隧道计算

共同变形理论

王桂芳　编著

成都科技大学出版社

(川)新登字015号
责任编辑　宗　年
封面设计　光　光

内 容 提 要

本书介绍按共同变形理论计算隧道的方法。包括有关的基础知识;求解单位圆内域到隧道孔外域的映象函数的方法;无衬砌隧道的应力分析;隧道衬砌内力的线弹性分析;隧道衬砌内力的粘弹性分析。每一部分都给出了详细的理论推导,并有算例。

本书可作为土木、水利类桥隧、水工及地下结构等专业高年级学生及研究生的参考书或教材,也可供从事地下结构工程的科学研究工作者和工程技术人员参考。

隧 道 计 算
(共同变形理论)
王桂芳 著

成都科技大学出版社出版发行
四川省新华书店经销
成都科技大学印刷厂印刷
开本787×1092毫米　1/16　印张:19.5625
1992年12月第一版　1992年12月第一次印刷
印数:1—1000　字数:452千字
ISBN7—5616—1592—2/TU·22

定价:5.45元

前　言

我国习惯上将交通用的地下通道称为“隧道”，如铁路、公路隧道等；而将用于输水的地下通道称为“隧洞”，如水利水电工程的输水隧洞。实际上，它们均属地下结构，只是功能及所受的荷载不同而已，而设计及计算方法是相同的。因此，本书所指的“隧道”也包含“隧洞”在内。

隧道的力学计算理论分为两种。一为“局部变形”理论，认为物体某一点产生的变形只与该点所受的力有关，且成正比。这相当于将物体视为由互不相涉的弹簧系所组成。另一为“共同变形”理论，将物体视为由连续介质组成的线性弹性体，物体某一点的变形不仅与该点所受的力有关，而且与该点以外的作用力有关。

目前隧道的计算方法基本上是基于局部变形理论的，因为其计算公式比较简单。从计算的合理性看，当然是共同变形理论为佳。例如文献［5］写道：“这两种理论所得的结果是不同的。……共同变形理论：用纵向变形系数 E_0 和横向变形系数 μ_0 表示地层特征，能较正确地反映出地基应力和变形的实际情况。”文献［33］也指出：“基于将岩石看成为线性变形介质，并用弹性理论方法的共同变形理论，它能给出关于地下坑道孔周变形的较正确表示。但是在坑道形状复杂的情况下，其应用尚存在很大困难。”

的确，共同变形理论能较正确地反映地基应力和变形的实际情况，能给出关于地下坑道孔周变形的较正确表示。但该理论求解某些问题的难度大，计算公式复杂，致使其计算方法的研究进展比较缓慢，目前还没有一本关于按共同变形理论计算隧道的书。著者于 60 年代初即从事用共同变形理论计算隧道的研究。“文化大革命”中断了几年。70 年代初又继续该项研究，1978 年将一些成果油印成册进行交流，本书第一至第五章就是以它为基础复核和改写而成的。80 年代以来，我们又开展了按线性粘弹性理论分析隧道衬砌内力的研究，所取得的一些成果已在有关学术会议及刊物上发表，现将其综合成第六章。各章内容简介于下。

第一章　隧道计算基础　主要介绍 Н. И. Мусхелишвили 用复变函数理论求解弹性力学平面问题的方法。同时，推导了所需用的有关公式。

第二章　映象函数　介绍一种求解映象函数的逐次渐近方法。利用该方法求得了单位园外域到若干常用隧道孔外域上的映象函数，以用于隧道计算。实践表明，该方法是求解单位圆内域或外域到单连通无限域上的映象函数的有效方法。

第三章　无衬砌隧道的计算　讨论隧道开挖后的围岩应力计算。推导了计算围岩应力分量的公式，并举例讨论了隧道孔周应力的分布规律。此外，给出了水压力作用下水工隧洞围岩应力的计算公式；讨论了列车荷载作用下铁路隧道围岩应力的计算等。

第四章　衬砌隧道的计算　围岩压力荷载分为两种类型。一为隧道开挖后，顶部围岩形成自然拱，拱下岩体的重量即作用于衬砌上的围岩压力荷载。本书称其为第一围岩压力理论。另一认为隧道开挖后，围岩仍为完整体系，但由于孔周释放地层初始应力引起围岩变形，产生作用于衬砌的压力荷载。本书称其为第二围岩压力理论。本章举例讨论了按两种围岩压力理论计算隧道衬砌内力的原理和方法，还讨论了列车荷载作用下铁路隧道衬砌

