第三次与第二次的近似高程已經很相接近，所以可以就認为第三次近似高程，就是各高程的最或是值了。最后的結果是$H_B=11.438$,$H_C=14.849$, $H_D=10.482$, $H_E=14.887$公尺。

2. 巴保夫方法

巴保夫平差方法系將每一个环形網的不符值，逐漸依其环內各節間的距离比例分配。当第一个环形網里面的不符值已經分配完畢之后，由于它相鄰环形網分配不符值所產生第一个环形網里面新的不符值,再由第二次分配时，加以考慮。如此繼續下去，不符值逐漸趋小，很快就可达到最后的結果。

現在仍旧取圖1的例子用巴保夫方法計算。在这个实例当中一共有四个閉合环形,如圖2所示。每个环形依时針轉向把各節間的高程相加起來,它的代数和都应該是零。不符值的数字−11, +15, −12, −8, 以公厘为單位，分别寫在粗綫方框里的第一行。方框上面的I, II, III,IV等字分别代表四个环形網的編号。

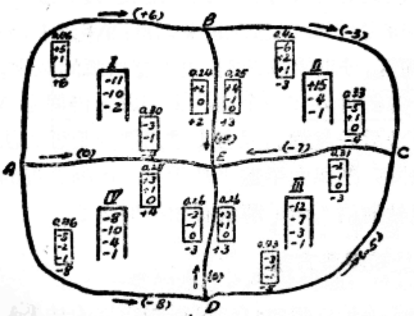

圖 2

現在要把这四个不符值分配在各節里，可以由任意一个环形开始。譬如現在由第二个环形先开始，因为这个环形里的不符值比較最大。这时候不符值15公厘是要按EB, BC及EC三边的边長比例3.7:6.3:50來分配

的，为以后計算方便把这三个数字改算为 0.25:0.42:0.33 。相互間的比例与前相同但使三个数相加，适为 1.00，把这三个改算后的比例数字，分别寫在屬于那三边方框的上面。把“+15”按比例分配，EB，BC及EC 各得4，6及 5 公厘。不符值既然是正号，所有分配的数字都应該是負号。但是在該环形內，如果按时針方向数，凡是各边表示高程差的箭头方向与时針方向相同的，应該的分配額是負号，相反的应該是正号。

現在輪到第III个环形。它的不符值是－12 公厘由于EC边已經接收－5公厘的改正，这对于第III个环形里时針轉向的影响是＋5 公厘，所以 －12＋5＝－7 公厘，寫在粗綫方框III內“－12”的下面。把这新的不符值“－7”按DE，EC及CD三边的比例0.26:0.31:0.43分配，各得＋2，－2，－5，－3，依此类推經过第IV 个环形到第 I 个环形的时候，原來第 I 个环形的不符値是 －11，因为 AE 边已經接收改正 “－3”，BE边已經接收改正“＋4”所以第一个环形新的不符值是－11－3＋4＝－10，寫在粗綫方框 I 内 “11” 的下面，再行分配，各边的分配額是 ＋5，＋2，及－3。

現在第一次分配已經完結，再由第II 个环形網开始作第二次分配。这个时候第 II 个环形網受鄰环分配不符値的影响，EC 边曾經接收了－2公厘的改正，BE 边曾經接收了－2 公厘的改正，所以在第二次分配开始的时候，第 II 个环形網內的新不符値是－4 公厘，寫在粗綫方框里，仍按各边距离的比例分配。依此类推經过三次的分配就可以完成了这个圖形的平差。把各边所分配的改正分别总合起來，得：AB为＋6公厘，BC为-3公厘，BE为＋5公厘等，分别寫成圖2各边上有括弧的数字。

应用巴保夫方法所有的計算都可以在一个簡圖上完成。仍假定 A 点的高程为 10.000 公尺，得平差后各点的高程与上述用逐漸趋近方法所得的結果（見表二）完全相同，巴保夫平差也是采取了逐漸趋近的基本原理的，与結構学靜不定結構的 Cross 解法有相类似之处。

