华大精制 高校教材

21世纪高等教育本科规划教材

数学系列

丛书主编 郑玉美

线性代数

XIANXING DAISHU

（第二版）

主编 陈方年 杨文权

SHUXUE XILIE

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

21 世纪高等教育本科规划教材·数学系列

丛书主编　郑玉美

线 性 代 数

（第二版）

主　　编　陈方年　杨文权

副 主 编　张清平　梁　军

张姝清

华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈方年,杨文权主编. —2 版.
—武汉:华中师范大学出版社,2009.6
(21 世纪高等教育本科规划教材·数学系列)
ISBN 978-7-5622-3940-6
Ⅰ.线…　Ⅱ.①陈…②杨…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.O151.2
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 069125 号

线性代数
(第二版)

主编:陈方年　杨文权
责任编辑:曾太贵　　责任校对:王　炜　　封面设计:梦　娜
编辑室:第二编辑室　　电话:027－67867362
出版发行:华中师范大学出版社©
社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号
电话:027－67863040(发行部)　027－67861321(邮购)
传真:027－67863291
网址:http://www.ccnupress.com　　电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn
经销:新华书店总经销
印刷:湖北孝感日报印刷厂　　督印:章光琼
字数:235 千字
开本:787 mm×1092 mm　1/16　　印张:10.25
版次:2009 年 6 月第 2 版　　印次:2009 年 6 月第 1 次印刷
印数:1—3 100　　定价:17.50 元
欢迎上网查询、购书

21 世纪高等教育本科规划教材·数学系列

丛书编写委员会

21世纪高等教育本科规划教材·数学系列

丛书主编　郑玉美

《线性代数》编写委员会

主　　编　陈方年(江汉大学文理学院)

杨文权(江汉大学)

副 主 编　张清平(武汉生物工程学院)

梁　军(湖北大学知行学院)

张姝清(武汉科技大学中南分校)

编　　者　(以姓氏笔画为序)

尤正书(湖北大学知行学院)

方次军(湖北工业大学)

李　琦(武汉生物工程学院)

余　菲(武汉科技大学城市学院)

杨文权(江汉大学)

宋　翌(武汉生物工程学院)

张清平(武汉生物工程学院)

张姝清(武汉科技大学中南分校)

梁晓燕(武汉生物工程学院)

梁　军(湖北大学知行学院)

樊　艮(中南民族大学工商学院)

第 2 版

前　言

Ban 2

教材建设是一项长期的、艰巨的工作。一部好的教材必须经过师生反复施教、施学，不断探索，精益求精，集思广益，长期积累，不断完善，才能达到我们所追求的目标。

本系列教材自 2006 年出版以来，对它的使用进行了科学的实验和持续的跟踪调查，为修订做了充分的准备，力争将其打造成一套为社会所公认的精品。主要做了如下工作：

一是在部分学校开展了对比教学实验，即选择一到两种目前大家认为编写较好的教材，由同一位老师或不同的老师在不同的班级进行对比教学实验，并组织师生进行研讨，以发现我们的教材及对比教材的优缺点，为修订提供依据。

二是规定编者及使用者在实施教学的过程中，要注意发现并收集教材中的不足及错误，为修订做准备。

三是定期召开教材使用情况汇报研讨会，总结使用情况，收集使用信息。

有了以上准备，并在多方收集本系列教材使用情况的基础上，召开了由系列教材主编及部分使用教师参加的研讨会，认真听取了来自各方面的意见及建议，制订了本次修订的原则及修订内容，主要有以下几个方面：

1. 在保持并增强原有的“三用”原则及“三凸现”特色的基础上，特别注重在学生的数学素质和文化素养的培养上下功夫。

高等数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式，它包含着处理连续变量的基本理论和众多的科学思维方法，既是学习其他自然科学的重要基础，也是培养理性思维的理想载体；高等数学不仅是一种知识，而且是一种素养和文化。培养学生运用高等数学的观念去进行定量思维，切实解决工作中遇到的实际问题，是学习高等数学的目的之一。为达到上述目的，在第二版中，加强了数学与文化、数学与社会、数学与历史的联系和理解，从中不仅可使学生加深对数学概念与理论的理解，而且可从它们产生的历史背景、产生的过程及对社会发展的影响中吸取丰富的数学文化，提高文化素养。

