多元统计分析

郭福星 编著

DUOYUAN TONGJI FENXI

GUO FUXING BIANZHU

福建科学技术出版社

多元统计分析

郭福星 编著

福建科学技术出版社出版

目录

绪论 …… 1

第一章 多元正态分布 …… 8

§1.1 定义及其性质 …… 8
§1.2 条件分布与独立性 …… 17
§1.3 最大似然估计 …… 25
§1.4 多元线性回归方程 …… 32

第二章 抽样分布与假设检验 …… 36

§2.1 非中心的χ^2分布和F分布 …… 36
§2.2 维希特($Wishart$)分布 …… 39
§2.3 T^2统计量及其分布 …… 48
§2.4 Λ统计量及其分布 …… 60
§2.5 确定否定域的似然比准则 …… 68
§2.6 协方差阵的检验 …… 73
§2.7 独立性检验 …… 80

第三章 多元线性回归模型 …… 87

§3.1 线性回归模型 …… 88
§3.2 最小二乘估计 …… 92
§3.3 回归系数的假设检验 …… 101
§3.4 1－多逐步回归方法 …… 105

§ 3.5 岭回归及其k值的选择 ………………………… 114

第四章　线性判别模型 ………………………… 120

§ 4.1　*Bayes*判别准则 ………………………… 122
§ 4.2　附加信息的检验 ………………………… 126
§ 4.3　逐步判别的计算步骤 ………………………… 131
§ 4.4　距离判别方法 ………………………… 138
§ 4.5　*Fisher*线性判别式 ………………………… 143
§ 4.6　逐步*Fisher*判别方法 ………………………… 150

因子分析

第五章　主成分分析 ………………………… 158

§ 5.1　主成分分析的原理 ………………………… 158
§ 5.2　样品的排序问题 ………………………… 164

第六章　典型相关分析 ………………………… 169

§ 6.1　典型相关变量 ………………………… 169
§ 6.2　典型相关的计算步骤 ………………………… 173

第七章　聚类分析 ………………………… 176

§ 7.1　R型(指标)系统聚类法 ………………………… 176
§ 7.2　Q型(样品)系统聚类法 ………………………… 180
§ 7.3　动态聚类法 ………………………… 184
§ 7.4　聚类数k的选择方法 ………………………… 188

第八章　矩阵代数补充知识 ······ 193

§8.1　分块矩阵的四块求逆公式 ······ 193
§8.2　矩阵的平方根 ······ 197
§8.3　投影与投影矩阵 ······ 199
§8.4　对称阵的谱分解 ······ 205
§8.5　减号广义逆 ······ 209
§8.6　特征根的极值性质 ······ 210
§8.7　矩阵的内积与叉积 ······ 213
§8.8　矩阵的(i,j)消去变换 ······ 216
§8.9　同时对角化与相对特征根 ······ 218

附　表 ······ 221

1. 相关系数检验表 ······ 221
2. χ^2检验的临界值表 ······ 222
3. t检验的临界值表 ······ 223
4. F检验的临界值表($\alpha=0.05$) ······ 224
5. F检验的临界值表($\alpha=0.01$) ······ 224

编后说明 ······ 228

术语：样本
统计量：不含未知参数 样本函数
eg：样本均值 $\overline{X}$
方差
建立在正态分布基础上
⟶ χ^2, t, F

绪　论

《统计分析》课程的特点是研究如何利用随机样本资料的数据矩阵

$$\underset{nm}{X}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} x'_{(1)} \\ x'_{(2)} \\ \vdots \\ x'_{(n)} \end{bmatrix} \hat{=} (x_1, x_2, \cdots, x_m), \quad (1.1)$$

对所关心的问题作出精确的、可靠的推断与预测①. 因此，所采集的随机数据矩阵 X 是研究对象的基础. 其中 n 维向量②

$$x_j=\begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

称为第 j（j＝1，2，…,m）个指标(或因子)；式(1.2)表示对第 j 个指标的 n 次观测值. 而 m 维向量

$$x'_{(i)}=(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}) \tag{1.3}$$

①记号 $\hat{=}$ 表示该符号左边的内容由右边的符号表示,也可理解为定义.

②本书的向量符号不特别加上箭号或粗体字,这会给书写带来方便. 其意义可由上、下文的交代而定. 这个说明完全适用于向量与矩阵记号的区分.

