河南省小學教師進修學習材料

算術

北京函授師範學校編

[illegible]

第二分册

第一八週 —— 第二七週

河南省小學教師進修學習材料

算　術

第二分冊

北京函授師範學校編

河南人民出版社

一九五四·三·開封

河南省小學教師進修學習材料
算術（第二分册：第一八週——第二七週）

北京函授師範學校編
河南人民出版社出版
（開封市中山路北段八十六號）
新華書店河南分店內部發行
河南省營第一印刷廠印刷

編號：（汴）85　一九五四年三月初版
印數：1--18 041　一九五四年三月第一次印刷

河南省小學教師進修學習材料

算術

第二分冊 目錄

第一八週——第一九週

第四章 分數

第二〇週——第二二週

第二三週——第二四週

第二五週——第二七週

（第一八週——第一九週）

第四章　分　數

第一節　分數的基本概念

一　分數的定義

複名數算法中，每一個單位，都包含下一個低級單位與進率相同的倍數。換句話說，就是每一單位，都可以把它分成若干等份。例如1斤能分爲16兩，那麼，一兩就是一斤的十六分之一份；1日能分爲24時，一時也就是一日的二十四分之一份。

還有1公里相當於2市里，我們可以說，一市里就是一公里的二分之一份；又1公尺相當於3市尺，我們可以說，一市尺就是一公尺的三分之一份。

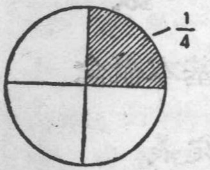
像這些三分之一份，可簡稱爲三分之一；二分之一份簡稱爲二分之一（卽是一半）；十六分之一份就簡稱爲十六分之一等等。

把一個單位（或整體）分成若干等份，其中的一份或數份的和，叫做分數。

被分爲若干等份的數目，叫分母；分數裏邊所含有的份數，叫分子。分母（在下面）與分子（在上面）之間，寫一橫線，叫分線。它的寫法是：

四分之一寫做$\frac{1}{4}$，

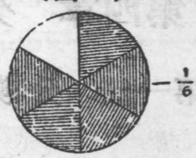
（圖一）



說明：把一個圓形，平均分爲4份，取其中的一份，就是$\frac{1}{4}$。

六分之五寫做$\frac{5}{6}$，

（圖二）



有斜道的部分，共是$\frac{5}{6}$。

說明：把圓形平均分爲6份，其中一份，是$\frac{1}{6}$，其中的5份，是$\frac{5}{6}$。

每一個分數，不僅可以看成一個單位（或整體）的若干等份的和，也可以把它看成是某數的幾分之一。

例如：1尺的$\frac{1}{10}$是1寸；　7尺的$\frac{1}{10}$就是7寸；

要是1尺的$\frac{7}{10}$，因爲它是7個$\frac{1}{10}$的和，所以也是7寸。

分數$\frac{7}{10}$，旣然是1的$\frac{7}{10}$，也是7的$\frac{1}{10}$。

我們從上面的例子，可以類推到其他分數，也含有這樣的意思。如分數$\frac{2}{3}$，可以說它是1的$\frac{2}{3}$，也可以說它是2的$\frac{1}{3}$。如下圖：

（圖三）

（圖四）

說　明：

圖三有斜道的是一個整體的$\frac{2}{3}$，圖四有斜道的是兩個整體的$\frac{1}{3}$；實際也等於一個整體的$\frac{2}{3}$。這就是同一數量，而有兩樣的說法。

根據圖四看來，$\frac{2}{3}$就是把兩個整體分做三份，取其中一份的意思，所以分數和除法的式子相通。分子如同被除數，分母如同除數，分線如同除號，分數除得的數，叫做分數值，如同除法的商數。茲將分數和除式的關係，列表如下：

