21世纪高等院校教材

概率论与数理统计

罗敏娜 主编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

概率论与数理统计

罗敏娜　主编

王　涛　吴志丹　张洪阳　耿　莹　副主编

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书是普通高等学校非数学专业的概率论与数理统计教材，全书共9章，主要内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、概率统计的应用，每章都有习题和自测题并配有答案，各章末均有本章小结，第9章除外.

本书可供高等院校工科、经济、管理、金融、旅游等专业的学生使用，也可作为自学考试、硕士研究生的考试参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/罗敏娜主编. —北京：科学出版社，2008
21世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-022913-7

Ⅰ.概… Ⅱ.罗… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第136456号

责任编辑：于俊杰 李晓鹏／责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠／封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年12月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008年12月第一次印刷 印张：15 1/2
印数：1—3 500 字数：289 000

定价：26.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

为适合 21 世纪普通高等院校学生对数学的需求, 多年来我校在教学改革方面进行了一定的探索, 参照最新颁发《全国硕士研究生入学统一考试大纲》的内容和要求, 编写概率论与数理统计这本教材. 在编写过程中, 尽量体现以下特点:

(1) 对基本概念、基本理论和重要定理注重其实际意义的解释说明, 力保知识的系统性和连贯性, 注重对解题方法的归纳, 对于复杂的定理只作简单介绍, 注重定理的实际应用.

(2) 教材中例题和习题尽量体现经济管理的特色, 由浅入深、循序渐进. 对一些有代表性的典型例题进行着重分析, 归纳出该类习题的解题方法和技巧, 使学生在以后的练习中 "有法可依".

(3) 结构清晰, 章末的小结将本章的主要知识点、教学重点和难点进行简明扼要的总结和归纳, 并附有知识体系图, 更好地帮助学生复习巩固整章的内容.

(4) 各章后面配备的习题分为两类: 第一类是基础练习题, 体现了教学的基本要求, 供学生平时练习和巩固; 第二类是自测题, 供学生进行一章的复习与检验. 书末给出了对应习题与自测题的参考答案, 供学生参考.

本书主要分为三部分. 第一部分为概率论, 是基础知识, 也是全书的重点, 它为数理统计的学习提供了必要的理论基础. 第二部分为数理统计, 主要介绍了数理统计的基本概念、参数估计、假设检验. 第三部分介绍概率统计的应用.

本书由王涛、吴志丹、张洪阳、耿莹、罗敏娜编写. 本书的排版由张洪阳、罗敏娜完成, 最后由罗敏娜审阅全书并定稿.

本书在编写过程中, 参考了众多的国内外教材, 科学出版社的领导和编辑对本书的编审和出版给予了热情的支持和帮助, 在此表示感谢!

由于编者水平有限, 加之时间仓促, 书中的疏漏和不妥之处在所难免, 恳请同行与广大读者不吝赐教.

编　者

2008 年 6 月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的学科. 为了用数学语言描述随机现象及其统计规律性, 该学科逐渐建立起了严格的概念体系和严密的逻辑结构.

本章将介绍这门学科的基本概念和专业术语, 为后面的学习打下基础. 主要内容包括: 随机事件的相关概念及事件的关系与运算; 概率的定义与性质; 3 种常见的概率模型 —— 古典概型、几何概型与伯努利概型; 5 个公式 —— 加法公式、条件概率公式、乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式; 事件之间的独立性.

1.1 随 机 事 件

在介绍随机事件之前, 先来了解随机现象及随机试验的相关概念.

1.1.1 随机现象及随机试验

在自然界与人类社会中发生的现象可以分为两类. 一类是**确定性现象**, 即在一定条件下, 必然发生或不发生的现象; 另一类是**不确定现象**, 即在观测之前无法预知其确切结果的现象, 也称为**随机现象**. 例如, 抛一枚硬币, 最终落到地上是一种确定性现象, 而落地后正面朝上还是反面朝上却是一种随机现象; 人的生命不论长短最终都要面临死亡是一种确定性现象, 而一个人寿命的长短却是一种随机现象. 概率论与数理统计这门学科正是以随机现象为主要研究对象的.

生活中, 人们每天都会面对大量的随机问题. 清晨起来关心今日气温的高低, 出门上班担心是否堵车, 购买彩票关心是否能中大奖, 投资股票却无法预知每日的收盘价格. 我们密切关注的这些问题都具有随机现象的典型特征, 那就是事先无法预知其确切结果.

