Discrete Mathematics

离散数学基础（第三版）

洪 帆 主编

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

Discrete Mathematics

离散数学基础（第三版）

洪帆　主编

洪帆　付小青　编

華中科技大学出版社

中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

离散数学基础(第三版)/洪 帆 主编.—武汉:华中科技大学出版社,2009年10月

ISBN 978-7-5609-5711-1

Ⅰ.离… Ⅱ.洪… Ⅲ.离散数学-高等学校-教材 Ⅳ.O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第172633号

离散数学基础(第三版) 洪 帆 主编

责任编辑:田 密 封面设计:刘 卉

责任校对:周 娟 责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉星明图文制作有限公司

印 刷:武汉中远印务有限公司

开本:710 mm×1000 mm 1/16 印张:19 字数:367 000

版次:2009年10月第3版 印次:2009年10月第21次印刷 定价:29.80元

ISBN 978-7-5609-5711-1/O·507

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内容简介

离散数学是计算机科学的理论基础，是计算机学科的核心课程，对于培养学生抽象思维、逻辑推理和分析问题的能力起着重要的作用.

本书系统地介绍了离散数学四个部分的内容：集合论、代数结构、图论和数理逻辑. 全书共分 10 章，主要包括集合、关系、函数；代数系统、群、环和域、格和布尔代数；图论；命题逻辑、谓词逻辑. 内容的安排由简单到复杂，由直观到抽象，循序渐进，便于学生理解和接受，叙述中概念清晰，推理严谨，并配有较多的例题和习题.

本书可作为高等学校计算机及相关专业的教材，也可供从事计算机科学、自动控制、电子工程等专业的科学工作者及工程技术人员参考.

再版前言

本书自 1983 年第一版出版以来，已被多所高等院校选作计算机专业本科生的教材，在使用中受到广大师生的好评.

1994 年作者根据多年教学实践的体会，并听取了使用本书的一些高校的老师和学生的意见，进行了修改再版. 为了更好地适应计算机科学和技术发展的需要，本书对图论和数理逻辑两部分的内容进行了加强. 在第 8 章中增加了图的连通性、哈密顿图的判别、有向树中的数量关系、最优二元树等与计算机系统及应用密切相关的一些内容. 将原第 9 章扩充成第 9 章命题逻辑和第 10 章谓词逻辑，对内容的叙述上作了若干改动，增加了一些例题，使其讨论的内容更加丰富，包括在谓词逻辑中增加了前束范式的讨论. 鉴于第 4 章对一般代数系统的讨论显得过于抽象和复杂，将第 4 章对一般代数系统的讨论，简化为对仅具有二元运算和一元运算的代数系统的讨论，其对象多为较简单且常见的代数系统，这使学生理解这些抽象的概念变得容易多了，而所引入的概念和讨论的结果仍具有一般性，即稍加推广，就可以适用于任意的代数系统. 对第 1、2、3、5、7 章的内容作了部分的修改. 简化了求集合最小(最大)集标准形式成员表方法的讨论，群中与子群相关的陪集分划的推导；对等价关系、逆函数以及子格等作了一些补充.

由于离散数学内容涉及面较宽，概念多，定理多，推理多，理论性强，学生学起来仍感到较为抽象. 为了使学生更好地理解教材中的各种概念、方法以及一些相互关系，同时也为了进一步培养学生逻辑思维、分析问题和知识应用的能力，本次修改版在每一章后面均增加了一节"实例解析"，并适当地补充了一些练习题，以加强对学生能力的训练. 另外，我们还将编写与本教材配套的《离散数学习题题解》(华中科技大学出版社出版)，可供学生在学习时参考.

本次修改除了补充上述内容之外，还对原书中发现的错误和疏漏一一做了订正.

全书的内容可视教学对象的基础或学时的多少进行取舍. 在学时较少的情况下，可以有选择地略去带"*"号的章节. 专科班的学生除可略去带"*"号的章节

外，还可略去 1.9 节、3.6 节、3.7 节和 7.6 节.

