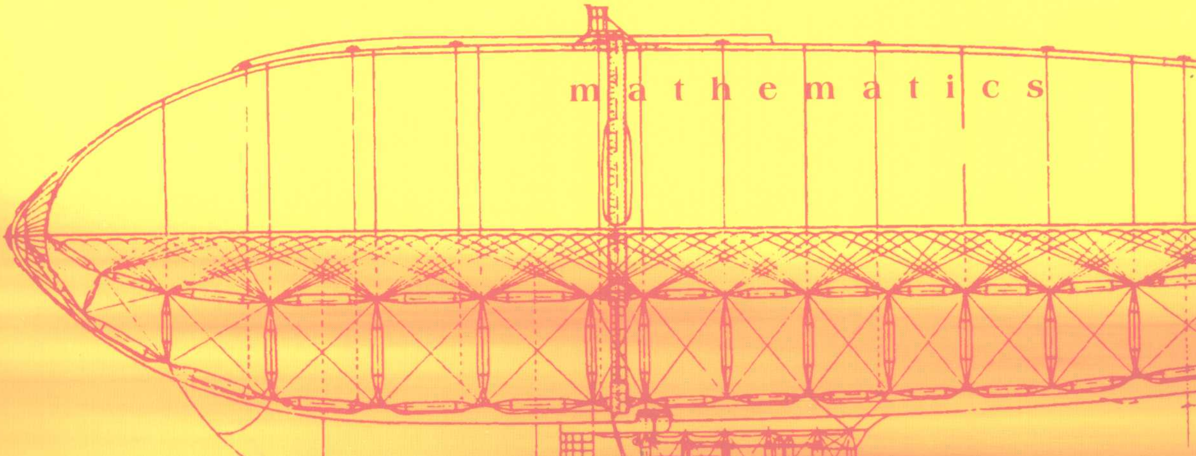
高等学校教材

高等数学 上册

<< 主编 殷锡鸣 编者 李红英 江志松 许树声

m a t h e m a t i c s



高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

上册

主编　殷锡鸣
编者　李红英　江志松　许树声

高等教育出版社

内容提要

本书是按照最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”(征求意见稿),并结合多年教学改革实践经验编写而成的教材。全书共 14 章,分上、下两册出版。上册介绍一元函数微积分,内容包括函数、导数与极限、微分学的基本定理、导数的应用、积分、积分法、定积分的应用与广义积分、无穷级数。书中加强了对基本数学概念、基本数学思想和基本数学方法的阐述,注重应用数学能力的培养,增加了有关数学模型与数学实验、数学软件应用的内容,力求满足高素质科技人才培养的需要。全书例题丰富,叙述注重几何和物理直观,通俗易懂,并含有丰富的有关微积分发展的历史资料,具有较好的可读性。全书在节末配有大量的习题,章末配有总习题和有关的数学建模与数学实验的习题。

本书可作为高等院校理工科、经济、管理等各专业高等数学课程的教材,也可作为教师和学生的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/殷锡鸣主编. —北京:高等教育出版社,2009.8

ISBN 978-7-04-027235-2

Ⅰ. 高… Ⅱ. 殷… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 101838 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京明月印务有限责任公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2009 年 8 月第 1 版
印　　张	31.25	**印　　次**	2009 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	590 000	**定　　价**	33.30 元

物料号　27235-00

编者的话

进入21世纪以来,随着科学技术的飞速发展以及经济竞争的日益激烈,对技术人才提出了更高的要求。在高素质科技人才的培养过程中,数学教育正日益显示出其独特的、不可替代的重要作用。高等数学是高等院校绝大多数专业的一门重要的基础课,并为学生学习后继课程,进一步从事工程技术和科学研究提供了必要的数学基础。高等数学不仅是一种工具,而且是一种思维模式;不仅是一种知识,而且是一种素养和文化。能否运用高等数学的观念去进行定量的思维,并切实解决遇到的实际问题是衡量人才的科学文化素质和数学素质的一个重要标志。