算　法	名　稱　對　照			
分　數	分　子	『——』	分　母	分數值
除　式	被除數	『÷』	除　數	商　數

被除數

例如：$\frac{2}{5}$ 和 $2 \div 5$ 是一樣的意思。

除號

除數

因此，分數和除法，是同一問題的兩種表現形式。

名數問題 有名數的分數和不名數的分數，有根本的不同，各學員對於這一點，應該有明確的認識。

1.分數後面帶有單位名稱的，叫<u>名分數</u>。它是確定數量的分數，就是以分數形式表示一個數量的。

例如：$\frac{1}{4}$斤，讀做「四分之一斤」，即表示把一斤分成四份，它佔一份。——實際一斤是十六兩，它的四分之一，就是四兩。

又如$\frac{3}{5}$石，讀做五分之三石，即表示把一石分成五份，它佔三份。——實際一石是十斗，它的五分之一是二斗，三個五分之一是六斗；或把三石分成五份，也是六斗。

2.不帶單位名稱的分數，叫<u>不名分數</u>。它沒有確定的具體數量，是一種比率的性質，也就是部分對整體的相互關係。

例如：$\frac{1}{2}$，是廣泛的指着某一件東西或數目的二分之一，就是把它分成二份，佔去一份，——即是一半。總的數量如果多，它代表的數量就多；總的數量如果少，它代表的數量也少（如1000元的$\frac{1}{2}$，就是500元，400元

的$\frac{1}{2}$，就是200元）。

所以對於應該是「名分數」的，决不可遺漏名數；應該是「不名分數」的，也不要隨便加註名數。

二　分數的種類和互變

按分數的形式或數值的不同，分爲下列三種：

1.眞分數　分數的分母，是代表整體的，分子是代表部分的。分數本來是整體的一部分，它的值應小於1。因此，分母大分子小的分數，與分數的定義相符合，所以叫做眞分數。如：$\frac{1}{3}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{7}{12}$……。

2.假分數　這一種分數的形式和數值，都與眞分數相反。形式方面，它的分子有大於分母或等於分母的；數值方面，有大於1或等於1的。因爲它具有分數的形式，但與分數的定義，不很切合，所以叫做假分數。如$\frac{5}{3}$，就是5個$\frac{1}{3}$的和，它的值就大於1；又如$\frac{4}{4}$，就是把一個單位分成四份，它佔去四份，它的值就等於1。

3.帶分數　在整數後面帶有分數部分的形式，也就是整數與眞分數合併而成的分數，叫做帶分數。它既然有整數部分，那麼，它的值，肯定要大於1。如$3\frac{2}{5}$讀做三又五分之二。

任何整數，都可以化爲假分數，它的方法有兩樣：

1.預定分母的　例如把1化爲以5爲分母的分數形式，就要先看幾個五分之一能成爲整數1，當然是五個了。它的式子是：

$$1=\frac{1\times 5}{5}=\frac{5}{5}$$

由此可知，把整數1化爲預定分母的假分數時，就是它的分子與分母數目相同。

又如把4化爲以6爲分母的分數形式，我們知道1內含有6個六分之一，所以在4內含有$6\times 4=24$個六分之一，這就說明：

$$4=\frac{6\times 4}{6}=\frac{24}{6}$$

法則：化整數爲預定分母的假分數時，用分母乘整數所得的積做分子，用預定的分母做分母。

2.不預定分母的　例如把7化爲不預定分母的假分數，我們根據分數與除法相通的關係，知道「以1除任何數，它的商仍爲原數」，所以就應該以1爲分母，仍以7爲分子。因爲一分之一就是整數1，一分之七就代表整數7。用式子表示：