称为第 i ($i=1, 2, \cdots, n$) 个样品；式(1.3)表示对 m 个指标的第 i 次观测值．数据 X 称为 m 维总体中容量为 n 的样本．每个样本由 n 个样品组成；每个样品有 m 个指标．本课程研究的主要问题有：

第一．怎样根据抽取的庞杂的随机数据矩阵 X 所蕴含的信息来推断总体中每个指标的数学期望 μ_j、方差 σ_j^2 以及分析诸变量间的关系、相依性等其它一些随机变量的特征数．

由X可以求出每个指标的样本均值为

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{kj}, \qquad (j=1,2,\cdots,m). \tag{1.4}$$

并用$\bar{x}_j$ 估计总体的第 j 个指标的数学期望 μ_j．进而可计算各个指标的样本方差为

$$S_j^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{kj}-\bar{x}_j)^2, \qquad (j=1,2,\cdots,m) \tag{1.5}$$

并用它来估计总体的第 j 个指标的方差 σ_j^2．当 n 较小时，常用自由度 $n-1$ 替代 n，即统计量

$$S_j^{\star 2} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_{kj}-\bar{x}_j)^2$$

为σ_j^2的无偏估计.

为刻划两个指标间的线性相关性，就要计算指标 x_i 与 x_j 的协方差：

$$s_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{ki}-\bar{x}_i)(x_{kj}-\bar{x}_j) = s_{ji}, \quad i,j=1,2,\cdots,m.$$

若把上式标准化，则得x_i与x_j的样本相关系数为:

$$\rho_{ij}=\frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}\ s_{jj}}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{ki}-\bar{x}_i)(x_{kj}-\bar{x}_j)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{ki}-\bar{x}_i)^2}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{kj}-\bar{x}_j)^2}}. \quad (1.6)$$

查相关系数检验表，则可推断x_i与x_j是否存在线性相关.

对 $i,j=1,2,\cdots,m$, s_{ij} 组成 m 阶样本协方差阵 $S=(s_{ij})$; ρ_{ij} 组成 m 阶样本相关阵 $R=(\rho_{ij})$.

为要利用上述及其它统计量来估计或推断总体的特征，必须研究与估计（或推断）对象有关的统计量的分布．比如在 $m=1$ 的情况下，作为研究统计量分布的基础是 χ^2 统计量，t 统计量及 F 统计量．由于今后经常要用到它，并在多元情况下要给予推广，借此机会重提一下，以便引起读者的注意与回顾．

1． 设相互独立的随机变量 $x_i\sim N(0,\ 1)$，$(i=1,2,\cdots,n)$ 则统计量（遵从自由度为 n 的 χ^2 分布）

$$\chi_n^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2\ \sim\chi^2(n)\quad . \qquad (1.8)$$

若 $x_i\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{x_k-\mu}{\sigma})^2\ \sim\chi^2(n)$. 当 $m>1$ 时，我们要问：m 阶随机矩阵 $\sum\limits_{k=1}^{n}x_{(k)}.x'_{(k)}$ 遵从什么分布？这就涉及推广 χ^2 分布的问题．我们将在 §2.2 中讨论．

2． 设随机变量 $\xi\sim N(0,1)$，$\eta\sim\chi^2(n)$，且 ξ 与 η 相互独立，则统计量（遵从自由度为 n 的 t 分布）

$$T=\frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n}}}\sim t(n). \tag{1.9}$$

如果 $x_i \sim N(\mu,\ \sigma^2)$，$\sigma^2$ 已知．则由一元统计分析的理论知道，可用子样的均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

来估计μ. 且已知统计量$\bar{x}\sim N(\mu,\ \sigma^2/n)$.

同样，若总体的方差σ^2未知，则可选用子样方差

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2$$

来估计σ^2. 由于

$$y=\frac{nS^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1),$$

由式(1.9)，有：

$$t=\frac{\bar{x}-\mu}{S}\sqrt{n-1}\sim t(n-1). \tag{1.10}$$

利用式(1.10)可以检验一元总体均值的各种问题.

当 $m>1$ 时，那么怎样由已知的样本数据矩阵 X 来估计总体的均值向量 μ 与协方差阵

$$V=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mm} \end{bmatrix}$$

呢？此时式(1,10)遵从什么分布？这就涉及推广 t 分布问题. 我们将在 § 2.3 中讨论.