本书由洪帆主编，其中第 1 至第 8 章由洪帆修改补充，第 9、10 章由付小青修改补充，洪帆统编全稿.

在本书的修改再版过程中，得到了华中科技大学计算机学院许多教师的帮助和支持，得到了一些同仁和读者的关心和建议，华中科技大学出版社的工作人员为本书的编辑再版付出了辛勤的劳动. 在此，一并表示衷心的感谢.

由于水平所限，书中难免还会有些疏忽和错误，恳请读者批评指正.

编　　者

2008 年 10 月

于华中科技大学

前　言

由于计算机科学的发展和计算机应用领域的日益广泛，迫切需要用一些适当的数学工具来解决计算机科学各个领域中提出的有关离散量的理论问题. 离散数学就是适应这种需要而建立的. 它综合了计算机科学中所用到的研究离散量的各种数学问题，并进行系统的、全面的论述，从而为研究计算机科学提供了有力的理论基础和工具. 学习和研究离散数学对计算机科学的发展必将起着重要的促进作用.

离散数学是理工科高等院校计算机系重要的专业基础课，它不仅为计算机系有关的专业课，如数据结构、编译原理、操作系统，可计算性理论、人工智能、形式语言与自动机、信息管理与检索以及开关理论等，作了必要的数学准备，而且为学生今后从事计算机科学各方面的工作提供重要的工具. 此外，通过离散数学的学习，还可进一步培养学生抽象思维和逻辑推理的能力，因而具有较强的独立学习和工作的能力.

离散数学也是研究自动控制、管理科学、电子工程等的重要工具. 因此，它越来越受到各有关方面的科学工作者的重视.

离散数学的内容十分丰富，涉及的面也比较广，凡是以离散量作为其研究对象的数学均属于离散数学. 在本书中，不打算论及离散数学的所有内容，而着重讨论集合论、代数结构、图论和数理逻辑这四个方面. 因为着眼于为计算机和自动控制等各专业的学生、工作者以及有关工程技术人员提供必备的数学工具，所以对它们的讨论不可能像这些数学分支的有关专著那样深入，只能有选择地对一些在计算机科学中所用到的最基本和最重要的概念及其性质和方法加以叙述，其目的是使初学者对离散数学的基础知识有一个较全面、系统的了解，为今后在实际工作中应用这些知识或进一步学习有关的内容打下一个良好的基础.

本书是笔者根据华中工学院自动控制与计算机系软件专业学生所用的离散数学讲义修改、补充而成的. 在修改过程中，曾参考计算机学会教育专业组 1981 年 8 月在大连召开的计算机数学课程教学大纲讨论会所拟定的离散数学（单课型）教学大纲. 在内容的安排上，力求做到由直观到抽象，由简单到复杂逐步深入；在叙述上，力求做

到对基本概念的阐述通俗易懂，并配有各种例题，便于读者理解和掌握；最后，为了使篇幅不至太长，有些内容安排在练习中，希望读者通过正文的学习自己去完成. 本书的绝大部分内容曾在华中工学院软件专业的学生中作过多次讲授.

在本书的编写过程中，经常得到武汉大学数学系主任张远达教授的热情指导，张老师仔细审阅了原稿，提出了许多指导性的意见，使笔者受到不少的启发和教益. 集合论部分曾参考武汉大学齐民友教授编写的讲义，齐老师并对笔者原来的讲义提出了一些指导性的改进意见. 在此，对两位老师表示深切的谢意. 华中工学院自控与计算机系的领导对本书的编写工作给予了许多支持和帮助. 计算机软件教研室的有关同志为本书的编写提供了有益的参考资料，在对文稿的抄写和校对上给予了帮助. 余洪祖老师对最后一章提出了一些宝贵意见，王广泰老师对讲义的初稿提出了一些意见，最后一章曾参考北京大学陈进媛同志的讲义. 华中工学院出版社的有关同志为本书的编辑和出版花了很多工夫. 在此，一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，书中定有许多错误和不妥之处，恳切希望读者批评指正.