内力的计算问题。

第五章　隧道衬砌内力计算的矩阵方法　本章将隧道衬砌内力的计算用矩阵来表示。对矩阵力法、矩阵位移法和直接刚度法，给出了理论推导和算例。

第六章　隧道衬砌内力的粘弹性分析　首先介绍线性粘弹性的基本理论及求解粘弹性问题的弹性—粘弹性对应原理，随后将隧道衬砌及围岩均视为粘弹性体讨论隧道衬砌内力的粘弹性分析方法。

本书内容主要是著者的研究成果，由于水平所限，书中谬误和不妥之处在所难免，特别是有的公式冗长，虽经反复校核，仍可能有错漏之处，恳请读者批评指正。

著　者

1991年元月于成都科技大学

目　　录

第一章　隧道计算基础

按共同变形理论计算隧道围岩应力及衬砌内力时，将围岩视为线弹性变形体，用弹性理论的复变函数方法求解围岩的应力及位移。

§1.1　弹性理论平面问题的基本方程

1. 平衡方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0\\&\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

2. 几何方程

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}\\&\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

3. 物理方程

平面应力情形：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)\\&\varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x)\\&\gamma_{xy}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

平面应变情形：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x=\frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right)\\&\varepsilon_y=\frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right)\\&\gamma_{xy}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{1.4}$$

4. 边界条件

第一基本问题：　边界上给定外力分量 X_n 及 Y_n

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x\cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y)=X_n\\&\tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y)=Y_n\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

第二基本问题：　边界上给定位移分量 U_n 及 V_n

$$u=U_n,\quad v=V_n\tag{1.6}$$

弹性理论平面问题的任务就是根据平衡方程、几何方程、物理方程求解应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy}，应变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy}，位移分量 u、v 等 8 个未知函数，同时满足给定的边界条件。

如果体积力 X、Y 是由保守力场所引起的，则它们可以表示为

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x},\quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \tag{1.7}$$

式中 V 为势函数。在隧道计算中体积力就是坑道围岩的自重，即

$$X = 0,\qquad Y = -\gamma_0 \tag{1.8}$$

其中 γ_0 为坑道围岩单位体积的重量。于是，势函数 V 为

$$V = \gamma_0 y = -\frac{1}{2} i\gamma_0 (z - \bar{z}) \tag{1.9}$$

其中　$z=x+iy$—复数变量。

若采用应力函数 U，令

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + V \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + V \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

则弹性理论平面问题归结为在给定边界条件下，由如下相容方程求解应力函数 U 的问题：

$$\nabla^4 U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \tag{1.11}$$

求得应力函数 U 后，由式(1.10)求应力分量，然后用物理方程和几何方程求解位移分量。

§1.2　弹性理论平面问题的复变函数表示法

取复变数 $z=x+iy$，共轭复变数为 $\bar{z}=x-iy$　(1.12)

则有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = i,\quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 1,\quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = -i \tag{1.13}$$

设 x 及 y 的函数 $f(x,y)$，由式(1.12)之关系可表示为 z 及 $\bar{z}$ 的函数，即 $f(z,\bar{z})$。$f(z,\bar{z})$关于 x 和 y 的偏导数可写成为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial z} - i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

解上式，有

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial f}{\partial \bar{z}},\quad \frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1.15}$$

$f(z,\bar{z})$关于 x 及 y 的二阶偏导数为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

将二式相加，得

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} \tag{1.17}$$

因此，如果用复变函数表示 Laplace 方程 $\nabla^2 f = 0$，便有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 \tag{1.18}$$

方程(1.18)的通解是 $$f=F_1(z)+F_2(\bar{z}) \tag{1.19}$$

式中 $F_1(z)$和 $F_2(\bar{z})$分别为 z 和 $\bar{z}$ 的任意解析函数。若 f 是实变函数，则 $F_1(z)$和 $F_2(\bar{z})$必为共轭函数，即 $F_2(\bar{z})=\overline{F_1(z)}$。通解(1.19)成为

$$f = F_1(z) + \overline{F_1(z)} \tag{1.20}$$

根据式(1.18)，重调和方程$\nabla^4 f=0$ 的复变函数表示式为

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0 \tag{1.21}$$

式(1.21)的通解是 $$f = F_1(z) + F_2(\bar{z}) + zF_3(\bar{z}) + \bar{z}F_4(z) \tag{1.22}$$

其中 $F_1(z)$、$F_2(\bar{z})$、$F_3(\bar{z})$及 $F_4(z)$为 z 或 $\bar{z}$ 的任意解析函数。同前面一样，若 f 是实变函数，则必有如下关系：

$$F_2(\bar{z}) = \overline{F_1(z)}, \quad F_3(\bar{z}) = \overline{F_4(z)} \tag{1.23}$$

于是，式(1.22)成为 $$f=F_1(z)+\overline{F_1(z)}+z\,\overline{F_4(z)}+\bar{z}F_4(z) \tag{1.24}$$