事实上, 在个别试验中, 随机现象的结果虽然呈现出不确定性, 但是经多次重复试验或观察, 却可发现它仍然呈现出某种规律性, 这种规律性称为随机现象的**统计规律性**. 随机现象的统计规律性是在大量重复试验中体现出来的, 因此研究随机现象的最好方法就是大量的重复试验或重复观察.

定义 1　满足下列三个条件的试验称为**随机试验**:

(1) 试验在相同条件下可重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个, 但能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 每次试验前不能确定哪一个结果发生.

随机试验简称**试验**, 常用字母 $E, E_1, E_2, \cdots$ 表示.

例 1 下面的 4 个试验都是随机试验.

E_1: 掷一枚骰子, 观察出现的点数;

E_2: 先后抛两次硬币, 观察正面与反面出现的情况;

E_3: 记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人数;

E_4: 在一批灯泡中任意抽取一只, 测试它的寿命.

这 4 个试验均满足随机试验的三个条件, 而试验"记录 100 年后地球上的人口数量"却不是随机试验, 因为试验无法在相同的条件下重复进行.

1.1.2 样本空间

对于随机试验, 我们首先感兴趣的是可能出现的结果.

定义 2 随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**, 记作 Ω. 其中每一个可能的结果称为**样本点**, 记作 ω.

例 2 写出例 1 中 4 个随机试验的样本空间.

解

$$\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad \Omega_2 = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\},$$

$$\Omega_3 = \{0,1,2,\cdots\}, \quad \Omega_4 = \{t | t \geqslant 0\}.$$

其中, 随机试验 E_1 的样本空间是一维的, E_2 的样本空间是二维的, 它们的样本点个数为有限个, 称为**有限样本空间**; E_3, E_4 中的样本点个数为无限个, 称为**无限样本空间**. 又因为 E_3 中的样本点可以按一定顺序排列, 称其为**可列样本空间**.

1.1.3 随机事件

在随机试验中, 人们关心的往往只是某一类结果是否发生.

定义 3 一般地, 样本空间 Ω 的任意子集称为**随机事件**, 简称**事件**, 可用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示.

由于随机事件是样本点组成的集合, 因此常用列举法或描述法来表示. 例如, "掷出的点数小于 3"是试验 E_1 的一个事件, 可用描述法表示为 $A=\{$掷出的点数小于 3$\}$, 或用列举法表示为 $A=\{1,2\}$.

对于一个随机试验 E, 在每次试验中必然发生的事件, 称为 E 的**必然事件**; 在每次试验中都不发生的事件, 称为 E 的**不可能事件**, 因为不可能事件不包括试验 E 的任何一个可能结果, 所以用 $\varnothing$ 来表示. 样本空间中的每一个样本点组成的单点集合, 称为随机试验的一个**基本事件**.

例如, 在试验 E_1 中, "掷出的点数不超过 6"是必然事件, 这一事件所含的样本点与其样本空间 $\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$ 所含的样本点完全相同. 而事件"掷出的点数大于 7"是不可能事件. "掷出的点数是 6"是一个基本事件.

对于一个试验 E, 它的样本空间 Ω 是 E 的必然事件, $\varnothing$ 是不可能事件. 必然事件与不可能事件虽已无随机性可言, 但是在概率论中, 为了方便, 常把它们视为随机事件的极端情形.

在每次试验中, 若试验的结果包含在事件 A 中, 则称事件 A 发生. 例如, 在试验 E_1 中, 若事件 A 为 "掷出奇数点", 在一次投掷中, 当掷出的点数是 1, 3, 5 中的任意一个时, 称事件 A 发生, 也可把事件 A 表示为 $A=\{1, 3, 5\}$; 在试验 E_2 中, 设事件 $B=$\{(反, 反), (反, 正)\}, 则 B 表示第一枚硬币出现反面的事件.

例 3 在公路上随机抽查 8 辆汽车, 考察其中家庭私有车辆数, 则样本空间可表示为

$$\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

请将下列事件用列举法表示为集合的形式:

$A=$\{家庭私有车辆不超过 3 辆\}; $B=$\{有 2 辆或 3 辆家庭私有车\};

$C=$\{至少有 2 辆家庭私有车\}; $D=$\{有 4 至 8 辆家庭私有车\};

$E=$\{家庭私有车辆不少于 2 辆, 不多于 5 辆\};

$F=$\{家庭私有车辆多于 4 辆\}.