洪　帆

1983 年 2 月于华中工学院

目　录

第1章　集　　合

集合的概念是现代数学中最基本的概念之一，并已深入到各种科学和技术的领域中. 对于计算机科学工作者来说，集合的概念是不可缺少的. 在开关理论、有限自动机、形式语言等领域中，集合论有着广泛的应用.

本章介绍集合及其子集、幂集、分划等基本概念，集合的并、交、补运算以及这些运算的性质；介绍文氏图和成员表，它们是对集合进行运算和分析的有用工具；最后介绍集合的标准形式.

1.1　集　　合

集合是数学中的一个最基本的概念，很难再用别的词来定义它. 通常只是给予一种描述，即：

当把一些确定的、彼此不同的事物作为一个整体来考虑时，这个整体便称为是一个**集合**. 这里所说的"事物"也称"个体"，可以在极其广泛的意义上使用，甚至包括抽象的事物. 例如，全体中国人，一本书中的全部概念，一群羊，所有自然数，等等，都分别可以构成集合.

集合里所含有的个体称为集合的**元素**. 例如，全体中国人的集合，它的元素就是每一个中国人；一群羊的集合，它的元素就是该羊群中的每一只羊；所有自然数的集合，它的元素就是每一个自然数.

一般用大写拉丁字母表示集合，用小写拉丁字母表示元素. 如果 a 是集合 A 的元素，则记作"$a \in A$"，读作"a 属于集合 A"或"a 在集合 A 中". 如果 a 不是集合 A 的元素，则记作"$a \notin A$"，读作"a 不属于集合 A"或"a 不在集合 A 中". 例如，若用 $\mathbf{N}$ 表示自然数的集合，则 $2 \in \mathbf{N}$，$3 \in \mathbf{N}$，但 $2.3 \notin \mathbf{N}$，$-5 \notin \mathbf{N}$.

关于集合的概念，很重要的一点是当给出一个"个体"后，应该能够确定它是否是这个集合的元素. 例如，"百货商店里好看的花布"就不成为一个集合，因为对每一种布，没有确定的标准说它是"好看"还是"不好看". "这个班里的高个子学生"也不构成一个集合，因为在"高个子"与"不是高个子"之间没有明确的界限. 但是，如果给出一个完全确定的标准(如身高 $h \geqslant 1.7$ 米)，合乎这个标准的算是"高个子"，否则不算，那么对于这个班里的每一个学生，总可以明确地断定是否合乎这个标准，不会发生两可的情形，这时"这个班里的高个子学生"就构成一个集合.

下面介绍几个常见的集合的表示符号.

N:正整数或自然数集合$\{1,2,3,\cdots\}$.

Z:非负整数集合$\{0,1,2,3,\cdots\}$.

I:整数集合$\{0,-1,1,-2,2,\cdots\}$.

P:素数集合(只能被1和它本身整除,不能被其他正整数整除的大于1的正整数称作素数).

Q:有理数集合(有理数是可以表示成i/j形式的数,这里i和j都是整数,且$j\neq 0$).

R:实数集合(包括全部有理数和无理数).

C:复数集合(包括所有形如$a+\mathrm{i}b$的数,其中a、b是实数,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$).

$\mathbf{N}_m(m\geqslant 1)$:介于1和$m$之间的正整数集合,计入1和$m\{1,2,\cdots,m\}$.

$\mathbf{Z}_m(m\geqslant 1)$:介于0和$m-1$之间的非负整数集合,计入0和$m-1\{0,1,2,\cdots,m-1\}$.

对于集合,有下面两种常用的表示方法.