（一） 应力函数 U 的复变函数表示式

根据如上所述，应力函数 U 应为满足重调和方程(1.11)之重调和函数，且为实变函数。于是，仿式(1.24)，应力函数 U 可表示为

$$2U = \chi(z) + \overline{\chi(z)} + \bar{z}\varphi(z) + z\,\overline{\varphi(z)} \tag{1.25}$$

式中 $\chi(z)$和 $\varphi(z)$是 z 的任意解析函数。式(1.25)又可写成

$$U = \mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] \tag{1.26}$$

式中 Re 表示取$[\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)]$的实变函数部分。

（二） 应力分量的复变函数表示式

将式(1.25)分别关于 x 及 y 取偏导数，有

$$\left.\begin{aligned}
2\frac{\partial U}{\partial x} &= 2\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right) = \varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \overline{\varphi(z)} + z\,\overline{\varphi'(z)} + \chi'(z) + \overline{\chi'(z)} \\
2\frac{\partial U}{\partial y} &= 2i\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right) = i[-\varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \overline{\varphi(z)} - z\,\overline{\varphi'(z)} + \chi'(z) - \overline{\chi'(z)}]
\end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

$$\left.\begin{aligned}
2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 2\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right] \\
&= \chi''(z) + \overline{\chi''(z)} + 2\varphi'(z) + 2\,\overline{\varphi'(z)} + z\,\overline{\varphi''(z)} + \bar{z}\varphi''(z) \\
2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= 2i\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right] \\
&= -\chi''(z) - \overline{\chi''(z)} + 2\varphi'(z) + 2\,\overline{\varphi'(z)} - z\,\overline{\varphi''(z)} - \bar{z}\varphi''(z) \\
2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= 2i\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right] \\
&= i[\chi''(z) - \overline{\chi''(z)} + \bar{z}\varphi''(z) - z\,\overline{\varphi''(z)}]
\end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

由式(1.27)及(1.28)之前二式可得

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + \overline{\chi'(z)} + z\,\overline{\varphi'(z)} \tag{1.29}$$

$$\nabla^2 U = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4\mathrm{Re}[\varphi'(z)] \tag{1.30}$$

将式(1.28)代入式(1.10)中，得

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2V = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + V] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\chi''(z) + \bar{z}\varphi''(z)] \end{aligned}\right\} \tag{1.31}$$

令

$$\Phi(z) = \varphi'(z) \quad , \quad \psi(z) = \chi'(z) \quad , \quad \Psi(z) = \psi'(z) = \chi''(z) \tag{1.32}$$

式(1.31)可写成

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + V] = 4\mathrm{Re}\Phi(z) + 2V \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

式(1.31)或(1.33)就是应力分量的复变函数表示式，它们分别以解析函数 $\varphi(z)$、$\psi(z)$及 $\Phi(z)$、$\Psi(z)$表示。如果知道 $\varphi(z)$、$\psi(z)$或 $\Phi(z)$、$\Psi(z)$，就可利用它们来求得应力分量。

（三） 位移分量的复变函数表示式

平面应变问题与平面应力问题的物理方程不相同，因而二者位移分量的复变函数表示式也不一样，对于平面应变问题，可利用几何方程(1.2)及应力分量公式(1.10)，将物理方程(1.4)写成

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E_1}\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) + (1 - \nu_1)V\right] \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E_1}\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + (1 - \nu_1)V\right] \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{2(1+\nu_1)}{E_1}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

式中

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \quad , \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu} \tag{1.35}$$

式(1.34)之前二式可以写成

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1+\nu_1}{E_1}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{E_1}\nabla^2 U + \frac{1-\nu_1}{E_1}V \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1+\nu_1}{E_1}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1}{E_1}\nabla^2 U + \frac{1-\nu_1}{E_1}V \end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

分别以 p 及 q 表示 $\varphi(z)$的实部及虚部，则

$$\varphi(z) = p + iq, \quad \overline{\varphi(z)} = p - iq \tag{1.37}$$

将 $\varphi(z)$分别关于 x 及 y 求偏导数，有

$$\frac{\partial \varphi(z)}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(z) \quad , \quad \frac{\partial \varphi(z)}{\partial y} = \frac{d\varphi}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = i\varphi'(z)$$

因此

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(z) &= \frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} - i\frac{\partial p}{\partial y} \\ \overline{\varphi'(z)} &= \frac{\partial p}{\partial x} - i\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} + i\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{1.38}$$

从而有

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} \tag{1.39}$$

另一方面，由式(1.30)有

$$\nabla^2 U = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4\frac{\partial p}{\partial x} = 4\frac{\partial q}{\partial y} \tag{1.40}$$