3. 比較誤差方法

比較誤差方法是一个粗率的方法，但也可以獲得相当好的結果。結果的精确性与計算人的經驗有关。因为这种方法的計算手續非常簡

單，至少可以用作檢查其他平差方法粗心錯誤之用。

仍用圖 1 的例子來說明，改繪在圖3。在每个环形網 I，II，III，IV 当中的数值，代表各环形網的不符值，依时針方向計算。現在首先解决各环形網間各綫的改正值。分配改正值的原理是：凡是兩相鄰环形網的不符值符号不相同(譬如I及II)，如果在其間的綫上(BE)加以改正，那么对于相鄰兩个环形的不符值，都將有改善；反之，凡是兩相鄰环形網的不符值符号相同(譬如I及IV)，如果在其間的綫上(AE)加以改正，則对于其相鄰的一个不符值可以减小，但是对于另一个不符值將使之增加。針对这一个原理，所以凡是相鄰环形網的不符值符号相同，在其間的綫上，就不分配改正值。按圖 3 AE及DE兩綫的改正为零。而 BE及 EC 兩綫都应有适当的改正。我們現在比較 I，II 兩环的不符值，它的差别略小于 II，III 兩环不符值的差别，所以 BE 綫上的改正也应該略小于 EC 綫上的改正。我們可以把 15 公厘的不符值酌按 8 及 7 分别分配在 BE 及EC 綫上，至于符号可易由圖 3 各箭头的方向加以判断。

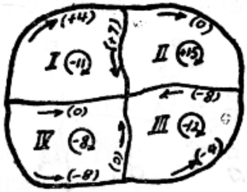

圖 3

現在BE，EC，ED及AE綫上的改正值都已經决定，其余各綫的改正值也很容易寫出。就是圖3內各括弧里的数字。把这种近似平差的結果同圖2的結果相比較，列在表二可見由比較誤差方法所獲得的結果同嚴格方法所得的結果很相近，而計算手續非常簡便，是这个方法的特点。

	綫	BE	EC	ED	AE	AB	BC	CD	DA
改正(公厘)	嚴格方法	+5	−7	0	0	+6	−3	−5	−8
	比較誤差方法	+7	−8	0	0	+4	0	−4	−8

表二

4. 代替綫方法

在有一类的水准網平差問題，可以用代替綫的原理來進行計算工作。代替綫方法是嚴格平差方法的一种。譬如以圖4的水准網为例。A，B，C，D，E，F，G等各点代表已知高程的水准点，現在要根据$Z_1Z_2\cdots Z_9$等

綫水准測量的結果算求節点K，M 及N的高程各水准綫的路綫長（公里）是$L_1L_2\cdots L_9$.而各綫的观測高程差是$H_1H_2\cdots H_9$. 現在利用代替綫方法由圖 4 的左方起始分析。

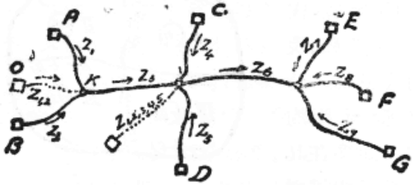

圖 4

由 Z_1及Z_2兩綫水准測量所算得節点 K 的高程，假設是H_1及H_2，更假定水准測量的权 P 等于其水准路程（公里）L 的倒数，可以求得 K 点平均高程是：

$H_{1,2}=\dfrac{P_1H_1+P_2H_2}{P_1+P_2}$，其中$P_1\ \dfrac{1}{L_1}$，$P_2=\dfrac{1}{L_2}$而 $H_{1,2}$ 的权 $P_{1,2}=P_1+P_2=\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{1}{L_2}$

現在我們可用一根理想的綫$Z_{1,2}$来代替Z_1及Z_2兩根綫。只要由这根代替綫所算得K点的高程是$H_{1,2}$而它的長度是$L_{1,2}=\dfrac{1}{P_{1,2}}$，在理論上就是嚴格的代替了。經过这种代替之后，我們可以想像節点M的左方是一根綫$Z_{1,2,3}$由$Z_{1,2}$及Z_3綜合而成。M点由左方算得的高程是$H_{1,2,3}=H_{1,2}+H_3$而該代替綫的長度是$L_{1,2,3}=L_{1,2}+L_3$。