长期以来,我校一贯重视高等数学课程的建设,开展了以课程体系、教学内容和教材建设为核心的教学改革,取得了不少成果。本教材就是在学校的支持下,结合我校原有教材,参照最新的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"(征求意见稿),并融入我们多年来对这门课程的教改实践和设想组织编写的。旨在传授数学知识的同时,着力于培养学生的数学素养和能力、应用数学知识解决实际问题的意识和学生学习数学的兴趣,并提高他们学习数学的能力,从而为他们在将来更新知识,科技创新,学习现代数学方法提供必要的数学基础。本书力求在保证教学要求、遵循教学规律的前提下,在教材的体系、选材和编写中突出以下的特点。

1. 贯彻"学数学是为了用数学"的课程培养目标

选材以培养理工科应用型人才为出发点,重视数学思想方法、数学演绎和归纳素质的培养。对定义、定理及有关结论的介绍,注重它们的几何直观和物理背景;力求阐明问题产生的缘由、需要解决的问题以及处理问题的基本思想和过程。当"严格"和"直观"相矛盾时,我们选择直观,不过于追求严格的数学证明。这样做可以潜移默化地使学生了解数学概念来自于实践,是从具体问题中抽象出来的;了解如何从"直观现象"到"数学抽象",经数学演绎和归纳产生"数学结论"后回到"直观现象"解决具体问题的全过程,从而达到提高学生数学思维能

力和运用数学知识能力的目的。

2. 围绕课程培养目标,按照研究型的要求合理整合教材内容体系

贯彻研究型、探索型的新的人才培养要求,首先要从“研究探索”型的教材着手。为此,我们按照“研究探索”型教材的要求对内容体系进行了合理整合,力求体现“研究和探索”的思想方法和过程。例如,首先根据问题引入导数的概念,然后作为研究问题的工具介绍极限理论及其计算方法,再根据这些极限理论和方法,回到应用中去研究导数的计算方法。又如在积分学部分,首先从应用问题引入定积分概念,在研究定积分计算方法的过程中,受物体的运动方程函数,面积函数的启发,介绍不定积分的概念,最后获得牛顿–莱布尼茨公式等等。

3. 内容安排突出重点,概念、定理分析细致,例题典型

在教材内容的选取上做到重点突出;在概念、定理的论述方式上采用启发式,尽力做到水到渠成,通俗易懂;在例题的选择上力求全面、典型,突出对问题难点的分析以及解决问题思想方法的阐述。

4. 将数学模型的思想和方法以及有关的拓展内容引入教材

数学模型几乎是所有应用科学的基础,数学建模和与之相关的科学计算正在成为科学研究和工程设计的重要工具。在大学数学基础课程学习阶段,特别是在高等数学课程的学习中,渗透数学建模的思想和方法极为重要。我们在这方面作了不少探索:除在例题中引入大量的实际应用问题外,我们在各章的“数学模型与拓展”中安排了与该章内容相关或应用所学知识的数学模型内容,另外作为练习,还安排了五个“小课题研讨”,供有兴趣的学生学习或课堂研讨。同时,在各章的“数学模型与拓展”中我们安排了一些与该章内容相关的进一步的拓展内容。例如,在第3章的“数学模型与拓展”中,作为函数逼近的泰勒公式的延伸,我们介绍了拉格朗日插值多项式;在第4章的“数学模型与拓展”中作为导数传统应用内容的延伸,我们介绍了导数在经济学中的应用等。希望通过对这些内容的学习,学生能够树立起运用数学方法的意识,提高学习高等数学课程的兴趣和积极性,从而达到运用数学知识解决实际问题能力培养的目的。

5. 把数学软件的运用引入教材

与数学模型紧密相连的是数学软件的运用。长期以来,人们总认为数学就是凭脑袋、纸和笔进行推理、证明和计算。但随着计算机和数学软件的发展,数学软件已经成为科学研究的一种基本工具。因此对未来高素质人才来讲,具有良好的数学软件运用能力对他们将来的发展非常重要。为此,我们在“数学模型与拓展”中选择了一些需要运用数学软件(本书中我们运用 Mathematica 软件)求解的数学模型问题,并且在总习题中安排了运用数学软件求解的习题(打*号)。希望通过这些内容的学习,学生能在这一方面得到一定的训练。