把集合的元素按任意顺序逐一写在一个花括弧里,并用逗号分开,这称为**列举法**.例如,设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是集合A的元素,此外A无其他元素,则集合A可表示为$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.又如,绝对值不超过3的所有整数的集合,可记作$S=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.列举法必须把元素的全体尽列出来,而不能遗漏任何一个,因此,如果一个集合含有许多元素时,用列举法是极其麻烦的.当集合含有无穷多个元素时,列举法更是无能为力.但对这种情形,有时也可列举出集合的一部分元素,而略掉的元素应能由列举出的元素以及它们前后的关系所确定,使得人们一看就明白.例如,$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$,$\mathbf{I}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$.但这种写法有时是很困难的,可采用另一种表示方法.

集合的另一种表示法称为**描述法**,它是利用详细说明元素$a\in A$的定义条件作出来的,即给定一个条件$P(x)$,当且仅当a使条件$P(a)$成立时,$a\in A$.其一般形式为$A=\{a\mid P(a)\}$,读成"A是使$P(a)$成立的所有元素a的集合".实际上,$P(a)$描述了一个规则或公式,它使得我们有可能确定a是否在A中.例如,绝对值不超过3的所有整数的集合用描述法可表示为$S=\{a\mid a\in\mathbf{I}$且$-3\leqslant a\leqslant 3\}$.又如,$B=\{a\mid a$是中国的省$\}$.

用描述法来表示一个集合,其方式并不是唯一的,因为对一个集合的元素往往可以用多种不同的方式来确定.例如,集合$\{1,2,3,4\}$的元素可定义为不大于4的自然数,也可定义为小于6而能整除12的自然数,因此集合$\{1,2,3,4\}$可表示为$\{a\mid a\in\mathbf{N},a\leqslant 4\}$,也可表示为$\{a\mid a\in\mathbf{N},a<6,a\mid 12\}$.

关于集合的概念,还有一点需要注意的是,对作为集合的元素的个体,并没有给它们施加什么限制.常常有一些集合,其元素本身也是集合.例如,$A=\{5,\{1,2\},d,\{q\}\}$,$B=\{\{1\},\{2,3\},\{1,3\}\}$.对于这种情形,重要的是把集合$\{a\}$与元素$a$区别开来.例如,集合$\{q\}$是集合$A$的元素,$\{q\}\in A$,而$q$是集合$\{q\}$的元素,$q\in\{q\}$,但$q$不是$A$的元素,即$q\notin A$.

然而,对"包罗一切的集合"或"由一切集合组成的集合"等类似的术语,必须避

免使用,因为它们会导致集合论中的**悖论**.例如,著名的罗素悖论:

把不包含自身作为元素的集合称为**寻常集**,而把包含自身作为元素的集合称为**不寻常集**.于是可知,一个集合或者是寻常集,或者是不寻常集,二者必居其一,且只居其一.今设 T 是由所有寻常集组成的集合,即

$$T = \{A \mid A\text{ 是集合}, A \notin A\}$$

现在考虑,T 是寻常集还是不寻常集?若 T 是寻常集,则由 T 的定义,T 必包含自身为元素,因此 T 是不寻常集.这与假设矛盾,故 T 不是寻常集,即 T 是不寻常集.然而由不寻常集的定义,就必须有 $T \in T$,因此 T 包含一个不寻常集为元素,这又与 T 的定义矛盾.这就是说,由于假定 T 的存在,无论 T 是寻常集或不寻常集都将引出矛盾.

又如,研究下述情况:某理发师跟且只跟城里所有不能给自己理发的人理发.定义 A 为城里所有由该理发师理发的人的集合,稍加考虑就会明白,A 一定是这样的集合,该理发师 $\in A$,而又有该理发师 $\notin A$.显然这是一个矛盾.因此集合 A 不存在.

定义 1-1 不含有任何元素的集合,称为**空集**,记作 $\varnothing$.

空集看起来很不自然,但却是一个有用的概念.例如,说"两条平行线的交点之集是一个空集"即是说"两条平行线没有交点".又如 $\{x \mid x \in \mathbf{I}, x^2 = 8\} = \varnothing$,即意味着方程 $x^2 = 8$ 没有整数根.一般说来,如果想要证明命题 $P(x)$ 对于一切 x 均不真,则只要证明 $\{x \mid P(x)\} = \varnothing$ 即可.