3．设随机变量 $\xi\sim\chi^2(m)$，$\eta\sim\chi^2(n)$，且 ξ、η 相互独

立，则统计量（遵从自由度为 m，n 的 F 分布）

$$F=\frac{\frac{\xi}{m}}{\frac{\eta}{n}}=\frac{\xi}{\eta}\frac{n}{m}\sim F(m,n). \tag{1.11}$$

在一元情况下，统计量 F 是作为两个子样的方差比而出现的．因此，凡涉及检验方差比问题都可用 F 检验加以解决．若 $m>1$，那么怎样检验两个协方差阵是否相等，以及与其有关的其它问题呢？这就要涉及推广 F 统计量了．这个问题将在 §2.4 中讨论．

综合上述，作为多元统计分析的任务之一，就是要推广一元统计分析中的上述重要结果．因为所有这些结果是以随机变量的正态性为前提条件，所以多元分析的理论基础乃以随机向量满足正态分布这一条件为前提．上述内容将在本书的第一、二章叙述．

第二．在多元分析中，由于所抽取的 n 个样品中的每一个样品都含有 m 个因子变量值，这无疑增加了问题的复杂性．因此，设法用少数几个独立的新变量来描述 m 个相互依赖的因子的研究就形成了“主成分分析方法”（第五章）．

多重共线性

如果我们考虑的是关于 n 个样品（或 m 个因子）之间的归类问题，那么研究按观测对象的性质而分组的方法就形成了所谓的“Q 型聚类分析”（或“R 型聚类分析”）方法（第七章）．

当我们的兴趣是研究 m 个因子中的 p 个因子与 q 个因子（$p+q\leqslant m$）之间的依赖关系时，就要用到诸如“回归分析方法”（第三章）、“典型相关分析方法”（第六

章）以及与此类似的"判别分析方法"（第四章）.

……

所有这些方法，又构成本书的另一主要内容．在电子计算机得到广泛应用的今天，上述这些方法已全面地应用于工业、农业、经济学、医学、气候学以及社会学等等．因此，多元统计分析已成为在国民经济中有着广泛应用的最为活跃的数学分支之一．

读者在学习这些方法的同时，可以进一步应用与掌握计算机语言，并熟练操作计算机．如有可能，可结合实际课题，自编程序计算．本书所述的各种方法（包括线性代数）都编出配套的程序，读者在学习有关方法后，均可按相应的程序文件名自行计算与检验．配套程序的使用方法在书中都结合例子给以说明．对使用本书的读者，将提供该套软件的磁盘（只收工本费）．

有关线性代数的补充知识放在本书的最后一章．为便于读者回顾与应用，可穿插于正文的适当章节进行教学．下面提供一个可选择的教学顺序：§1.1（后讲§8.1）、§1.2（§8.2）、§1.4（§8.3、§8.4）、§3.2（§8.5、§8.6、§8.7）、§3.3（§8.8）、§4.4（§8.9）.

习　题

1. 对因子变量 x_1、x_2、x_3 做五次观测，得样本数据为：

x_1:	9	2	6	5	8
x_2:	12	8	6	4	10
x_3:	3	4	0	2	1

SPSS

$i,j=1,2,3$

$S=(\hat{s}_{ij})$　$R=(\rho_{ij})$

试计算$\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)'$，样本协方差阵$S$及相关矩阵$R$.

2. 设样本协方差阵 $S=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mm} \end{bmatrix}$，对称矩阵

相关矩阵为$R=(\rho_{ij})$，其中$\rho_{ij}=\dfrac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}}\sqrt{s_{jj}}}$，令

$$S_{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix} \sqrt{s_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{s_{22}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{s_{mm}} \end{bmatrix}, \tag{1.12}$$

试证

$$S_{\frac{1}{2}}RS_{\frac{1}{2}}=S. \tag{1.13}$$

即

$$R=(S_{\frac{1}{2}})^{-1}S(S_{\frac{1}{2}})^{-1}. \tag{1.14}$$

设$S=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 25 \end{bmatrix}$，试利用式(1.14)，求$R$.

3. 设相互独立的样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 取自 $x\sim N(\mu,\sigma^2)$. $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$. 试证：$\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\bar{x}-\mu)'=0$.