$$7=\frac{1\times 7}{1}=\frac{7}{1}$$

法則：化整數爲不預定分母的假分數時，就以原來的整數做分子，以1爲分母。

假分數的值，既然是大於1或等於1，那麼，它的本身，必包含有整數在內，為了把它的值明確表示出來，就有把假分數變為帶分數或整數的必要。

1.假分數化帶分數　就是要分析假分數裏所含有的整數和真分數。例如化$\frac{23}{7}$為帶分數，因為1可以化為$\frac{7}{7}$，那麼在$\frac{23}{7}$內含有多少個$\frac{7}{7}$，就是含有多少個1。換句話說，分子含有分母的幾倍，就是含有整數幾。所餘的就是真分數部分，把整數和真分數合併起來，就成為帶分數了。還可以這樣列式：

$$\frac{23}{7}=23\div7=3\frac{2}{7}\text{（因}23\div7=3\cdots\cdots2\text{）}$$

上式是把$\frac{23}{7}$，分析成3個整數一（即整數3），和2個七分之一（即真分數$\frac{2}{7}$）的帶分數形式，也就是$3+\frac{2}{7}$的一種表示。

同樣的：　$\frac{85}{22}=85\div22=3\frac{19}{22}$

因$85\div22=3\cdots\cdots19$，同時應知$3\frac{19}{22}$是表示$3+\frac{19}{22}$。

2.假分數化整數　就是看假分數內含有幾個整數1。它和假分數化帶分數的不同點，就是它只含有整數，沒有真分數部分，方法比較更簡單些。

例如：$\frac{4}{4}=4\div4=1$ 或：$\frac{15}{3}=15\div3=5$

法則：把假分數化爲帶分數或整數時，用分母除分子，所得的商是帶分數的整數部分，餘數是帶分數分數部分的分子，以原分母爲分母；如果適能整除，就是可變爲整數。

帶分數的值，固然對整數部分和分數部分，有明確的表示。但有時在分數乘、除法的運算上，必須把它的整數和分數部分，合併計算，才較爲簡便，所以有把帶分數變爲假分數的必要。

帶分數化假分數　就是把帶分數的整數部分和它的分數部分，一併合爲分數部分的一種方法。例如把帶分數 $3\frac{2}{5}$ 化爲假分數，就是要知道 3 個單位和 1 個單位的五分之一，共有多少個五分之一。因爲 1 個單位含有 5 個五分之一，在 3 個單位裏含有 $5\times3=15$——也就是有 15 個五分之一。所以 3 個單位和 $\frac{2}{5}$ 在一起，共有 $15+2=17$——也就是 17 個五分之一。它的式子這樣列法：

$$3\frac{2}{5}=\frac{5\times3+2}{5}=\frac{17}{5}$$

同樣的：

$$7\frac{3}{8}=\frac{8\times7+3}{8}=\frac{59}{8}$$

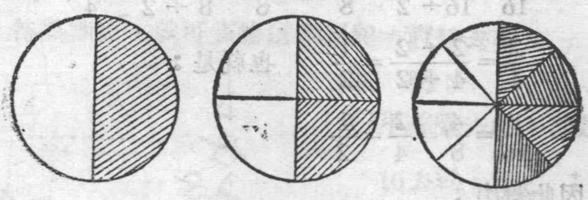
法則：化帶分數爲假分數時，把分母乘以整數，再

加分子，作爲新分子，以原分母爲分母。

三　擴分和約分

譬如一個餅，把它平均切爲兩塊，取它的一塊，就是取去一半，用分數表示就是$\frac{1}{2}$；如果平均切爲四塊，取它的兩塊，就是取去它的兩個$\frac{1}{4}$，也就是$\frac{2}{4}$；要是平均分爲八塊，取它的四塊，就是取去它的四個$\frac{1}{8}$，也就是$\frac{4}{8}$。如圖五：

（圖五）



$\frac{1}{2}$　　$\frac{2}{4}$（2個$\frac{1}{4}$）　　$\frac{4}{8}$（4個$\frac{1}{8}$）

這三個分數，數字雖然不同，而它的實質是一樣的，不論$\frac{2}{4}$或$\frac{4}{8}$，實際上都是整體的一半，所以它們的分數值是相等的。也就是：