将式(1.40)代入式(1.36)中，有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1+\nu_1}{E_1}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{4}{E_1}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1-\nu_1}{E_1}V \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1+\nu_1}{E_1}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{4}{E_1}\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{1-\nu_1}{E_1}V \end{aligned}\right\} \tag{1.41}$$

分别将上二式关于 x 及 y 进行积分，有

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1+\nu_1}{E_1}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4}{E_1}p + \frac{1-\nu_1}{E_1}\int Vdx + f_1(y) \\ v &= -\frac{1+\nu_1}{E_1}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{4}{E_1}q + \frac{1-\nu_1}{E_1}\int Vdy + f_2(x) \end{aligned}\right\} \tag{1.42}$$

将式(1.42)代入式(1.34)之第三式中，并注意到式(1.9)及(1.39)，得

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{1-\nu_1}{E_1}\gamma_0 x = \frac{\partial f_1}{\partial y} \tag{1.43}$$

式(1.43)表明，f_1 代表刚性位移，可将它略去，从而有

$$f_2 = -\frac{1-\nu_1}{E_1}\int \gamma_0 x dx \tag{1.44}$$

于是由式(1.42)有

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1+\nu_1}{E_1}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4}{E_1}p + \frac{1-\nu_1}{E_1}\int Vdx \\ v &= -\frac{1+\nu_1}{E_1}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{4}{E_1}q + \frac{1-\nu_1}{E_1}\int (Vdy + Wdx) \end{aligned}\right\} \tag{1.45}$$

式中 $W = -\gamma_0 x$—势函数 V 的共轭调和函数。

将式(1.45)的第二式乘以 i 然后与第一式相加，得

$$u+iv = -\frac{1+\nu_1}{E_1}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{4}{E_1}(p+iq) + \frac{1-\nu_1}{E_1}\chi(z) \tag{1.46}$$

式中 $$\chi(z) = \int (V+iW)dz = -\frac{1}{2}i\gamma_0 z^2\text{①}$$

利用式(1.29)及(1.37)，可将式(1.46)写成

$$2G(u+iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \frac{1}{2}(\kappa-1)\chi(z) \tag{1.48}$$

式中 $$\kappa = \frac{3-\nu_1}{1+\nu_1} = 3-4\nu, \quad G = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

式(1.48)便是位移分量的复变函数表示式。如果知道解析函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$，便可由该式求得位移分量 u 及 v。

式(1.48)是在平面应变情形下导出的。但是，只要将平面应变的物理方程(1.4)与平面

---

① 在推导此式时，用 $i\int Wdz$ 代替了 $i\int Wdx$，它们之间相差 $-\int Wdy$ 项。在后面的计算中，体积力为自重，且坑道关于 y 轴对称，该项为零。

应力的物理方程(1.3)加以比较，便知式(1.48)对于平面应力情形仍属有效，只须以 E 及 ν 分别代替 E_1 及 ν_1 即可。于是，对于平面应力问题，式(1.48)中之 κ 值应为 $\kappa^*=\dfrac{3-\nu}{1+\nu}$。

(四) 边界条件的复变函数表示式

1. 第一基本问题

规定沿物体边界前进时以物体所占之区域保持在左侧的方向为正(图 1.1)。

将式(1.10)之应力分量代入边界条件(1.5)中，有

$$\left.\begin{aligned}X_n&=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+V\right)\cos(n,x)-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cos(n,y)\\ Y_n&=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+V\right)\cos(n,y)-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cos(n,x)\end{aligned}\right\}\tag{1.49}$$

由图 1.1 有

$$\left.\begin{aligned}\cos(n,x)&=\cos(t,y)=\frac{dy}{ds}\\ \cos(n,y)&=-\cos(t,x)=-\frac{dx}{ds}\end{aligned}\right\}\tag{1.50}$$

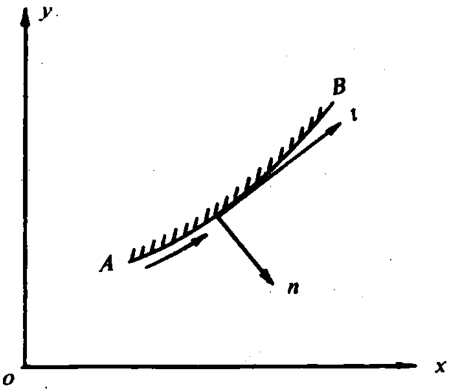

图 1.1

将上二式代入式(1.49)中，有

$$\left.\begin{aligned}X_n&=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)+V\frac{dy}{ds}\\ Y_n&=-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)-V\frac{dx}{ds}\end{aligned}\right\}\tag{1.51}$$

以 i 乘式(1.51)之第二式再与第一式相加，得

$$X_n+iY_n=-i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right)-iV\left(\frac{dx}{ds}+i\frac{dy}{ds}\right)\tag{1.52}$$