集合 A 中不同元素的数目,称为集合 A 的**基数**,用 $\# A$ 表示.当集合 A 具有有限数目的不同元素,亦即 $\# A$ 为有限时,称 A 为**有限集**,否则称 A 为**无限集**.前述的集合 $\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 都是无限集;集合 $\mathbf{N}_m$ 和 $\mathbf{Z}_m$ 是有限集,因为 $\# \mathbf{N}_m = \# \mathbf{Z}_m = m$.对于集合的基数,后面还要较详细地进行讨论.

1.2 集合的包含和相等

集合的包含和相等是集合间的两个基本关系.

定义 1-2 设有集合 A、B,如果 A 的每一个元素都是 B 的元素(即若 $a \in A$,必有 $a \in B$),则称 A 是 B 的**子集**,或说 A 被包含于 B 中(或 B 包含 A),记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.反之,若 A 不是 B 的子集,则记作 $A \nsubseteq B$ 或 $B \nsupseteq A$.

例 1 设 $A = \{a,c,d,e\}$,$B = \{a,b,c,x,y\}$,$C = \{a,b\}$,则有 $C \subseteq B$,但 $C \nsubseteq A$.

注意区别属于关系和包含关系.属于关系 $a \in A$ 是指集合 A 的元素 a 与集合 A 的关系,而包含关系 $C \subseteq A$ 是指集合 A 与另一个集合 C 之间的关系.

例 2 设 $A = \{a,b,c,d\}$,则有 $a \in A$,而 $\{a\} \subseteq A$.

由属于关系和包含关系的定义可知,并不排斥同时有 $A \in B$ 和 $A \subseteq B$ 的可能性.

例 3 设 $A = \{a,b,c\}$,$B = \{\{a,b,c\},a,b,c\}$,则显然有 $A \in B$,同时 $A \subseteq B$.

关于集合的包含有如下重要性质.

(1) 对于任意的集合 A，有 $\varnothing \subseteq A$；

(2) 对于任意的集合 A，有 $A \subseteq A$；

(3) 对于任意的集合 A、B、C，若 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则有 $A \subseteq C$.

性质(2) 和(3) 的成立是明显的. 下面仅证明性质(1)，现用反证法，设空集 $\varnothing$ 不是某集合 A 的子集，即 $\varnothing \not\subseteq A$，则必存在元素 $x \in \varnothing$ 而 $x \notin A$，这与空集的定义矛盾，因此，$\varnothing \subseteq A$.

定义 1-3 设有集合 A、B，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，B 的每一个元素也都是 A 的元素，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A = B$.

显然，所谓集合 A 与集合 B 相等，即意味着 A 与 B 具有完全相同的元素.

由定义 1-2 和定义 1-3 可知，当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 时，有 $A = B$.

定义 1-3 的实质是一个集合由它的全部元素所确定.

下面给出一些相等集合和不等集合的例子.

例 4 $\{1,2,4\} = \{1,2,2,4\}$

这就是说，在集合的列举法表示法中，某个元素的符号重复出现，不会改变这个集合. 然而为了叙述的方便，今后不使用这种表示方法，而要求列举的元素各不相同.

例 5 $\{1,4,2\} = \{1,2,4\}$

这说明在集合的列举法表示法中，若将元素的次序任意改变，集合不变.

例 6 设 $P = \{\{1,2\},4\}$，$Q = \{1,2,4\}$，则 $P \neq Q$. 又$\{\{1\}\} \neq \{1\}$.

如果 $A = \{x \mid x(x-1) = 0\}$，$B = \{0,1\}$，则 $A = B$.

定义 1-4 设有集合 A、B，若 $A \subseteq B$，且 $A \neq B$，则称集合 A 是集合 B 的**真子集**，用 $A \subset B$ 表示.