6. 通过丰富的例题、习题,拓展学生的学习空间

本书选编了较多的例题,给使用本教材的教师提供了较大的选择余地,也为学生拓展了学习空间。本书每节末配备有习题,每章末配备了总习题。为了满足不同层次的教学要求,我们把习题进行了分层安排:习题(A)适合一般要求的学生使用,习题(B)适合有较高要求的学生使用,而每章末的总习题适合考研要求的学生使用。

7. 穿插了对高等数学发展历史的介绍

高等数学的发展经历了几百年的历史。在本书中穿插了许多介绍有关内容的发展过程以及高等数学发展史等人文知识的内容,我们希望这些历史资料能够进一步丰富教材的可读性和人文氛围。

这里还需要说明,本书中打 * 号的内容不属于高等数学课程的教学内容,只供对数学有兴趣的学生课外学习和教师组织课外活动使用。其中"小课题研讨"中的练习没有给出答案,因为它们的答案不唯一。

本书由华东理工大学组织编写。全书共分 14 章,分上、下两册出版,其中第 1 章由李红英编写;第 2,3 章由许树声编写;第 4 章由江志松编写;第 5 ~ 8 章由殷锡鸣编写;全书的"数学模型与拓展"由李红英和江志松编写。殷锡鸣、许树声对全书进行了统稿,最后由殷锡鸣定稿。

本书是华东理工大学公共数学教研组全体高等数学任课教师长期教改实践和教学研究的共同成果。参加过教材编写工作及研讨活动的教师有龚成通、曹宵临、王薇、邵方明、宋洁、方民、苏纯洁、陆履亨、孟亚琴、李继根、李义龙、胡海燕、吕雪芹、贺秀霞、卢俊杰等老师,他们为本书的编写工作提供了许多宝贵的意见和有用的素材,在此向他们表示衷心的感谢。

另外,还要感谢华东理工大学教务处领导乐清华教授、理学院院长鲁习文教授,数学系主任李建奎教授,由于他们的大力支持和关心,使本书得以顺利编写与出版。

最后特别感谢原全国工科数学课程教学指导委员会主任马知恩教授,感谢他对本书编写提出了许多修改意见及对本书的热情支持。

由于编写者水平有限,书中难免留存错、漏和不妥之处,敬祈专家、读者予以指正。

编 者

2009.4

目　　录

第1章 函数

函数是微积分的主要研究对象.通过初等数学的学习,我们对函数已经有了一些初步的认识,在由初等数学进入高等数学的学习之初,我们首先需要对函数的概念在复习的基础上,作一些更深入的阐述.

由于高等数学中所涉及的函数的变量都是实数,所以本章首先对实数的几何表示、绝对值、不等式以及某些常用实数集合的定义与记号作一些回顾.最后,作为阅读材料,在本章的数学模型与拓展中,简略地介绍函数概念的形成及其发展历史.

1.1 实数集 区间

1.1.1 集合

为了正确地描述函数的概念,本小节先复习一下有关实数集和区间的概念.

A. 集合

具有某种共同属性的对象(事物、现象、系统、过程或感觉等)的汇集(或总合)称为**集合**.集合常用大写字母 $A,B,C,\cdots,X,Y,Z$ 来表示.

由全体实数构成的集合称为**实数集**,并记为 $\mathbf{R}$;由地球上所有动物构成的集合为动物集合;…….

集合 A 中的每个个体称为集合 A 的**元素**.集合的元素一般用小写字母 $a,b,c,\cdots,x,y,z$ 等来表示.若 a 是集合 A 的一个元素,则记为 $a\in A$,读作"a 属于 A";若 a 不是集合 A 的元素,则记为 $a\notin A$ 或 $a\,\overline{\in}\,A$,读作"a 不属于 A".