将式(1.29)代入上式，两端乘以 ids 后进行积分，并以 t 表示物体边界上之点，得

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=i\int(X_n+iY_n)ds-\int V(t)dt+const\tag{1.53}$$

式(1.53)便是第一基本问题边界条件的复变函数表示式，其中 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 为函数 $\varphi(z)$、$\psi(z)$ 在物体边界上之值，计算积分时应使区域 S 保持在进行方向之左侧。

在此，还顺便导出一个改虑自重时计算边界力主矢量的公式。

由文献[17]知，当考虑物体自重时，边界力 X_n' 及 Y_n' 为

$$X_n'=X_n-V\cos(n,x)=X_n-V\frac{dy}{ds}$$

$$Y_n'=Y_n-V\cos(n,y)=Y_n+V\frac{dx}{ds}$$

以 i 乘第二式然后与第一式相加，并注意到式(1.52)，有

$$X_n'+iY_n'=X_n+iY_n+iV\left(\frac{dx}{ds}+i\frac{dy}{ds}\right)=-i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

将式(1.29)代入上式中，以 ds 乘全式，并由边界上点 A 沿边界积分到点 B，则得到作用

在边界 AB 段上的主矢量 $X+iY$：

$$X+iY=\int_{AB}(X_n+iY_n)ds+i\int_{AB}V(t)dt$$
$$=-i[\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}]_B^A \tag{1.54}$$

2. 第二基本问题

将第二基本问题的边界条件(1.6)写成如下复数形式：

$$u+iv=U_n+iV_n$$

然后利用式(1.48)，并以 t 表示物体边界上之点，即得到第二基本问题边界条件的复变函数表示式：

$$\kappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=2G(g_1+ig_2) \tag{1.55}$$

式中 $$g_1+ig_2=U_n+iV_n-\frac{1}{4G}(\kappa-1)\gamma(t)$$

综上可见，应力函数 U，应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy}，位移分量 u、v 及边界条件均用解析函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 来表示。因此，用复变函数法求解弹性力学平面问题，即由边界条件(1.53)或(1.55)求解复势函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$，再代入式(1.33)及(1.48)求应力分量及位移分量。

§1.3 函数 $\Phi(z)$、$\Psi(z)$ 及 $\varphi(z)$、$\psi(z)$ 的确定程度

除了用函数 $\Phi(z)$、$\Psi(z)$ 及 $\varphi(z)$、$\psi(z)$ 表示应力函数，应力分量及位移分量，还需研究这些函数在给定应力状态或给定位移状态下被确定的程度问题。

(一) 给定应力状态的情形

设物体在给定弹性平衡状态下的应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy} 为已知，如果有两组函数 Φ、Ψ、φ、ψ 及 Φ_1、Ψ_1、φ_1、ψ_1 与之对应，试问它们是否完全相同，或可能有怎样的差别？

应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy} 与 Φ、Ψ、φ、ψ 应满足关系式(1.33)，即

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x+\sigma_y&=4\mathrm{Re}\Phi(z)+2V\\ \sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}&=2[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)]\end{aligned}\right\} \tag{1.56a}$$

同样，有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x+\sigma_y&=4\mathrm{Re}\Phi_1(z)+2V\\ \sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}&=2[\bar{z}\Phi_1'(z)+\Psi_1(z)]\end{aligned}\right\} \tag{1.56b}$$

比较二式可见，函数 $\Phi(z)$ 与 $\Phi_1(z)$ 有相同的实部，二者间只可能差一个任意虚常数 ci，故有

$$\Phi_1(z)=\Phi(z)+ci \tag{1.57}$$

由式(1.32)有 $$\varphi_1(z)=\varphi(z)+ciz+\gamma \tag{1.58}$$

其中 γ 为任意复常数，c 为任意实常数。

由式(1.57)有 $\Phi_1'(z)=\Phi'(z)$。再比较式(1.56a)及(1.56b)之第二式，有

$$\Psi_1(z)=\Psi(z) \tag{1.59}$$

由式(1.32)有 $$\psi_1(z)=\psi(z)+\gamma' \tag{1.60}$$

其中 γ' 为任意复常数。

综上所述，有如下结论：对于给定的应力状态，函数 $\Psi(z)$ 完全被确定；函数 $\Phi(z)$ 精确到常数项 ci；函数 $\varphi(z)$ 精确到 $ciz+\gamma$ 的项；函数 $\psi(z)$ 精确到常数项 γ'。即将

$$\left.\begin{array}{l}\text{函数 } \varphi(z) \text{ 代以 } \varphi(z)+ciz+\gamma \\ \text{函数 } \psi(z) \text{ 代以 } \psi(z)+\gamma'\end{array}\right\} \tag{1.61}$$