現在再把交接于M点的$Z_{1,2,3}$、Z_4及Z_5合併成为一根代替綫$Z_{1,2,3,4,5}$則

$$H_{1,2,3,4,5}=\frac{P_{1,2,3}H_{1,2,3}+P_4H_4+P_5H_5}{P_{1,2,3}+P_4+d_5},$$

$$L_{1,2,3,4,5}=\frac{1}{P_{1,2,3,4,5}}$$

而 $P_{1,2,3,4,5}=\dfrac{1}{L_{1,2,3}}+\dfrac{1}{L_4}+\dfrac{1}{L_5}$

如此繼續到了 N点的时候，只有一根代替綫 $Z_{1,2,3,4,5,6}$及$Z_7Z_8Z_9$，可以用最簡單 的算学平均值方法 計算得 N 点的高程。N点高程求得之后，更可以依次反求出M点及 K 点的高程。

（轉載科学通报1951年2卷11期）

水庫測量中視距導綫網的調整

潘　家　錚

本文乃作者从实际工作中所得經驗与理論的結合。对校正導綫網这一繁重工作，提供了一个切实可用的新頴方法。这与作者在本刊第十九期中所寫的“大規模水平網的調整”一文是一貫的，利用“相似性”的原理和「Relaxation Method」的技術，給測量学开闢了新的境界，实值得重視。——工程建設編者。

浙江水力發电工程处（前錢塘江水力發电勘測处）于1949年寒假中委托浙江大學土木系同学測量分水江水庫地形。施測范圍約为30－40平方公里，由兩測量隊分别从上下游測向壩址会合，每隊复分兩組，各沿分水江兩岸敷設導綫，隔相当距离則將導綫閉合一次以資校对。此外每逢支流或平原时，則敷設次導綫直达河源，或抵所需高度。此种次導綫往往自行閉合，或展轉接入主導綫中。在河流分歧平原广闊之处，次導綫有所不逮，倘須依次添設第二、三級之次導綫以窮其形。因此導綫之分布極形复雜，交織而成一整个之測網，室內平差工作上增加不少困难。作者經去年一个月來之工作，發現若以一般近似之平差法以調整視距導綫網时，顯然不合最小二乘法之原理。因此創用了一种較合理之系統平差法。鑒于我國今后水电建設事業正將全面展开，水庫地形測量又为任何水电工程之先决条件，故归納所得，作成本文，以供参考，并望讀者教正。

一、視距測量之特点

視距測量之最大特点，厥为其方向与距离精度之不同。最簡單之一分經緯仪，其每次量角之誤差，不致大于半分，在精密之仪器倘可減少。然而不論何种經緯仪在施行視距測量时，其准确度常只达$\frac{1}{200}$。設導綫長200公尺，則一公尺之差誤，可引起最大的角誤差$\sin^{-1}\frac{1}{200}$

$=20'\pm$，达20分左右。即令精度达$\frac{1}{1000}$，尙相当于4分左右之角差。可見視距之精度，实远遜于方向之精度，此以实例証之，更为顯然。分水江全部測網中，共計主導綫400余，次導綫600余，大小閉合形30余，每形边数自12至30不等，然各形之方向閉合差，平均均在1分至2分左右（許可閉合差$r'=\frac{1}{2}\sqrt{n边}$）。即在最次要之閉合形中，亦少超过3分者，然在計算縱橫后，各形之閉合差均在$\frac{1}{200}$至$\frac{1}{500}$之間。此种誤差，大部当由視距相差而來，方向之影响較微，蓋可断言。

倘在此种情形下，仍用一般之近似方法，將閉合差按長度分配至各導綫上，則各边之方向，均將有顯著之更动。尤其垂直于閉合差之边，其方向之改动可达七分至十余分之巨，此顯与事实不符。是以吾人不得不放棄此种近似方法，因此方法之創立，原假定距离与方向之精度相若。