解 $A=\{0,1,2,3\}$; $B=\{2,3\}$; $C=\{2,3,4,5,6,7,8\}$;

$D=\{4,5,6,7,8\}$; $E=\{2,3,4,5\}$; $F=\{5,6,7,8\}$.

1.1.4 事件间的关系与运算

样本空间 Ω 是随机试验的所有可能结果 —— 即样本点 ω 的全体构成的集合, 而每一个样本点是该集合的一个元素. 一个事件包含若干样本点, 可以看作样本空间的子集. 因此事件间的关系和运算可以按集合间的关系和运算来处理.

下面探讨事件之间的关系与运算. 设试验 E 的样本空间为 Ω, $A,B,C,\cdots$ 和 $A_k(k=1,2,\cdots)$ 均是 Ω 的子集.

1. 事件间的关系与运算

1) 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 即 A 的每个样本点都是 B 的样本点, 则称事件 A**包含于**事件 B, 或称事件 B**包含**事件 A, 记为 $A\subset B$ 或者 $B\supset A$. 图 1.1 是其文氏图.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$, 即 A 与 B 含有相同的样本点, 则称事件 A 与事件 B 相等, 记为 $A=B$.

2) 互不相容事件 (互斥事件)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生, 即 A 与 B 没有公共样本点, 则称事件 A 与事件 B**互不相容**, 或称它们是**互斥事件**. 图 1.2 是其文氏图.

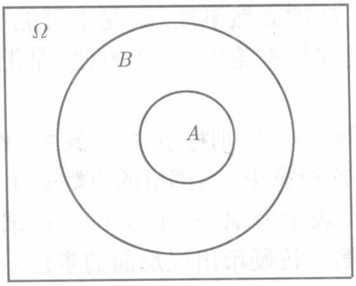

图 1.1

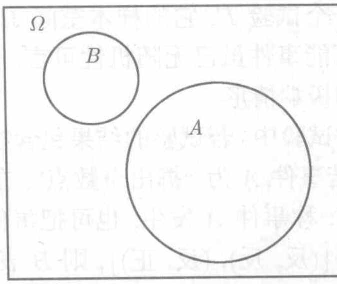

图 1.2

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的任意两个都互不相容, 则称这些事件**两两互不相容**.

3) 对立事件

"事件 A 不发生", 这一事件称为事件 A 的**对立事件或逆事件**, 记为 $\overline{A}$. 图 1.3 是其文氏图.

若事件 A, B 相互对立, 则 A, B 一定互不相容, 反之却不一定成立. 本节例 3 中, 事件 $A=\{0,1,2,3\}$, $D=\{4,5,6,7,8\}$, $F=\{5,6,7,8\}$, A 与 D 是互不相容且对立事件, 而 A 与 F 是互不相容事件但不是对立事件.

4) 事件的并 (或和)

" 事件 A 与事件 B 至少有一个发生" 这一事件称为事件 A 与事件 B 的**并**(或**和**), 记作 $A \bigcup B$(或 $A+B$). 事件 $A \bigcup B$ 发生意味着要么事件 A 发生, 要么事件 B 发生, 或事件 A 与事件 B 都发生. 图 1.4 是其文氏图.

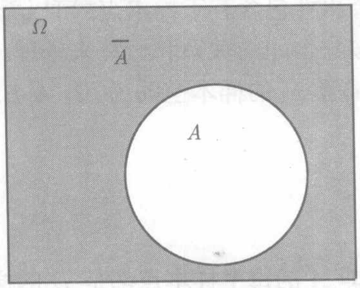

图 1.3

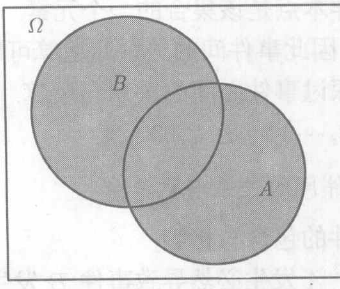

图 1.4

事件的和可以推广到多个事件的情形. 定义 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k=\{A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生$\}$.

5) 事件的交 (或积)

"事件 A 与事件 B 都发生" 这一事件称为事件 A 与事件 B 的**交**(**或积**), 记为 $A \bigcap B$, 也简记为 AB. 事件 $A \bigcap B$ 发生意味着 A 与 B 都发生. 图 1.5 是其文氏图.