时，不改变应力状态。

（二） 给定位移分量的情形

给定位移分量后，应力状态便完全被确定。这时，便不可能出现式(1.61)以外形式的代换。为此，将位移分量关系式(1.48)中用式(1.61)之代换，考察位移分量的变化。设与函数$\varphi(z)$、$\psi(z)$或$\varphi_1(z)$、$\psi_1(z)$相应的位移分量为u、v或u_1、v_1，则

$$2G(u+iv)=\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}+\frac{1}{2}(\kappa-1)\gamma(z) \tag{1.62}$$

$$2G(u_1+iv_1)=\kappa\varphi_1(z)-z\overline{\varphi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}+\frac{1}{2}(\kappa-1)\gamma(z) \tag{1.63}$$

将式(1.58)、(1.60)代入式(1.63)中，并减去式(1.62)得

$$2G(u_1+iv_1)=2G(u+iv)+(\kappa+1)ciz+\kappa\gamma-\bar{\gamma}' \tag{1.64}$$

由式(1.64)可见，若要位移分量不发生改变，在式(1.61)的代换中应置

$$c=0,\quad \kappa\gamma-\gamma'=0 \tag{1.65}$$

就是说，在给定位移分量的情形下，不能任意给以常数c、γ、γ'的值，而只能给以$c=0$及γ与γ'中的任一个，另一个由式(1.65)之第二式来确定。

以上讨论表明，函数$\varphi(z)$及$\psi(z)$中之常数项及$\varphi(z)$中z的一次方项之虚部不影响应力状态，可任意给定；对于给定位移分量的情形，则可任意给定函数$\varphi(z)$及$\psi(z)$中任一常数项，而不改变位移分量。

为着确定起见，本书将坐标原点取在物体所占的区域S内，并按如下方式确定这些可以任意给定的常数值：

对于给定应力状态的情形，取

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi'(0)\text{ 的虚部}=0,\quad \psi(0)=0 \tag{1.66}$$

对于给定位移分量的情形，取

$$\varphi(0)=0\quad\text{或}\quad\psi(0)=0 \tag{1.67}$$

§1.4 有限复连通区域函数 φ(z) 及 ψ(z) 的一般公式

设物体所占的区域S为一复连通区域，该区域由有限个简单闭围线$L_1, L_2, \cdots\cdots L_m, L_{m+1}$围成，$L_{m+1}$包围其余诸围线，如图 1.2 所示。

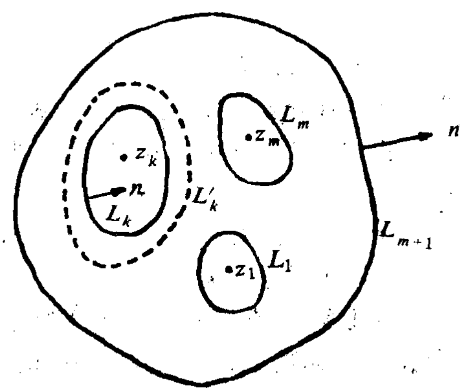

图 1.2

设σ_x、σ_y、τ_{xy}为物体内的应力分量。众所周知，它们在区域S内为单值函数。据此，由$\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}\Phi(z)+2V$可知$\Phi(z)$的实部为单值函数，因为势函数$V$在区域$S$内为已知单值函数。但函数$\Phi(z)$的虚部可能是多值的，即当沿环绕围线中某一$L_k$的任意闭围线$L_k'$绕行（设为逆时针方向）一周时，此虚部可能得到$B_k i$型的增量。若令$B_k=2\pi A_k$

(B_k 与 A_k 均为实常数)，则沿 L_k' 绕行一周时函数 $\Phi(z)$ 得到增量 $2\pi iA_k$。

另一方面，假设一新函数 $\Phi^*(z)$：

$$\Phi^*(z)=\Phi(z)-\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k) \tag{1.68}$$

其中 $z_1,z_2,\cdots\cdots,z_m$ 分别为围线 $L_1,L_2,\cdots\cdots,L_m$ 内任意选取的定点。当沿闭围线 L_k' 绕行一周时，式(1.68)中右端第二项得到增量 $2\pi iA_k$. 如前所述，此时函数 $\Phi(z)$ 也产生增量 $2\pi iA_k$。于是，沿闭围线 L_k' 绕行一周时，函数 $\Phi^*(z)$ 回复原值，为单值函数。

由式(1.68)有
$$\Phi(z)=\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)+\Phi^*(z) \tag{1.69}$$

式中 $\Phi^*(z)$ 为在区域 S 内的单值解析函数。

由式(1.32)之第一式有

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\int_{z_0}^{z}\Phi(z)+const\\&=\sum_{k=1}^{m}A_k[(z-z_k)\ln(z-z_k)-(z-z_k)]+\int_{z_0}^{z}\Phi^*(z)dz+const\end{aligned}$$

