实变函数论教与学

Teaching and Learning of Real Variable Functions

程丛电　关洪岩　编著

Edited and Written by

Congdian Cheng　Hongyan Guan

辽宁大学出版社

实变函数论教与学

Teaching and Learning of Real Variable Functions

■ 程丛电 关洪岩 编著
Edited and Written by
Congdian Cheng Hongyan Guan

■ 辽宁大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

实变函数论教与学/程丛电，关洪岩编著．—沈阳：辽宁大学出版社，2009.9

ISBN 978-7-5610-5898-5

Ⅰ．实…　Ⅱ．①程…　②关…　Ⅲ．实变函数论—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 160754 号

出 版 者：辽宁大学出版社

（地址：沈阳市皇姑区崇山中路 66 号　邮政编码：110036）

印 刷 者：抚顺光辉彩色广告印刷有限公司

发 行 者：辽宁大学出版社

幅面尺寸：148mm×210mm

印　　张：6.75

字　　数：170 千字

出版时间：2009 年 9 月第 1 版

印刷时间：2009 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑：刘　葵

封面设计：邹本忠　徐澄玥

责任校对：齐　月

书　　号：ISBN 978-7-5610-5898-5

定　　价：15.00 元

联系电话：024-86864613　　网　　址：http：//press. lnu. edu. cn

邮购热线：024-86830665　　电子邮件：lnupress@vip. 163. com

内容简介

本书简明介绍《实变函数论》的主要内容和主要的思想与方法,并为该课程的教学提供适当的例题和习题及其解答.全书共分七章:导言;集合;n 维欧氏空间;测度论;可测函数;积分论;有界变差函数与绝对连续函数.除导言外,每章均包含内容与选讲、例题选讲和习题与解答三部分内容.

本书可作为学习《实变函数论》的学生们的参考书,也可作为讲授该课程的青年教师们的教学参考书.此外,本书还可以作为参加该课程研究生入学考试的考生们的复习资料.

前 言

实变函数论是为了克服黎曼(Riemann)积分理论的缺陷而创立的一种新的积分理论,其基础是集合论与测度论,它是大学数学系与理工科高年级本科生或低年级的研究生必须掌握的一门现代数学的基础课程.但是,由于这门课程比较抽象,对于大多数学生来说,学习这门课程都有一定难度.特别是,近年来我院学生普遍感到现行的《实变函数论》教材学习起来都比较困难.为了更好地完成我院本科生《实变函数论》课程的教学任务,我们根据多年使用程其襄等所编的《实变函数与泛函分析基础》进行教学的经验编写了这本《实变函数论教与学》.其目的主要是帮助我院学生简明地掌握好该课程的主要内容和主要的思想与方法.除导言外,书中各章均分为"内容与选讲"、"例题选讲"和"习题与解答"三部分.其中,第一部分以串讲的形式给出本课程的主要学习内容和部分附加讲解及辅导内容,以供师生们在教学中参考使用.关于我们在这部分所给出的主要内容的更详细与深刻的讲解请参考程其襄等所编的《实变函数与泛函分析基础》,或其他有关教材.第二、三两部分给出一些例题和习题及其解答,供学生们巩固和加深理解本课程的学习内容以

及提高有关能力使用.本书可作为各类《实变函数论》课程的学生们的参考书,也可以作为讲授该课程的青年教师们的教学参考书.

由于我们水平有限,写作时间仓促,书中的缺点和错误在所难免,我们热忱地欢迎读者们给予批评指正.

最后,我们衷心地感谢我院李德生教授对本书所进行的认真详细的审查;衷心地感谢我院领导及其他有关教师在本书的编写过程中所给予我们的支持与帮助!

程丛电　关洪岩

2009年8月

目 录

导 言

实变函数论是在深入地研究实函数的积分性质与微分性质的基础上发展起来的一门学科,其主要内容为 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分,几十年来,它一直被誉为跨入近代数学的门槛.学习这门课程不仅可以加深我们对于分析学的认识,还可以为我们进一步学习现代数学打下良好的基础.

下面我们通过对 Lebesgue 积分的形成及其意义作一简单的介绍,使大家对该课程有个初步的了解.

一、历史背景

自从牛顿(Newton)和莱布尼兹(Leibniz)创立微积分开始,由于其重要性,引起了许多数学家对它的进一步的研究.这种研究的进展,后来被以下述三个问题为代表的一系列问题所阻挡住了.

1. $F'(x)=f(x)$ 是否为 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+c$ 的充要条件.

2. 积分与极限的换序问题,即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

的条件问题.

3. G([0,1],D)的求积问题.这里,

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Q};\\ 0 & x\in(\mathbf{R}-\mathbf{Q}),\end{cases}$$

而 G([0,1],D)表示函数 $D(x)$关于[0,1]区间的下方图形(见第四章定义 1)或曲边梯形,**Q** 和 **R** 分别为有理数集和实数集.