类似于 n 个事件的和事件, 可以定义 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k=\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生$\}$.

6) 事件的差

"事件 A 发生而事件 B 不发生" 这一事件称为事件 A 与事件 B 的差, 记为 $A-B$, 是由属于 A 但不属于 B 的所有样本点组成的事件. 图 1.6 是其文氏图.

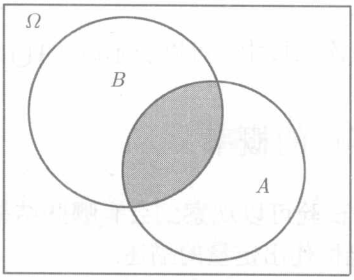

图 1.5

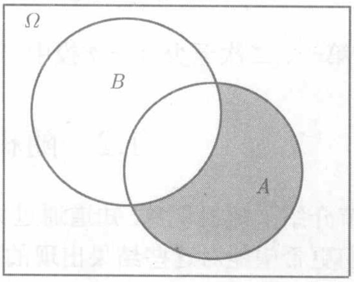

图 1.6

常用结论

(1) $A\bigcup\varnothing=A$, $A\bigcup\Omega=\Omega$, $A\bigcup\overline{A}=\Omega$, $A\overline{A}=\varnothing$, $\overline{\overline{A}}=A$.

(2) 若事件 $A\subset B$, 则 $A\bigcup B=B$, $A\bigcap B=A$, $\overline{A}\supset\overline{B}$.

(3) $A-B=A\bigcap\overline{B}=A-AB$, $A=(AB)\bigcup(A\overline{B})$.

2. 事件的运算律

与集合的运算类似, 事件的运算满足如下运算律:

(1) **交换律** $A\bigcup B=B\bigcup A$; $A\bigcap B=B\bigcap A$.

(2) **结合律** $(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$; $(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$.

(3) **分配律** $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$; $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$.

(4) **对偶律** $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$; $\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

对偶律也称**德摩根律**.

上述运算律可推广到有限个或可数个事件的情形.

例 4 一人向指定的篮筐投篮三次, 观察投篮投中的情况. 用 A,B,C 分别表示事件"第 i 次投篮投中"($i=1,2,3$), 用 A,B,C 表示下列事件:

(1) "第一、二次都投中, 第三次未投中" 可以表示成 $AB\overline{C}$;

(2) "三次都未投中" 可以表示成 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(3) "至少有一次投中" 可以表示成 $A\bigcup B\bigcup C$;

(4) "至多一次投中" 可以表示成 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\bigcup A\overline{B}\overline{C}\bigcup\overline{A}B\overline{C}\bigcup\overline{A}\overline{B}C$;

(5) "恰好有两次投中" 可以表示成 $AB\overline{C}\bigcup A\overline{B}C\bigcup\overline{A}BC$;

(6) “至多两次投中” 可以表示成

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\bigcup A\overline{B}\,\overline{C}\bigcup \overline{A}B\overline{C}\bigcup \overline{A}\,\overline{B}C\bigcup AB\overline{C}\bigcup A\overline{B}C\bigcup \overline{A}BC \text{或} \overline{ABC};$$

(7) “至少有两次投中” 可以表示成

$$ABC\bigcup AB\overline{C}\bigcup A\overline{B}C\bigcup \overline{A}BC \text{或} AB\bigcup BC\bigcup AC;$$

(8) “第一、二次至少有一次投中, 第三次未投中” 可以表示成 $(A\bigcup B)\bigcap \overline{C}$.

1.2　随机事件的概率

1.1 节介绍了随机现象, 知道通过大量试验可以观察到会有哪些结果出现. 实际上, 我们更希望能对这些结果出现的可能性作出定量的描述.

事件发生可能性的定量描述的实质就是事件发生的概率. 有些事件发生的概率凭直觉就可以确定, 但是, 对于一般事件而言, 单凭直觉来确定其发生的概率显然是行不通的.

1.2.1　概率的统计定义

下面来看看历史上有名的抛硬币试验 (表 1.1): 抛一枚均匀的硬币, 即可能出现 “正面”, 也可能出现 “反面”. 从表 1.1 的数据可以看出, 随着试验次数 n 的增多, 正面朝上的次数 m 与试验次数 n 的比值 m/n(称为频率) 越来越接近于 1/2.