二、平差之步驟

測量發生之誤差有方向誤差及視距誤差兩种，已如上述。本來按照平差原理，兩者应該同时調整，始合理論。但如此將使計算工作大加，甚至无法進行。尤其視距測量平差之目的乃在閉合各測網以供繪圖之用。过分之精密非但无必需，抑且无意义。故不妨將方向及視距分別調整，方向經一次改正后不复变动。（按事实上即在精密之大三角平差中亦系采用此一步驟，以使計算易于着手）

因此視距導綫網之平差步驟如下：

（1）計算方向之誤差，适当分配至各边，使閉合形之內角符合几何条件。經此后，各測綫之方向即不复变动。

（2）調整各測綫之長度，使：

（a）符合几何定約（縱橫距代数和为0），

（b）符合最小二乘方原理。

（3）調整各測綫之高差，使：

(a)符合几何定約，

(b)符合最小二乘法原理。

本文所述者，只为平面上之平差。第三步工作（高差之調整）为一水平網之平差問題，作者另有專文討論，其范圍并不限于視距導綫網。請参閱“大規模水平網的調整法”一文。

三、方向之調整

因通常測角之誤差甚小，故其調整步驟頗为簡易，玆簡述如下：

(1) 根据測量記錄計算每一內角，而求得每一閉合形內角之閉合差。

(2) 估計施測各內角相对之权將內角閉合差分配至各內角上。

此时所須注意者，如在圖 1 中之導綫網，有三閉合形，19 个內角，其中角 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19 諸角，称为独立角或自由角，其值可以任意改动，不受任何定約控制，而 $\angle 4$及$\angle 7$，$\angle 12$及$\angle 16$二組为定約角，因其值不能任意变动而須滿足下列定約方程式：

$$\begin{cases} \angle 4+\angle 7=2\pi \\ \angle 12+\angle 16=2\pi \end{cases}$$

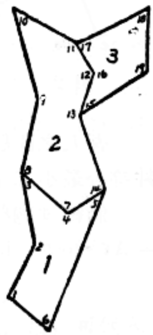

圖 1

故分配此差誤之工作，为一最小二乘法上簡單之定約平差問題，可按一般方法解之。各內角相对之权，由其兩边長度及施測时的环境决定。

事实上，因閉合差甚小，故可設法分配此微小誤差至比較不可靠的角度上，不需要經过仔細之計算。惟各約定方程，則必須滿足。

待各內角平衡后，乃可根据測綫之方向为标准，依次計算各測綫之方向，普通常以第一綫之磁方向为計算标准，倘曾施測过其眞方位者更好。标准綫可自任一綫算起，算得各綫方向后可進而作最重要之長度調整。

四、長度之調整

導綫網与其相似結構

当導綫網經过方向調整后测綫之方向即行固定，繼須改正各测綫之長度，以使每一閉合形完全閉合。

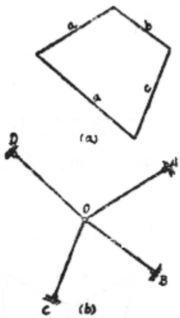

圖 2

圖 2(a) 中为一單独導綫網，令B表示测綫之方向角，將各测綫長度 l 分别乘以該綫之 $\cos B$ 及 $\sin B$，可求得各綫之縱横距 l_y 及 l_x，几何定約条件为

$$\begin{aligned}\Sigma l_y &= 0\\ \Sigma l_x &= 0\end{aligned} \tag{1}$$

由于观測时之差誤，上述条件不能滿足，可令

$$\Sigma l_y = \varepsilon_y$$

$$\Sigma lx = \varepsilon_x$$

吾人之問題，即如何分配ε_y及ε_x至各测綫上，使滿足几何定約，并符合最小二乘法之原理。

倘經过調整后，各测綫長度改变一値 Δl，令 $\Delta l = \Delta l \cdot \sin B$，$\Delta l_y = \Delta l \cdot \cos B$，則为滿足几何定約，必需

$$\left.\begin{aligned}\Sigma \Delta l_x + \varepsilon_x = 0\\ \Sigma \Delta l_y + \varepsilon_y = 0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