其中 z_0 为区域 S 内的任意定点。当绕任一围线 L_k 一周时，积分 $\int_{z_0}^{z}\Phi^*(z)dz$ 得到增量 $2\pi iC_k$，此处 C_k 为复常数(因子 $2\pi i$ 只是为了方便而引入的)。故仿前述，有

$$\int_{z_0}^{z}\Phi^*(z)dz=\sum_{k=1}^{m}C_k\ln(z-z_k)+\text{单值函数}$$

将此积分代入上式，然后将 $A_kz_k\ln(z-z_k)$ 与 $C_k\ln(z-z_k)$ 型的诸项合并后，有

$$\varphi(z)=z\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\ln(z-z_k)+\varphi^*(z) \tag{1.70}$$

其中 $\varphi^*(z)$ 为在区域 S 内的全纯函数，而 γ_k 为复常数。

再由公式
$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)]$$

可知 $\Psi(z)$ 为区域 S 内的全纯函数。由式(1.32)第三式有 $\psi(z)=\int\Psi(z)dz$。同前可导出

$$\psi(z)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k'\ln(z-z_k)+\psi^*(z) \tag{1.71}$$

其中 $\psi^*(z)$ 为在区域 S 内的全纯函数，γ' 为复常数。

$\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的表示式(1.70)及(1.71)是以应力分量为单值函数而得到的，它们还应满足位移的单值性条件。为此，将它们代入式(1.48)，并沿闭曲线 L_k' 绕行一周，有

$$2G[u+iv]_{L'_k}=2\pi i[(\kappa+1)A_kz+\kappa\gamma_k+\bar{\gamma}_k'] \tag{1.72}$$

式中$[\quad]_{L_k'}$表示括号内的表达式当逆时针绕行围线 L_k' 一周时的增量。由式(1.72)可见，位移单值性的必要且充分条件为

$$A_k=0,\quad \kappa\gamma_k+\bar{\gamma}'=0\quad(k=1,2,3,\cdots,m) \tag{1.73}$$

此外，还可证明复常数 γ_k 及 $\bar{\gamma}'$ 与作用于 L_k 上的外力主矢量 X_k+iY_k 有如下关系[1]：

$$X_k+iY_k=-2\pi(\gamma_k-\bar{\gamma}_k') \tag{1.74}$$

由式(1.73)及(1.74)解出 γ_k 及 γ_k'：

$$\gamma_k=-\frac{X_k+iY_k}{2\pi(\kappa+1)},\quad \gamma_k'=\frac{\kappa(X_k-iY_k)}{2\pi(\kappa+1)} \tag{1.75}$$

将式(1.75)及 $A_k=0$ 代入式(1.70)和(1.71)中，就得到有限复连通区域函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的一般性公式：

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi(z) &= -\frac{1}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\ln(z-z_k)+\varphi^{*}(z) \\
\psi(z) &= \frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k)\ln(z-z_k)+\psi^{*}(z)
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.76}
$$

§1.5 无限域情形下函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的表示式

有限复连通区域的围线 L_{m+1} 扩大到无限时，就得到无限域的情形。如果将无限域的无限远点除外，则仍属有限区域，式(1.76)仍属有效。

取坐标原点为圆心，以 R 为半径作一圆周 L_R，使 L_R 包围所有围线 $L_k(k=1,2,\cdots,m)$，对于 L_R 外的任一点 z，显然有 $|z|>|z_k|$，因此

$$
\begin{aligned}
\ln(z-z_k) &= \ln z+\ln\left(1-\frac{z_k}{z}\right)=\ln z-\frac{z_k}{z}-\frac{1}{2}\left(\frac{z_k}{z}\right)^2-\cdots\cdots \\
&= \ln z+\text{在 } L_R \text{ 外全纯的函数}
\end{aligned}
$$

将上式代入式(1.76)中，得

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi(\kappa+1)}\ln z+\varphi^{**}(z) \\
\psi(z) &= \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(\kappa+1)}\ln z+\psi^{**}(z)
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.77}
$$

式中
$$
X=\sum_{k=1}^{m}X_k,\quad Y=\sum_{k=1}^{m}Y_k
\tag{1.78}
$$

式(1.77)中函数 $\varphi^{**}(z)$ 及 $\psi^{**}(z)$ 为 L_R 外部的全纯函数，无限远点可能除外。根据罗朗(Laurent)定理，函数 $\varphi^{**}(z)$ 及 $\psi^{**}(z)$ 可表示为如下级数形式：

$$
\varphi^{**}(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n z^n,\quad \psi^{**}(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n' z^n
\tag{1.79}
$$