2. 对第一版中存在的部分不够严谨的定义、定理进行了科学的、严密的、精

雕细刻式的订正与改写。

随着高等学校办学层次的多样化，为适应不同层次的教学需要，针对不同层次出版了较多的教材。现行的很多高等数学教材中对较为艰深的定理进行了通俗化的改写，使之便于教学，便于学生理解，这无疑是一个进步。但部分教材中这种改写不够严谨，存在严重的缺陷：一是加强了条件，使其实用面变窄；二是放宽了条件，导致定理在某些情况下失效、不真。为避免上述问题，我们对照经典著作，对教材中的每一个定义、定理进行了逐字逐句的斟酌修改，消除了上述问题，使教材处在一个科学、严密的体系之中。

3. 面对考研内容的变化，增加完备了考研必备的内容，以满足部分学生考研的需要。

4. 进一步强化了数学语言的应用，更正了书中一些知识性和科学性错误。

5. 为了使本系列教材具有更强的针对性和更广泛的代表性，本次修订调整并增加了部分主编和作者，他们为本书的修订提出了许多宝贵的建议，并对修订付出了辛勤的、创造性的劳动。

通过本次修订，本系列教材将有一个质的飞跃。但教材建设是一项长期的工作，不可能一蹴而就，还需要我们进一步努力探索。我们相信，通过我们的不懈努力，本套教材必定会成为社会所公认的精品教材。

编委会

2009 年 4 月 21 日

第1版

前　言

Ban 1

步入新世纪,中国的高等教育出现了崭新的格局.一大批独立院校相继成立,加入到传统的高等本科教育大军之阵线,它们常以“三本”的面目出现,正在成为高等教育的一支重要力量.这批新军(独立院校三本的学子们)在传统的教师们的率领下手抱着传统的教材以传统的方式苦战了好几个春秋,无论是独立院校的执教者还是勤奋的学子们都盼望能有适合于这批规模巨大的新型的独立院校的教材,这是势在必行又是势在必得的时代所需.郑玉美教授在成功推出《21世纪高等职业教育规划教材·数学系列》后,吸纳了湖北大学知行学院、武汉科技大学中南分校、武汉科技大学城市学院、中国地质大学江城学院、江汉大学文理学院、中南民族大学工商学院、武汉生物工程学院、武汉工程大学、湖北工业大学、武汉工业职业技术学院以及武汉职业技术学院(本科部)等独立院校一批经验丰富的教育专家又编写了一套具有“三用三凸一独”特点的《21世纪高等院校本科规划教材·数学系列》,以满足独立院校教学之急需.这套用心力作的教材具有以下特点:

1. 以“三用”为原则

(1) 够用　删去传统本科教材中难而繁的内容,保留理、工、农、医、管各本科专业的最基本的内容,达到满足本科高度所必需的最低限度,够用即可.

(2) 管用　增添以往传统教材中没有的同时又是必需的知识内容,使教材适合三类本科各专业之需要,达到管用的效果.

(3) 会用　淡化传统本科教材偏重理论的倾向,删去理论性较强的内容,强调数学知识的应用,力求学以致用、学后会用,增强学生学习数学的信心与兴趣.

2. 以“三凸现”为特色

(1) 凸现数学与文化的联系　对重要的数学概念与理论,着重讲解它们的历史背景、产生的过程及影响,同时有机地结合一些有趣的数学故事及有影响力的数学家的逸事进行讲解,尽量让学生全面了解数学,达到提高学生综合素质的目的.

(2) 凸现数学现代化教学手段的应用　将数学软件的使用有机地融合进教材中,不盲目追求运算技巧,着力于培养学生解决实际问题的能力.

(3) 凸现数学的应用性　如把有重要应用的“微元法”贯穿在整个高等数学教材中.