例如对实数集 $\mathbf{R}$ 及数 $x=\sqrt{2}$ 与复数 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 来说,有 $x\in\mathbf{R},z\notin\mathbf{R}$.

若集合 B 的每一个元素都是 A 的元素,即

$$\forall a \in B \Rightarrow a \in A.$$

(这里"$\forall$"是"对于任意的"意思,"$\Rightarrow$"是"总有"或"总能推导出"的意思),则称集合 B 是集合 A 的**子集**,同时也称集合 A 是集合 B 的**母集**(图 1-1),并记为

$$B \subset A \quad \text{或} A \supset B,$$

读为"B 含于 A"或"A 含有 B".

在数学中,元素和子集是两个完全不同的概念,虽然还有以集合为元素的集合,但元素与子集的概念是不能相混的.

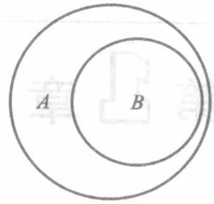


图 1-1

B. 集合的表达形式

通常集合有两种表达形式:**列举法**和**描述法**.

"列举法"就是将集合中的所有元素逐一列于一个大括号内,元素间用逗号分开,且大括号中的元素各不相同. 由定义可知集合与其表达形式中元素的排列次序无关.

列举法通常适用于表示只有有限多个元素的集合,同时也适用于虽有无穷多个元素,但可以用适当的方式全部排列出来的集合. 例如:方程 $x^3-4x=0$ 的解集为 $A=\{0,-2,2\}$;而小于 1 的正有理数集合可表示为

$$B=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\cdots,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots\right\}.$$

用"描述法"来表示的集合的形式为

$$A=\{x \mid p\},$$

其中竖线前的 x 是集合 A 之元素的一般记号,竖线后的 p 是对集合 A 中所有元素的共同属性的描述. 例如上面两个集合可表示为 $A=\{x \mid x^3-4x=0\}$ 与

$$B=\left\{r \,\middle|\, r=\frac{q}{p},p=2,3,\cdots;\quad q=1,2,3,\cdots,p-1\right\}.$$

C. 集合的运算

在讲述集合之间的运算之前,必须先提及关于空集及两个集合相等的概念.

我们将"一个元素都没有的集合"称为**空集**,通常把空集记为 $\varnothing$,由此可将至少有一个元素的集合称为**非空集**. 这里要注意把空集与零集区分开来,零集表示仅以实数"0"为元素的集合.

对于两个给定的集合 A 和 B,当 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 时,称这两个集合**相等**,记为 $A=B$.

(1) 两集合的并集　对于两个给定的集合 A 和 B,由这两个集合的所有元素构成的集合 C(图 1-2),称为集合 A 和 B 的**并集**(或**和集**),记作 $C=A \cup B$(或 $A+B$),即

$$C=A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

显然有

$$A \cup B = B \cup A.$$

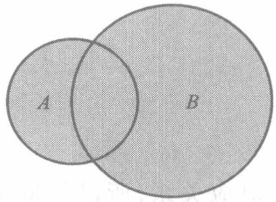


图 1-2

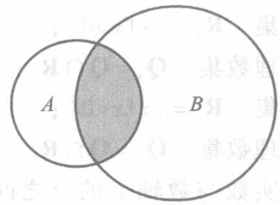


图 1-3

(2) 两集合的交集　由同时属于两个集合 A 与 B 的所有元素构成的集合 C（图 1-3），称为集合 A 和 B 的**交集**（或**积集**），记作 $C=A\cap B$（或 AB），即

$$C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

显然有

$$A \cap B = B \cap A.$$

集合之间的交与并的运算可推广到在有限个集合之间进行.