同时根据最小二乘法原理，各改正値 Δl_x，Δl_y 須适合下列条件：

$$\Sigma\omega(\Delta l_x^2 + \Delta l_y^2) = \text{最小} \tag{3}$$

式中ω为各测綫之权。

圖 2 (b) 中，O点代表一剛体，从O点联OA，OB，……各彈性杆使各杆方向分别平行于 a，b，…… 各测綫并使各杆之長度 l 及彈性係数 E，断面積 A 适合下列条件：

$$\frac{l}{AE} = 2\omega \tag{4}$$

如此之結構，称为導綫網之相似結構。試在O点作用兩外力F_x，F_y，令 $F_x=\varepsilon_x$，$F_y=\varepsilon_y$ 則各杆中之应力 S_x及 S_y必須滿足下列条件：

$$\left.\begin{aligned} \Sigma S_x + F_x = 0 \\ \Sigma S_y + F_y = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\Sigma \tfrac{1}{2} \frac{l}{AE} \left(S_x^2 + S_y^2 \right) = \text{最小} \tag{6}$$

比較(2)(3)及(5)(6)式，可知完全相同，由此，圖 2 (a) 中導綫網調整問題，可化为求其相似結構之应力問題。

五、單独導綫網之調整

圖 2 (b) 中之相似結構， 当彈性杆数甚多之时， 虽为高次超靜定，但只有兩个独立位移，即 O点之水平位移 u 及垂直位移 v. 故可应用逆算法之精神，先求此二位移，再算各杆內力，甚为簡捷。由結構学，u及v可自下列联立方程中求得：

註

$$\left.\begin{aligned} u\,\Sigma \frac{AE}{l}\sin^2 B + v\Sigma \frac{AE}{l}\sin B\cos B = F_x \\ u\,\Sigma \frac{AE}{l}\sin B \cos B + v\Sigma \frac{AE}{l}\cos^2 B = F_y \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中B 为各杆与垂直綫所交之角。由上式解得 u 及 v 后，可代入下式以求应力：

$$\left.\begin{aligned} S_x = \frac{AE}{l}\left(\sin^2 B\cdot u + \sin B\cos B\cdot v \right) \\ S_y = \frac{AE}{l}\left(\sin B\cos B\cdot u + \cos^2 B\cdot v \right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

將 2ω 代$\frac{l}{AE}$，ε_x，ε_y 代 F_x，F_y，Δl_x，Δl_y 代 S_x，S_y，可得求測綫改正值之公式如下：

$$\left.\begin{aligned}\Delta l_x &= \frac{1}{2\omega}\left(\sin^2 B\cdot u+\sin B\cos B\cdot v\right)\\ \Delta l_y &= \frac{1}{2\omega}\left(\sin B\cos B\cdot u+\cos^2 B\cdot v\right)\end{aligned}\right\} \qquad (8')$$

其中 u 及 v 由下式解得:

$$\left.\begin{aligned}u\cdot\Sigma\frac{1}{2\omega}\sin^2 B+v\cdot\Sigma\frac{1}{2\omega}\sin B\cos B&=\varepsilon_x\\ u\cdot\Sigma\frac{1}{2\omega}\sin B\cos B+v\cdot\Sigma\frac{1}{2\omega}\cos^2 B&=\varepsilon_y\end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

例　圖 3 中之導綫網，經实測結果如次。

測　綫	距　离 m	内　角	$\frac{1}{2\omega}$
AB	211		4
BC	390	74°05′	16
CD	283	158°19′	9
DE	419	41°36′	16
EA	200	148°00′	4
AB		118°01′	

平 差 步 驟

1. 方向之調整

各内角之总和=540°01′，故閉合差=0°01′

因誤差不大，又角 A 之兩視綫最短，且因地形限制，測量时系以花杆对点，比較不可靠，故將一分之誤差，分配在 A 角，改正后之角为 118°00′，各測綫之方向为

AB　N　60°00′ W

BC　N　45°55′ E

CD　N　67°36′ E

DE　S　26°00′ W

EA　S　28°00′ W

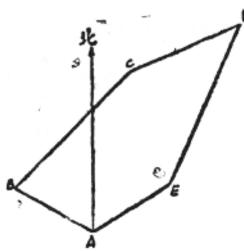

圖 3