3. 体现独立院校的“独”字,全套教材从知识的分量、难易程度、结构分布等方面更适合独立院校“三本”之需要.如高等数学以一元微积分、多元微积分为主线,而将多元微积分浓缩为多元微分学与多元积分学两大块,将微分方程、无穷级数放在一元微积分学之后,这样使“三本”学生们易于接受、掌握.

为了使本套教材有更宽广的适应性，可供独立院校中的高等专科生选用，在保证科学性和逻辑性的前提下，我们在编写时更注重培养学生良好的学习习惯，提高学生的综合素质.为此，我们力求全套教材语言准确生动、简洁而清晰，思想有条有理、精练而富逻辑.在每章正文后附有本章小结，设计一个“本章知识结构导航图”，让读者们对全章主要内容一目了然；归纳小结“本章主要内容及重点、难点”，让同学们心中有一个全章小“仓库”.此外，还安排了全章综合练习，供学有余力的学生去品尝一下课外的套餐.

本套教材共六种:《高等数学》(上)、《高等数学》(下)、《高等数学全程辅导与提高》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《概率论与数理统计学习指导》.

全套书的框架结构、统稿定稿由郑玉美教授及各册的主编负责，齐民友、任德麟、邓宗琦教授认真审阅了全部教材的原稿，提出了许多建设性意见，在此对三位资深教授表示衷心的感谢.

参加《线性代数》编写的有方次军、李琦、余菲、杨文权、宋翌、张清平、张妹清、梁军、樊艮.全书由杨文权统稿、定稿，由郑玉美主审.

虽然各位编者十分努力，但由于水平有限，成书时间又很仓促，本套教材可能还有不少缺点和错误，欢迎广大师生、读者批评指正.

编委会

2006 年 8 月

目　　录

Mulu

第 1 章

行列式

Zhang 1

在大多数科学中，后一代人往往撕毁了前一代人所建立的成就，但在数学中，每一代人都是在老的结构上建立新的成果.

——汉克尔·赫尔曼

行列式是从解线性方程组的需要中产生和建立起来的，它是一个重要的数学工具. 本章先介绍二、三阶行列式，并把它推广到 n 阶行列式，然后给出行列式的性质和计算方法，最后介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

1.1 行　列　式

1.1.1 二阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

其中 x_1,x_2 为未知量，$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 为未知量的系数，b_1,b_2 为常数项.

解此方程，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，有

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

为了便于叙述和记忆，引入符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

来表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，便得到如下二阶行列式的定义.

定义 1.1　将 2×2 个数排成两行两列，并在左、右两侧各加一竖线，得到算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-3}$$

称为二阶行列式，记为 D.

(1-3)式右边展开式共有 2! 项，每一项为取自不同行不同列的两个元素之积. $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 称为二阶行列式的元素，这四个元素排成一个正方形，横排称为行，竖排称为列. 二阶行列式共有两行两列，每个元素 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 的第一个下标 i 表示元素所在的行，称为行

标，第二个下标 j 表示元素所在的列，称为列标. 如 a_{21} 表示该元素是行列式中第二行第一列的元素.

上述二阶行列式，可用如图 1.1 所示的对角线法则来帮助记忆：

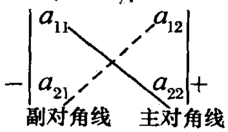

图 1.1

从二阶行列式的左上角到右下角的对角线称为主对角线(实线)；右上角到左下角的对角线称为副对角线(虚线). 主对角线上的元素之积取正号，副对角线上的元素之积取负号. 二阶行列式的值就是这两项的代数和.

二元线性方程组的解(1-2)式中的分子也可用二阶行列式来表示：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

其中 $D_i(i=1,2)$ 表示把 D 中第 i 列元素换成(1-1)式右边相对应的常数列元素所得到的行列式.