这些障碍迫使着数学家们不得不进行新的开拓.

二、反思黎曼积分

由于上述三个代表问题都与积分有关,所以为了寻找新的思路,先对黎曼积分进行一番深入的思考是极其有益的.

设 $f(x)$是$[a,b]$上的黎曼可积函数,令

$$f^+(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant 0\\ 0, & f(x)<0;\end{cases}\quad f^-(x)=\begin{cases}-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ 0, & f(x)>0\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b f^+\,dx-\int_a^b f^-\,dx \qquad (1)\\ &= m_J G([a,b],f^+)-m_J G([a,b],f^-).\end{aligned}$$

这里,$m_J E$ 表示 E 的约当(Jordan)测度. 由此可见,函数 $f(x)$的可积性及其值是由 $G([a,b],f^+)$和 $G([a,b],f^-)$的约当测度决定的. 也就是说,在一定意义上讲,可积性是由测度决定的,有什么样的测度就有什么样的积分. 这样,我们就找到了积分的"根源"——测度(或度量).

思考问题 设 $A=\{(x,y)\mid x,y\in(\mathbf{Q}\cap[0,1])\}$,$B=[0,1]\times[0,1]-A$,试考虑 A 与 B 的约当测度.

三、Lebesgue 测度的建立

由上可知,黎曼积分是在 Jordan 测度的基础上建立起来的,那么我们可否建立一种新的测度使其克服约当测度的弱点,从而在其上建立一种新的积分使其优越于黎曼积分,为我们解决上述

的三个代表问题找到突破口呢？Lebesgue(1875—1941)完成了这项任务."1902 年他在《积分、长度与面积》的论文中所阐明的思想成为古典分析过渡到近代分析的转折点. Lebesgue 积分理论不仅蕴涵了 Riemann 积分所达到的成果,而且还在较大程度上克服了后者的局限性. 在勒贝格以后,还有许多数学家,如 Riesz(1880—1956)、Denjoy(1884—不详)、Radon(1887—1956)都对积分理论的进一步发展作出了重要贡献."(见[1])这些早期工作由后来的数学家们不断地改进,我们今天所要学习的就是这种经过了改进后的 Lebesgue 积分理论,其大致如下:

1. 建立一种新的测度——Lebesgue 测度.

2. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实函数. 当 $mG([a,b],f^+)$ 和 $mG([a,b],f^-)$ 都存在时,通过将(1)式中的 $m_J G([a,b],f^+)$ 和 $m_J([a,b],f^-)$ 分别地改换为 $mG([a,b],f^+)$ 和 $mG([a,b],f^-)$ 来定义一种新的积分——Lebesgue 积分.

四、Lebesgue 积分的意义

Lebesgue 积分不仅克服了黎曼积分的弱点,成功地解决了上述的三个代表问题,扫除了阻挡分析学进步的障碍,而且还提供了一些宝贵的数学思想和方法,为许多数学分支的发展奠定了基础.

练习题

1. 举例说明存在非单调且具有无限多个间断点的可积函数,并证明其可积性.

解 考虑黎曼函数,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q},\ x=\dfrac{p}{q},\ p \text{ 与 } q \text{ 互素},\ q>p,\\ 0,\ x=0,1 \text{ 以及}(0,1)\text{内的无理数}.\end{cases}$$

显然有 $f(x)$ 为非单调且在 $(0,1)$ 内的有理点处间断,但 $f(x)$

在[0,1]上可积,且 $\int_0^1 f(x)\,dx=0$.

下证其可积性.

任给 $\varepsilon>0$,在[0,1]内使得$\frac{1}{q}>\frac{\varepsilon}{2}$的有理点$\frac{p}{q}$只有有限个,设它们为 $r_1,r_2,\cdots r_k$. 现对[0,1]作分割 $T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$,使 $\|T\|<\frac{\varepsilon}{2k}$,并把 T 中所有小区间分为 $\{\Delta_i'\mid i=1,2,\cdots,m\}$和 $\{\Delta_i''\mid i=1,2,\cdots,n-m\}$两类,其中$\{\Delta_i'\}$为含有$\{r_i\mid i=1,2,\cdots,k\}$中点的所有小区间,这类小区间的个数 $m\leqslant 2k$(当所有 r_i 恰好是 T 的分割点时才有 $m=2k$);而$\{\Delta_i''\}$为 T 中所有其余不含$\{r_i\}$中点的小区间. 由于f在 Δ_i'上的振幅 $\omega_i'\leqslant\frac{1}{2}$,于是

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i'\Delta x_i'\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\Delta x_i'\leqslant\frac{1}{2}\cdot 2k\,\|T\|<\frac{\varepsilon}{2};$$

而f在 Δ_i''上的振幅 $\omega_i''\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$,于是$\sum\limits_{i=1}^{n-m}\omega_i''\Delta x_i''\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{i=1}^{n-m}\Delta x_i''\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 把这两部分合起来,便证得$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i'\Delta x_i'+\sum\limits_{i=1}^{n-m}\omega_i''\Delta x_i''<\varepsilon$,即$f(x)$在[0,1]上可积,并且当取中间点 ξ_i 全为无理点时,使得$f(\xi_i)=0$,从而 $\int_0^1 f(x)\,dx=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=0$. 解毕.