对于无限域情形，若只在边界诸围线上作用有外力，则无限远点处应力分量应保持有界。利用式(1.33)检验在什么情况下能满足此条件。应注意此时式(1.33)中之 $V=0$，于是

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_x+\sigma_y &= 2[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}] \\
\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.80}
$$

将式(1.79)代入(1.77)中，再将式(1.77)代入式(1.80)之第一式中，有

$$
\sigma_x+\sigma_y=2\left\{-\frac{X+iY}{2\pi(\kappa+1)}\frac{1}{z}-\frac{X-iY}{2\pi(\kappa+1)}\frac{1}{\bar{z}}+\sum_{-\infty}^{+\infty}n(a_n z^{n-1}+\bar{a}_n\bar{z}^{n-1})\right\}
$$

从上式可以看出，欲使应力分量在无限远点保持为有界，则应使

$$
a_n=\bar{a}_n=0\qquad(n\geqslant 2)
\tag{1.81}
$$

同样可以证明，为使 $\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}$ 在无限远点处保持有界，必要且充分条件是式(1.79)级数第二式之系数 a_n' 满足如下条件：

$$
a_n'=0\qquad(n\geqslant 2)
\tag{1.82}
$$

于是，最后得到无限域情形下函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的表示式：

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi(\kappa+1)}\ln z + \Gamma z + \varphi_0(z) \\
\psi(z) &= \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(\kappa+1)}\ln z + \Gamma' z + \psi_0(z)
\end{aligned}\right\} \tag{1.83}
$$

式中 Γ 及 Γ' 为复常数，$\varphi_0(z)$ 及 $\psi_0(z)$ 为在 L_R 外部包含无限远点在内的全纯函数，即对于充分大的 $|z|$ 有如下形式的展开式：

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_0(z) &= a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\cdots \\
\psi_0(z) &= a_0' + \frac{a_1'}{z} + \frac{a_2'}{z^2} + \cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{1.84}
$$

根据§1.3所述，函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 之常数项和 $\varphi(z)$ 中 z 一次方项之虚部对应力状态无影响，因此可令 $a_0=a_0'=0$，$\mathrm{Im}\Gamma=0$，即

$$
\varphi_0(\infty) = \psi_0(\infty) = 0 \quad , \quad \mathrm{Im}\Gamma = 0 \tag{1.85}
$$

复常数 Γ 及 Γ' 具有非常简单的物理意义。为了说明它们的物理意义，令

$$
\Gamma = B + iC, \quad \Gamma' = B' + iC' \tag{1.86}
$$

将式(1.84)代入式(1.83)中，然后再将式(1.83)代入式(1.80)并令 $z\to\infty$，得

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x^{(\infty)} + \sigma_y^{(\infty)} &= 4\mathrm{Re}\Gamma = 4B \\
\sigma_y^{(\infty)} - \sigma_x^{(\infty)} + 2i\tau_{xy}^{(\infty)} &= 2\Gamma' = 2(B' + iC')
\end{aligned}\right\} \tag{1.87}
$$

式中 $\sigma_x^{(\infty)}$、$\sigma_y^{(\infty)}$、$\tau_{xy}^{(\infty)}$ 表示无限远点处之应力分量。由式(1.87)可以看出，实常数 B、B'、C' 代表了无限远点的应力状态。

另一方面，从材料力学中知道

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha \\
\sigma_y &= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha \\
\tau_{xy} &= \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\alpha
\end{aligned}\right\} \tag{1.88}
$$

式中 σ_1、σ_2 为主应力，α 为 σ_1 与 x 轴之夹角。

由式(1.88)，还可用无限远点处的主应力 $\sigma_1^{(\infty)}$、$\sigma_2^{(\infty)}$ 来表示实常数 B、B'、C'，即

$$
\left.\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Gamma = B &= \frac{1}{4}(\sigma_1^{(\infty)} + \sigma_2^{(\infty)}) \\
\Gamma' = B' + iC' &= -\frac{1}{2}(\sigma_1^{(\infty)} - \sigma_2^{(\infty)})e^{-2i\alpha}
\end{aligned}\right\} \tag{1.89}
$$

此外，实常数 C 代表无限远点处的回转。实际上，回转 ω 的表示式为

$$
\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)
$$

将式(1.45)代入上式，并注意到此时 $V=W=0$，再利用式(1.39)及(1.38)，有

$$
\omega = \frac{2}{E_1}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) = -\frac{4}{E_1}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{4}{2iE_1}[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}]
$$

利用式(1.83)及(1.85)，并令 $z\to\infty$，即可得到

$$
\omega^{(\infty)} = \frac{4}{E_1}C \quad 或 \quad C = \frac{E_1}{4}\omega^{(\infty)} \tag{1.90}
$$