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{8}{16}=\cdots\cdots$$

由第二個分數起始，每個分數依次是由於第一個分數的分子和分母，同時乘以相同的數：2、4、8……而得到的。也就是：

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times2}{2\times2}=\frac{1\times4}{2\times4}=\frac{1\times8}{2\times8}=\cdots\cdots$$

因此得出：

分數的分子和分母，同時增大相同的倍數，它的分數值不變的，叫做擴分。

上述擴分的道理，既是以同樣的數去乘分數的分子和分母，其值不變。那麼，相反的要把分數的分子和分母，除以同樣的數，它的分數值，當然還是相等的。

如：$\frac{8}{16}=\frac{8\div2}{16\div2}=\frac{4}{8}$　　$\frac{4}{8}=\frac{4\div2}{8\div2}=\frac{2}{4}$

$\frac{2}{4}=\frac{2\div2}{4\div2}=\frac{1}{2}$　　也就是：

$\frac{8}{16}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

因此得出：

分數的分子和分母，同時縮小相同的倍數，它的分數值不變的，叫做約分。

凡是能够約分的分數，它的分子和分母，一定是有公約數的（如$\frac{8}{12}$、$\frac{14}{21}$……）；如果分數的分子和分母，沒有公約數可去除它時，就不能約分$\left(如\frac{5}{9}、\frac{11}{20}\right)$……。

這種不能約分的分數，叫做最簡分數，也叫既約分數。

（註） 因爲凡數都能被1整除，所以公約數都是除1以外的數。

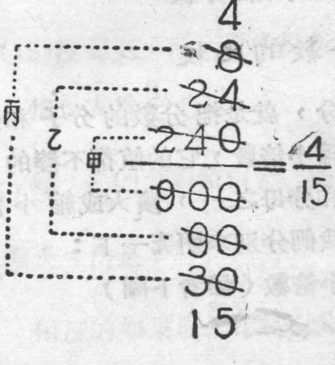
約分的方法有兩種：

1.屢次約分 用分子和分母的公約數去約它，約分後所得的分數，如果還能約時，仍用前法，一層層繼續再約，一直約成最簡分數爲止。

不過在初學約分時，可把公約數附註在分數上邊，作爲標記，以免約錯。

如：$\frac{\overset{10}{\smile}\,240}{900}=\frac{\overset{3}{\smile}\,24}{90}=\frac{\overset{2}{\smile}\,8}{30}=\frac{4}{15}$

待熟練後，就可省略這個標記，直接去約。



說　明：

㈠甲線畫去的，卽是用10去約，得$\frac{24}{90}$；

㈡乙線畫去的，卽是用3去約，得$\frac{8}{30}$；

㈢丙線畫去的，卽是用2去約，得$\frac{4}{15}$，卽是最簡分數。

2.完全約分 就是用分子和分母的最大公約數，把它一次約簡。

例如：約簡$\frac{36}{96}$

因爲96和36的最大公約數是12，

$$\therefore \quad \frac{36}{96}=\frac{36\div12}{96\div12}=\frac{3}{8}$$

這樣約分後，所得的就是最簡分數。因爲分子和分母的最大公約數，含有分子和分母的所有公約數，所以用它們的最大公約數約過以後，它的分子和分母，就不能再有公約數了。

約分在分數裏很是重要。因爲同一的分數値，若以複雜的形式表示它，對認識上容易模糊；若以簡單的形式去表示它，可以一目瞭然。所以在分數的各種算法中，所得的結果，必定要約爲最簡分數。

四 分數的比較

上段所述的擴分和約分，就是把分數的分子和分母，無論同時擴大倍數或縮小倍數，它的值都不變的。

但是要把分數的分子和分母之一，擴大或縮小倍數，分數値就要起變化。我們分別來硏究一下：

1. 分子的擴大或縮小倍數（參看下圖）