4. 为了弄清某产品的性能，今抽取 10 个样品，每个测了三项指标 x_1，x_2 及 x_3 的数据如下：

x_1:	65	70	70	69	66	67	68	72	66	68
x_2:	45	45	48	46	50	46	47	43	47	48
x_3:	27.6	30.7	31.8	32.6	31.0	31.3	37.0	33.6	33.1	34.2

试求样本均值向量，样本协方差阵及相关矩阵.

第一章　多元正态分布

在绪论中已经指出，本书所介绍的方法几乎都假定其样本数据来自正态分布的总体，这除了理论上易于处理外，实际应用中多数情况都可把它作为真实总体的分布．这由概率论的中心极限定理得以保证．

§1.1　定义及其性质

在一元正态分布中，$\xi \sim N(0,1)$ 系指随机变量 ξ 遵从标准正态分布，它的概率密度函数为：

$$f(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \tag{1.1.1}$$

其特征函数为

$$\Phi(\tau)=\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right). \tag{1.1.2}$$

若$x=\mu+\sigma\xi$，则$x\sim N(\mu,\sigma^2)$，其密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \tag{1.1.3}$$

特征函数为

$$\Phi(t)=\exp\left(it\mu-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right). \tag{1.1.4}$$

其中x的数学期望$E(x)=\mu$,方差$V(x)=\sigma^2$.

式（1.1.3）中的

$$(\frac{x-\mu}{\sigma})^2=(x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu) \tag{1.1.5}$$

表示以标准方差为单位，从点x到μ的平方距离.

若$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)'$的数学期望记为

$$E(x)=(E(x_1),\cdots,E(x_m))'=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)'=\mu. \tag{1.1.6}$$

协方差阵记为:

$$V(x)=\begin{bmatrix} V(x_1) & \mathrm{cov}(x_1,x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_1,x_m) \\ \mathrm{cov}(x_2,x_1) & V(x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_2,x_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{cov}(x_m,x_1) & \mathrm{cov}(x_m,x_2) & \cdots & V(x_m) \end{bmatrix}$$

$$=E((x-E(x))(x-E(x))')=\mathrm{cov}(x,x)\hat{=}V. \tag{1.1.7}$$

这里V为m阶实对称方阵.

类似于式(1.1.5)，二次型

$$(x-\mu)'V^{-1}(x-\mu) \tag{1.1.8}$$

表示x到μ的广义距离(见定义4.4.1).

定义 1.1.1 设 m 元随机向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)'$ 的密度函数为

$$f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m|V|}}\exp(-\frac{(x-\mu)'V^{-1}(x-\mu)}{2}),$$

则称x遵从m元正态分布. 记为$N_m(\mu,\ V)$. 并有:

$$E(x)=\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)';$$

$$V(x)=V=(v_{ij})>O.$$ ①

---

①本书的O表示元素为0的矩阵.

其中$v_{ij}=\mathrm{cov}(x_i, x_j)=E(x_i-Ex_i)(x_j-Ex_j)$.

为把定义推广到一般非负定对称阵的情况，可用特征函数来定义它.

定义1.1.2 设$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)'$，$V\geqslant O$，那么以

$$\Phi(t)=\exp(it'\mu-t'Vt/2)=E(e^{it'x}) \tag{1.1.9}$$

为其特征函数的分布函数，称为m元正态分布．其中$t=(t_1,t_2,\cdots,t_m)'$为参数向量.

现在叙述更一般的定义如下：

定义 1.1.3 设相互独立的随机变量$x_i\sim N(0,1)$，$(i=1,2,\cdots,n)$，则线性函数

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}\hat{=}Ax+\mu$$

称为m维正态随机向量．y的分布函数或分布密度都简称为m元（或m维）正态分布．记为$y\sim N_m(\mu,AA')$，或$y\sim N_m(\mu, V)$．其中$V=AA'\geqslant O$.

由定义 1.1.3 立即可知，若

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\sim N_n(O, I_n)$$

则有下述性质：

性质1 设$\underset{m1}{y}\sim N_m(\mu,V)$，$\underset{l1}{z}=\underset{lm}{B}y+\underset{l1}{d}$，则

$$z\sim N_l(B\mu+d, BVB'). \tag{1.1.10}$$

证明 $z=B(Ax+\mu)+d=BAx+B\mu+d$.

依定义 1.1.3 即得结果．性质 1 表明：正态随机向量经线性变换后仍为正态分布.