2. 举例说明

(1)存在没有原函数但黎曼可积的函数;

(2)存在有原函数但不黎曼可积的函数.

解 (1)令 $f(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

显然$f(x)$在[-1,1]上黎曼可积(因其为单调函数),但无原函数. 事实上,若$f(x)$在[-1,1]上有原函数 $F(x)$,即 $F'(x)=f(x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$,则依据 Darboux 定理,$F'(x)$应取得 $F'(-1)=0$

与$F'(1)=1$之间的每一个值,即$f(x)$应取得$f(-1)=0$与$f(1)=1$之间每一个值,这与$f(x)$的定义矛盾,故$f(x)$在$[-1,1]$上没有原函数.

(2) 令$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$

则f在$[-1,1]$间的每一点x处都有有限导数:

$$g(x)=f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

因此,函数$g(x)$有原函数$f(x)$,但是由于$g(x)$在$[-1,1]$上无界,故在$[-1,1]$上不黎曼可积(黎曼可积的必要条件是函数有界).解毕.

3. 举例说明函数列一致收敛是积分与极限可换序的非必要条件.

解 令$f_n(x)=x^n(0\leqslant x\leqslant 1)$,它是点收敛而不是一致收敛于

$$f(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

的,但仍有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=0=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx.$$

解毕.

第一章 集 合

内容与选讲

§1. 基础知识

定理 1 (1)$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$ (交换律);

(2)$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ (结合律);

(3)$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha)$(分配律);

(4)$A\cap A=A$, $A\cup A=A$.

注 1 (3)中的Λ叫做指标集,我们可以通过下面的几个实例来理解它的含义.

①设 $A_1=\{a,b,c\}$, $A_2=\{a,b,d\}$, $A_3=\{a,b,e\}$, $\Lambda=\{1,2,3\}$,则

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=A_1\cup A_2\cup A_3=\{a,b,c,d,e\}.$$

②设$A_1=[0,1]$, $A_2=[0,2]$,…, $A_n=[0,n]$,…, $\Lambda=\mathbf{N}^+$,则

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\underline{[0,+\infty)}.$$

③设$A_\alpha=[0,\alpha)$,$\alpha>0$, $\Lambda=\mathbf{R}^+$,则

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\underline{[0,+\infty)}.$$

定理 2 (1)$(A\cap B)\subset A\subset(A\cup B)$;

(2)若 $A_\alpha \subset B_\alpha, \alpha \in \Lambda$,则 $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$, $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \subset \bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$.

设 $S \supset A$,则 $(S-A)$(或 $S \backslash A$)表示 A 关于 S 的余集,记为$\complement_S A$,当没有必要指出 S 时可以简单地记为$\complement A$.

定理3 (1)$\complement_S S=\varnothing, \complement_S \varnothing=S$;

(2)$A \cup \complement_S A=S, A \cap \complement_S A=\varnothing$;

(3)$\complement_S(\complement_S A)=A$;

(4)$A \backslash B=A \cap \complement_S B$;

(5)若 $A \subset B$,则$\complement_S A \supset \complement_S B$;

(6)$\complement_S(A \cup B)=\complement_S A \cap \complement_S B, \complement_S(A \cap B)=\complement_S A \cup \complement_S B$,这两个关系式可分别地推广为:

$$\complement_S\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \complement_S A_\alpha, \tag{1}$$

$$\complement_S\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \complement_S A_\alpha. \tag{2}$$

该定理中的(6)称为德摩根(De Morgan)公式.

关于德摩根公式的证明

关于$\complement_S\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \complement_S A_\alpha$ 的证明见[2],这里只证明.

$$\complement_S\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \complement_S A_\alpha.$$

设 $x \in \complement_S\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)$,则 $x \bar{\in}\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)$,即 $\forall \alpha \in \Lambda$ 都有 $x \bar{\in} A_\alpha$. 从而,$\forall \alpha \in \Lambda, x \in \complement_S A_\alpha$,因而 $x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \complement_S A_\alpha$. 这也就是说,

$$\complement_S\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) \subset\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \complement_S A_\alpha\right).$$

反之,设 $x \in\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \complement_S A_\alpha\right)$,则 $\forall \alpha \in \Lambda, x \in \complement_S A_\alpha$,即 $\forall \alpha \in \Lambda, x \bar{\in} A_\alpha$. 从而,$x \bar{\in}\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)$,因此,$x \in \complement_S\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)$. 这也就是说,

$$\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \complement_S A_\alpha\right) \subset \complement_S\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right).$$

综上,等式成立. 证毕.