表 1.1　抛硬币试验记录

试验者	抛硬币次数	正面朝上次数	频率
普丰	4040	2048	0.5069
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	24000	12012	0.5005

在一次随机试验中, 无论事件 A 发生的可能性是多少, A 都可能发生或者不发生. 抛硬币试验表明: 一个随机事件 A 是否发生事先虽不能确定, 但是 A 发生可能性的大小是可以衡量的. 在大量的重复试验或观察中, 事件 A 发生的可能性呈现出一定的统计规律, 并且随着试验或观察次数的增加, 这种规律会表现得愈加明显. 这种统计规律可用频率来描述, 下面给出频率的定义.

定义 1　设 A 为随机试验 E 的任一事件, 相同条件下重复试验 n 次, 用 n_A 表示事件 A 在 n 次试验中出现的次数 (称为**频数**), 称比值 $f_n(A) = n_A/n$ 为事件 A 在 n 次试验中出现的**频率**.

容易验证, 频率具有以下三条基本性质:

(1) **规范性** $f_n(\Omega)=1$;

(2) **非负性** 对任意事件 A, 有 $f_n(A)\geqslant 0$;

(3) **可列可加性** 对任意可数个两两互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$, 有

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} f_n(A_i).$$

在随机试验 E 中, 事件 A 出现的越频繁, 频率越大, 当试验的次数非常多时, 频率会趋向于一个稳定值, 该稳定值就是概率的估计. 例如, 抛硬币试验中, 频率的稳定值是 1/2.

根据频率的稳定性对概率进行客观描述, 这就是概率的统计定义.

定义 2 设 E 是随机试验, 当试验的次数 n 充分大时, 事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 趋向于某数 p, 则称数 p 为事件 A 发生的**概率**, 记为 $P(A)=p$.

概率的统计定义在一定程度上说明概率具有客观性, 但这个定义仍有其局限性. 因为无法将一个试验无限次地重复, 根本得不到确切的频率稳定值 p, 从而也就不能严格确定出任何一个事件的概率.

1933 年, 前苏联数学家科尔莫哥洛夫 (А. Н. Колмогоров) 提出了概率论的公理化结构, 给出了概率的严格定义, 即概率的公理化定义, 标志着概率论这门学科作为一个独立的数学分支地位的确立.

1.2.2 概率的公理化定义

定义 3 设 E 是随机试验, Ω 是样本空间, 对 E 的每一个随机事件 A, 定义一个实值函数 $P(A)$, 若 $P(A)$ 满足下列条件:

(1) **规范性** $P(\Omega)=1$;

(2) **非负性** $P(A)\geqslant 0$;

(3) **可列可加性** 对任意可数个两两互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

概率的公理化定义作为概率的严格定义只是给出了衡量一个指标是否可以作为某事件概率的评价标准, 但是没有给出求具体事件概率的计算方法.

概率的公理化定义的三个条件实际上就是三个公理, 由这三个公理, 可以推导出概率的其他一些重要性质.

1.2.3 概率的性质

(1) **不可能事件的概率** $P(\varnothing)=0$.

(2) **有限可加性**　若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(3) **减法公式**　对任意两个事件 A, B, 有

$$P(A-B) = P(A) - P(AB).$$

特别地, 若事件 $B \subset A$, 则 $P(A-B) = P(A) - P(B)$, 且 $P(B) \leqslant P(A)$.

(4) **加法公式**　对任意两个事件 A, B, 有

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

特别地, 若 $AB = \varnothing$, 则 $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$.

推广到三个事件, 有

$$P(A \bigcup B \bigcup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

概率的加法公式还可以推广到多于三个事件的情形.

(5) **对立事件的概率**　对任意事件 A, 有 $P(A) \leqslant 1$, 且 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证明　(1) 由 $\Omega = \Omega + \varnothing + \varnothing + \cdots$ 及可列可加性, 可得

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots,$$

所以

$$P(\varnothing) = 0.$$

(2) 设 $A_{n+1} = \varnothing, A_{n+2} = \varnothing, \cdots$, 且 $A_1, A_2, \cdots, A_n, A_{n+1}, \cdots$ 两两互不相容, 则由概率的可列可加性, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(3) 因为 $A = (A-B) \bigcup AB$, 又 $A-B$ 与 AB 互不相容, 由有限可加性, 可得

$$P(A) = P(A-B) + P(AB),$$

即

$$P(A-B) = P(A) - P(AB).$$

当 $B \subset A$ 时, 有 $AB = B$, 所以

$$P(A-B) = P(A) - P(B).$$