△ 性质2　设$y \sim N_m\ (\mu,\ V)$，令 取一部分

$$\underset{m1}{y} = \begin{bmatrix} \underset{r1}{y^{(1)}} \\ y^{(2)} \end{bmatrix},\quad \mu = \begin{bmatrix} \underset{r1}{\mu^{(1)}} \\ \mu^{(2)} \end{bmatrix},\quad V = AA' = \begin{bmatrix} \underset{rr}{V_{11}} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}.$$

r维　方阵

则有

$$y^{(1)} \sim N_r(\mu^{(1)}, V_{11});\quad y^{(2)} \sim N_{m-r}(\mu^{(2)}, V_{22}). \qquad (1.1.11)$$

证明　取$z = y^{(1)} = [I_r \quad O]\ y \hat{=} By$及$d = O$,则由 By+d
$y \sim N_m(\mu,\ V)$, 有$B\mu + d = \mu^{(1)}$, 从而

$$BVB' = [I_r \quad O]\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix} = V_{11}.$$

依性质1, 即得$y^{(1)} \sim N_r\ (\mu^{(1)}, V_{11})$.

同理可取$z = y^{(2)} = [O \quad I_{m-r}]\ y$, 则得

$$y^{(2)} \sim N_{m-r}\ (\mu^{(2)}, V_{22}).$$

边缘分布

性质 2 表明：正态随机变量的边际分布仍为正态分布 .
下节还将证明:　(维数减少)

$y^{(1)}$ 与 $y^{(2)}$ 相互独立的充要条件为 $V_{12} = O$. 从定义 1.1.3 出发，可以推出定义 1.1.1 及定义 1.1.2, 从而给出这些定义的等价性 .

定理1.1.1　设$y \sim N_m(\mu,\ AA')$, 则y的特征函数

$$\Phi_y(t) = \exp\ (it'\mu - t'AA't / 2)\ , \qquad (1.1.12)$$

其中$t = (t_1, t_2, \cdots, t_m)'$.

证明　依定义 1.1.3 知道，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ 且相互独立的 $x_i \sim N(0,1)$, 故有

$$\Phi_x(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp(-\frac{t_i^2}{2}) = \exp(-\frac{t't}{2}) = E(\exp(it'x)).$$

特征函数!

$$\Phi_y(t)=E(e^{it'y})=E(e^{it'(Ax+\mu)})$$

$$=\exp(it'\mu)E(\exp(it'Ax))=\exp(it'\mu)\Phi_x((t'A)')$$

$$=\exp(it'\mu-\frac{t'A(t'A)'}{2})=\exp(it'\mu-\frac{t'Vt}{2}).$$

定理 1.1.2　若 $y\sim N_m$（μ，V），且 $V>O$，则 y 的密度函数为

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m|V|}}\exp(-\frac{(y-\mu)'V^{-1}(y-\mu)}{2}).\quad(1.1.13)$$

证明　为了能从 $\underset{m1}{y}=\underset{mn}{A}\,\underset{n1}{x}+\underset{m1}{\mu}$ 中解出 $x=x(y_1,\cdots,y_m)$

$(i=1,2,\cdots,m；\ m\leqslant n)$.

$$令\ \underset{n1}{U}=\underset{nn}{T}\,\underset{n1}{x}=\begin{bmatrix}\underset{mn}{A}\\B\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}u^{(1)}\\u^{(2)}\end{bmatrix},$$

且 $AB'=O$ 及 $BB'=I_{n-m}$，从而有：

$dU=|T|\mathrm{d}x$，或 $\mathrm{d}x=|T|^{-1}dU$. 为求 $|T|^{-1}$，只需注意

$$TT'=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & B'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V & O\\O & I_{n-m}\end{bmatrix}$$

$\therefore |TT'|=|V|$，即：

$$|V|^{-\frac{1}{2}}=|TT'|^{-\frac{1}{2}}=(|T|.|T'|)^{-\frac{1}{2}}=|T|^{-\frac{1}{2}}|T'|^{-\frac{1}{2}}=|T|^{-1}.$$

又因为 $x=T^{-1}U$，所以 $x'x=U'(TT')^{-1}U$. 从而得

$x'x=u^{(1)\prime}V^{-1}u^{(1)}+u^{(2)\prime}u^{(2)}$，因此

P（$y_1<a_1,\cdots y_m<a_m$）

$$=\underset{y=Ax+\mu<a}{\int\cdots\cdots\int}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n\exp(-\frac{x'x}{2})\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$