注2 我们也可以根据$\complement_S\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \complement_S A_\alpha$,按照下面的方法来证明:$\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \complement_S A_\alpha\right)=\complement_S\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)$.

$\forall \alpha \in \Lambda$，令 $B_\alpha = \complement_S A_\alpha$，则 $A_\alpha = \complement_S B_\alpha$，且 $\complement_S(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \complement_S B_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$，即

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \complement_S A_\alpha = \complement_S(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha).$$

另外，本课程以后将经常地运用这一公式来处理问题，学习《实变函数论》一定要掌握好这一公式和学会使用这一公式.

注 3 我们把上述的证明式(1)的方法叫做"相等方法"，它是集合论中最基本的方法，也是《实变函数论》的基本方法，以后我们将经常地运用这一方法来证明问题. 运用这样的最基本的数学方法来认识问题和解决问题是《实变函数论》的一个显著的特点，正是由于这样的特点，本课程才能够做到既为学习现代数学打下良好的基础，又可以提高我们的数学能力.

单调集列 如果集列 $\{A_n\}$ 满足 $A_n \subset A_{n+1}$ ($A_n \supset A_{n+1}$)，$n \in \mathbf{N}^+$，则称 $\{A_n\}$ 为增加(减少)集列. 这两种集列统称为单调集列. 对于增加(减少)集列，以后我们用 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 来表示 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ($\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$).

例 1 $A_i = \{i\}$，$i = 1, 2, \cdots$，则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{1, 2, \cdots, n\}, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}.$$

例 2 设 $A_\alpha = \{x \mid \alpha - 1 < x \leqslant \alpha\}$，$\mathbf{R}$ 为全体实数，$\alpha \in \mathbf{R}$，则

$$\bigcup_{\alpha\in\mathbf{R}} A_\alpha = (-\infty, +\infty).$$

例 3 设 $A_i = \left\{x \,\middle|\, -1 + \dfrac{1}{i} \leqslant x \leqslant 1 - \dfrac{1}{i}\right\}$，$i = 1, 2, \cdots$，则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (-1, 1).$$

例 4 设 $A_i = \left\{x \,\middle|\, 0 \leqslant x < 1 + \dfrac{1}{i}\right\}$，$i = 1, 2, \cdots$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{x \,\middle|\, 0 \leqslant x < 1 + \frac{1}{n}\right\}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

例 5 设 $A_i = \left\{x \,\middle|\, i \leqslant x < i + \dfrac{3}{2}\right\}$，$i = 1, 2, \cdots$，则

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing.$$

例 6 设 $A_i = \left\{x \middle| -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i}\right\}, i = 1,2,\cdots$,则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{x \middle| -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}.$$

§2. 对等与基数

定义 1 设 A、B 是两个集合. 若存在 A 到 B 上的一个一一映射 φ,记为 $\varphi: A \xrightarrow{1-1} B$,则称 A 与 B 对等,记为 $A \sim B$. 为了方便,我们约定:$\varnothing \sim \varnothing$.

例 7 {正奇数全体}和{正偶数全体}对等.

例 8 {正整数全体} ~ {正偶数全体}.

例 9 $(0,1) \sim \mathbf{R}$.

例 10 $\mathbf{N} \sim \mathbf{Z}$(这里,$\mathbf{N}$ 为全体自然数;$\mathbf{Z}$ 为全体整数).

例 11 设 $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}, B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 2\}$,则 $A \sim B$.

注 4 (1)显然,有限集不能与其真子集对等. 从上面的例子我们看到,无限集是可以与其真子集对等的. 下面我们还将看到,这是无限集的一个本质的特征,即一个集合是无限集的充分必要条件是其对等于它的一个真子集.

(2)证明两个集合对等与寻找两个集合之间的一一映射是本课的主要方法之一,称为“对等”方法.

定理 4 对于任何集合 A、B、C,均有

(1)(反身性)$A \sim A$;

(2)(对称性)$A \sim B$,则 $B \sim A$;

(3)(传递性)$A \sim B, B \sim C$,则 $A \sim C$.

定理 5 设 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 为两集列,集列 $\{A_n\}$ 中任何两个集合不相交,集列 $\{B_n\}$ 中的集亦两两不相交,即 $A_{n'} \cap A_{n''} = \varnothing, B_{n'} \cap B_{n''}$