

中等專業學校教科書

工業、農林、財經性質專業適用

几 何

上 册

(平面部分)

高等教育出版社

中等专业学校教科书

工、农、医、财经类专业数学

几 何

上 册

(中国出版)

高等教育出版社

13.19
3423
VI(26)

018
16/1
中等專業學校教科書

几 何

上 册

(平面部分)

工業、農林、財經性質專業適用

高等教育出版社

說 明

我司組織中等專業學校數學教師汪良材、張子干、張永丰、章景星、曹安礼、楊英明、駱鳳和七位先生，根據我部 1955 年批准的 300 小時和 410 小時的中等專業學校數學教學大綱，採取分工編寫、集體討論的辦法，編出了中等專業學校工業、農林、財經性質專業適用的代數、幾何、三角、高等數學教科書。這些書對醫藥性質專業也能作參考用。

這本平面幾何教科書是張子干先生參照蘇聯安特烈也夫所著“初等幾何學教程”上冊編寫的。初稿曾在今年春天印發部分學校征求意见。根據各校寄來的許多寶貴意見，作了較大的修改。本書初步定稿後，曾請北京師範大學梁紹鴻先生審閱。梁先生在百忙中抽時間給本書提供了進一步修改的寶貴意見，使本書在付印前能由編者再作一次修正。在這裡，對梁先生的熱忱幫助表示感謝。

由於時間倉促，匆匆付印，缺點在所難免。希望中等專業學校教師以及使用本書讀者多提意見（意見請寄北京高等教育出版社轉我司），以便再版時一併修正。

高等教育部中等專業教育司

1956 年 5 月

幾 何 上 冊

高等教育部中等專業教育司編

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

上海集成印制廠印刷 新華書店總經售

書號 13010·94 開本 850×1168 1/32 印張 37/16 字數 89,000

一九五六年七月上海第一版

一九五六年七月上海第一次印刷

印數 1—420,000

定價(8) ¥ 0.42

目 錄

第一章 線段的度量 比例線段	1
I. 線段的度量	1
II. 比例線段	9
第一章習題	19
第二章 相似形	23
I. 位似變換	23
II. 相似三角形	29
III. 相似多邊形	34
第二章習題	37
第三章 關於三角形的和圓的度量關係	42
I. 三角形及平行四邊形的元素之間的度量關係	42
II. 和圓有關的度量關係	48
第三章習題	49
第四章 正多邊形和圓周長的計算	56
I. 正多邊形	56
II. 圓周長的計算	62
第四章習題	77
第五章 多邊形和圓的面積	80
I. 等積多邊形和相等組成的多邊形	80
II. 多邊形的面積	83
III. 多邊形面積的比	91
IV. 用三角函數表示三角形、平行四邊形和正多邊形的面積	93
V. 圓的面積	96
第五章習題	99

第一章 線段的度量 比例線段

I. 線段的度量

§ 1. 基本概念 直線上任意兩點間的部分叫做線段。這兩點叫做線段的端點。

線段常用標記它的端點的兩個大寫字母來表示，例如，線段 AB (圖 1)。也有用一個小寫字母來表示的，例如，線段 a (圖 2)。



圖 1.



圖 2.

為了比較兩條線段 AB 和 CD 的長短，我們把線段 AB 放到線段 CD 上，使 A 點和 C 點重合，並順着 CD 落下。如果 B 點和 D 點重合 (圖 3)，那末就說，線段 AB 就等於線段 CD ($AB=CD$)。如果 B 點落

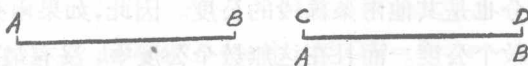


圖 3.

在 C 點和 D 點之間 (圖 4)，那末就說，線段 AB 小於線段 CD ($AB<CD$)。

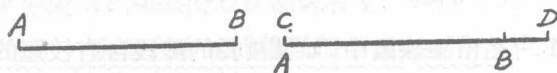


圖 4.