例如，集合$\{1,2,3\}$ 是集合$\{x \mid x \in \mathbf{I}, -3 \leqslant x \leqslant 3\}$ 的真子集.

因为空集是每个集合的子集，所以可导出如下定理.

定理 1-1 空集合是唯一的.

证明 假设有两个空集合 $\varnothing_1$ 和 $\varnothing_2$，因为空集被包含于每一个集合中，因此有 $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$，$\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$，这意味着 $\varnothing_1 = \varnothing_2$.

1.3 幂　　集

任给一集合 A，我们知道空集和集合 A 都是 A 的子集. 对任何元素 $a \in A$，集合 $\{a\}$ 也是 A 的子集. 类似地，还可以举出 A 的其他子集. 下面讨论关于集合 A 的全部子集的集合.

定义 1-5 设有集合 A，由 A 的所有子集组成的集合，称为集合 A 的**幂集**，记作 2^A，即

$$2^A = \{S \mid S \subseteq A\}$$

例如，设$A=\{a\}$，则$2^A=\{\varnothing,\{a\}\}$

$B=\{a,b\}$，则$2^B=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$C=\{a,b,c\}$，则$2^C=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

空集$\varnothing$的幂集，仅含有元素$\varnothing$，即$2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$.

从上述例子可看出，当集合的基数增加时，集合的幂集的基数也随之增加. 对于有限集，下面的定理给出两者之间的关系.

定理 1-2 设A是具有基数$\# A$的有限集，则$\#(2^A)=2^{\# A}$.

证明 设$\# A=n$，从n个元素中选取i个不同元素的方法共有C_n^i种，这里

$$\mathrm{C}_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

所以A的不同子集的数目(包括$\varnothing$)为

$$\#(2^A)=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n$$

由二项式定理可知

$$(x+y)^n=\mathrm{C}_n^0x^n+\mathrm{C}_n^1x^{n-1}y+\mathrm{C}_n^2x^{n-2}y^2+\cdots+\mathrm{C}_n^ny^n$$

令$x=y=1$，便有

$$2^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n$$

所以$\#(2^A)=2^n$. 因为$\# A=n$，故有$\#(2^A)=2^{\# A}$. 证毕.

当集合A的元素个数较多时，要毫无遗漏地列出集合A的所有子集是一件相当困难的事情. 现在引进一种表示法，按照这种表示法，能够毫无遗漏地列出一个有限集合的每一个子集. 为此，对所给集合的元素规定某种次序，使得某个元素可以称为第一个元素，另一个元素称为第二个元素，等等(虽然在集合的定义中，并没有这样一种次序)，即给每一元素附加一个标号，以便描述这个元素相对于该集合其他元素的位置. 例如，在集合$A=\{a,b,c\}$中，可以令a是第一个元素，b是第二个元素，c是第三个元素. 在A的子集中，常常是有一些元素出现，而其余的元素不出现. 根据这一情况以及指定给集合中各元素的次序，就用以下方式来表示所有的子集，例如，A的各个子集可以表示为

$$B_{000}=\varnothing,\quad B_{001}=\{c\},\quad B_{010}=\{b\},\quad B_{011}=\{b,c\},\quad B_{100}=\{a\},$$
$$B_{101}=\{a,c\},\quad B_{110}=\{a,b\},\quad B_{111}=\{a,b,c\}$$

因此
$$2^A=\{B_{000},B_{001},B_{010},B_{011},\cdots,B_{110},B_{111}\}$$

其中，B的下标是一个三位的二进制数，每一位对应集合A中的一个元素，左边第一位是1还是0表示第一个元素a在子集中出现与否. 类似地，第二位和第三位是1还是0分别表示第二个元素b和第三个元素c在子集中出现与否. 于是，A的任一子集都可用$000\sim111$中的某一下标来表示；反之，若给出这8个(即2^3个)下标中的任何一个，就能够确定出相应的子集.

假设集合$J=\{j\mid j$是二进制数，$000\leqslant j\leqslant 111\}$，则有