于是，当 $D\neq 0$ 时，二元线性方程组(1-1)的解就可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}.\tag{1-4}$$

例 1 计算下列各行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -\tan x \\ \cot x & 1 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=5\times 3-(-1)\times 2=15+2=17.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -\tan x \\ \cot x & 1 \end{vmatrix}=1\times 1-(-\tan x)\cot x=1+1=2.$

例 2 解二元线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2=1, \\ 3x_1+x_2=0. \end{cases}$

解 计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1\times 1-2\times 3=-5,\quad D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\times 1-2\times 0=1,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=1\times 0-1\times 3=-3.$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{1}{5},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}.$$

1.1.2 三阶行列式

设三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1-5}$$

利用加减消元法可求出类似于二元线性方程组的解 x_1,x_2,x_3.

同样为了便于记忆,类似于二阶行列式将 $a_{11},a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23},a_{31},a_{32},a_{33}$ 九个数排成三行三列的方形.

定义 1.2 将 3×3 个数排成三行三列,并在左、右两侧各加一竖线,得到算式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\tag{1-6}$$

称为三阶行列式,记为 D.

(1-6)式右边展开式共有 3! =6 项,每一项均为取自不同行不同列的三个元素的乘积,并按一定的规则取正号或负号. 三阶行列式可用下面的对角线法则记忆.

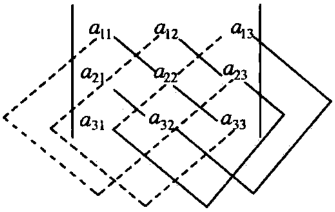

图 1.2

从左上角到右下角的对角线称为主对角线,从右上角到左下角的对角线称为副对角线. 实线看做是平行于主对角线的连线,虚线看做是平行于副对角线的连线,实线上三个元素之积取正号,虚线上三个元素之积取负号,其代数和就是这个三阶行列式的值.

式(1-6)中的 D 称为三元线性方程组(1-5)的系数行列式. 根据三阶行列式的定义,有

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}.$$

当 $D\neq0$ 时,三元线性方程组(1-5)有唯一的解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中 $D_i(i=1,2,3)$是把系数行列式 D 中的第 i 列元素换成与线性方程组(1-5)右边相对应的常数列元素所得到的行列式.

例 3 计算行列式 $\begin{vmatrix}2&1&-1\\0&3&4\\-2&5&4\end{vmatrix}$ 的值.

解 利用对角线法则

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2\times3\times4+1\times4\times(-2)+(-1)\times0\times5-(-1)\times3\times(-2)-1\times0\times4$$

$$-2\times4\times5=-30.$$

例 4 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-abc-abc-abc=a^3+b^3+c^3-3abc.$

例 5 解方程组 $\begin{cases} 3x_1+\ x_2+x_3=8, \\ x_1+\ x_2+x_3=6, \\ x_1+2x_2+x_3=8. \end{cases}$

解 因为 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq0.$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2,\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}=-4,\quad D_3=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix}=-6.$$

所以方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1, x_2=\dfrac{D_2}{D}=2, x_3=\dfrac{D_3}{D}=3.$

1.1.3 全排列及其逆序数

1. 排列的逆序数

自然想到,解四元线性方程组可以用 4 阶行列式,……,解 n 元线性方程组要用 n 阶行列式.

用对角线法则计算二、三阶行列式虽然直观,但对于四阶行列式及更高阶行列式,该方法就不适用了.为了求解四元及四元以上的线性方程组,需要把二、三阶行列式的概念进一步推广.为此,下面先介绍全排列及其逆序数的概念及性质.

自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 按一定次序排成一排,称为一个 n 元排列,记为 $p_1p_2\cdots p_n$,排列 $12\cdots n$ 称为自然排列.n 元排列总共有 $n!$ 个.例如自然数 1,2,3 共有 $3!=6$ 个排列,它们是 123,132,213,231,312,321.

我们将自然排列规定为标准次序.下面定义排列的逆序数.

定义 1.3 **在一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,若一个大的数排在一个小的数的前面(即与标准次序不同时),则称这两个数有一个逆序.一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数,记为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$.**

例如,在四元排列 4132 中出现的所有逆序为 41,43,42,32,所以

$$t(4132)=4.$$