(3) 两集合的差集　由属于集合 A 但不属于集合 B 的元素构成的集合 C（图 1-4），称为集合 A 与 B 的**差集**，记为 $C=A-B$，即

$$C = A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \overline{\in} B\}.$$

有了差集的概念以后，我们还可以简单地提一下"非"的运算，若集合 A 的母集为 Ω，则对 Ω 而言的"非 A"是指差集 $\Omega-A$，记为 $\bar{A}$. 例如无理数集对于母集实数集 $\mathbf{R}$ 来说可以称之为"非有理数集"，若将有理数集记为 $\mathbf{Q}$，则无理数集为 $\overline{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}-\mathbf{Q}$.

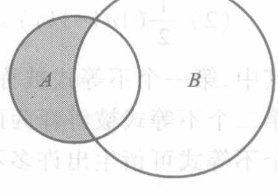


图 1-4

任意集合 A 与空集 $\varnothing$ 之间显然成立如下运算关系：

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A - A = \varnothing, \quad A - \varnothing = A.$$

1.1.2　实数集

前已述及由全体实数构成的集合称为实数集，并记为 $\mathbf{R}$. 这里介绍几个实数集的常用子集、实数集的几何意义以及微积分中常用的实数的绝对值与不等式.

A. 实数集 R 的几个常用子集及其几何意义

整数集　$\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots,n,-n,\cdots\}$；

非负整（自然）数集　$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$；

正整数集　$\mathbf{N}_+=\{1,2,3,4,5,\cdots,n,\cdots\}$；

有理数集 $\mathbf{Q}=\left\{r \,\middle|\, r=\frac{q}{p}, p\in\mathbf{N}_+, q\in\mathbf{Z}\right\}$;

无理数集 $\bar{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}-\mathbf{Q}$;

正数集 $\mathbf{R}_+=\{x\,|\,x>0\}$;

正有理数集 $\mathbf{Q}_+=\mathbf{Q}\cap\mathbf{R}_+$;

负数集 $\mathbf{R}_-=\{x\,|\,x<0\}$;

负有理数集 $\mathbf{Q}_-=\mathbf{Q}\cap\mathbf{R}_-$.

由于实数与数轴上的点之间可以建立一一对应关系,所以也将实数 $x=x_0$ 称为点 x_0,实数集称为实数点集,上面的 $\mathbf{R}_+$ 称为正实数集,$\mathbf{Q}$ 称为有理点集.

B. 实数的绝对值和不等式

若 a 为任意实数,则 a 的**绝对值** $|a|$ 可定义为

$$|a|=\begin{cases}-a, & 当\ a<0\ 时,\\ a, & 当\ a\geqslant 0\ 时,\end{cases} \tag{1-1}$$

其几何意义是点 $x=a$ 到数轴原点 O 之间的距离. 以正数 s 为绝对值的实数有 s 和 $-s$ 两个;而绝对值为0的实数只有一个,这就是实数0.

在述及不等式的时候,我们不能不提一下两个很重要的不等式,即对于任意实数 a,b 有:

(1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$; (1-2)

(2) $\frac{1}{2}(|a|+|b|)\geqslant\sqrt{|ab|}$. (1-3)

其中,第一个不等式被称为“**三角不等式**”(其名称来源于复数模的几何意义);第二个不等式被解释为两个正数的“**算术平均值**”不小于其“**几何平均值**”. 这两个不等式可衍生出许多不等式,如在(1)中分别令 $a=y, b=x-y$ 及 $a=x, b=y-x$,则可推得 $|x-y|\geqslant||x|-|y||$;在(2)中令 $a=\frac{1}{x}, b=x$,则可推得 $\frac{1}{|x|}+|x|\geqslant 2$,等等. 同时这两个不等式也可推广到有限多个实数的情况.

1.1.3 区间 邻域

A. 区间

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的集合是一个包含实数 a,b 及 a 到 b 之间一切实数的集合. 我们称这种特殊的实数集为**区间**,并将 a 称为区间的**左端点**,b 称为区间的**右端点**. 同时,根据区间的“长度”为有限、无限,以及端点是否包含在集合之内等各种情况,我们进一步给出它们的具体名称.

下表分别用括号、不等式和几何图形的形式表示了各种不同的区间.