如果 B 點落在 CD 的延長線上 (圖 5)，那末就說，線段 AB 大於線段 CD ($AB>CD$)。

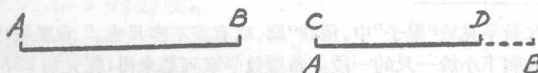


圖 5.

上面所說是兩線段大小關係的概念。我們進一步來研究怎樣度量線段，也就是怎樣用數來表示線段的長度問題。

線段的度量以下的公理為基礎。

或不容尺公理^① 如果 AB 和 CD 是任意兩條線段，而且 $AB > CD$ ，在 AB 上從 A 點起連續截取等於 CD 的線段，截到某次後，或者沒有剩餘，或者剩下比 CD 小的一段。換句話說，就是存在一個正整數 n ，使得 $n \cdot CD \leq AB < (n+1)CD$ 。

§ 2. 兩條線段的公度 如果兩條線段都恰好含有第三條線段的整數倍而沒有剩餘，第三條線段便叫做原來兩條線段的公度。

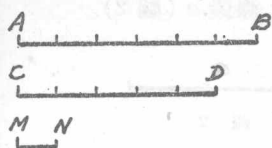


圖 6.

例如，線段 AB 恰好含有線段 MN 的 6 倍（圖 6），線段 CD 恰好含有線段 MN 的 5 倍，那末線段 MN 就是線段 AB 和 CD 的公度。

兩條線段如果有公度就叫做有公度線段，公度中最大的叫做最大公度。

顯然，如果一條線段是其他兩條線段的公度，把這條線段分成許多等分，每一等分也是其他兩條線段的公度。因此，如果兩條線段有一個公度，就有無數個公度。而且在這無數個公度中，沒有最小的，但有一個最大的。

§ 3. 最大公度定理 求兩條線段的最大公度要根據下面兩個定理：

定理 1. 在兩條線段中，如果較長的線段含有較短的線段的整數倍而沒有剩餘，那末較短的線段就是它本身和較長的線段的最大公度。

假設線段 AB （圖 7）恰含有線段 CD 的 n 倍。顯然，線段 CD 是它

^① 或不容尺最早見於“墨子”中，他說“窮、或有前不容尺也。”意思是：如果用尺去量東西，或者量完，或者剩下小於一尺的一段。希臘數學家阿基米得（紀元前 287 年—紀元前 212 年）也曾經提過這個公理。他比墨子大約晚 200 年。

本身的1倍。由此可知線段 CD 是線段 AB 和線段 CD 的公度。因為線段 CD 不可能含有比它本身更大的任何線段的整數倍，所以線段 CD 是線段 AB 和線段 CD 的最大公度。

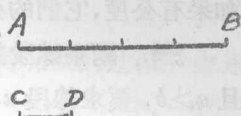


圖 7.

定理 2. 在兩條線段中，如果較長的線段含有較短的線段的整數倍而有剩余，那末這兩條線段的最大公度（如果存在的話）等於較短的線段和剩余線段的最大公度。

設線段 AB 含有線段 CD 的 n 倍而有剩余 $MB=r$ (圖 8)。即：

$$AB = n \cdot CD + r.$$

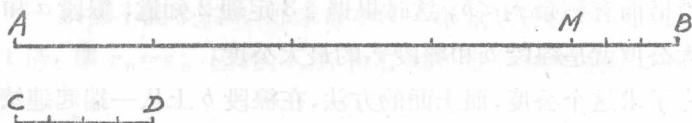


圖 8.

由這個等式知道，(1) 如果線段 CD 和線段 r 都含有某一線段 q 的整數倍而沒有剩余，那末線段 AB 一定也含有 q 的整數倍而沒有剩余。換句話說，如果 q 是 CD 和 r 的公度，那末它一定也是 CD 和 AB 的公度。

例如，在等式 $AB = 4CD + r$ 中，設 $CD = 4q$ ， $r = 3q$ ，於是 $AB = 4(4q) + 3q = 19q$ 。這說明了如果 q 是 CD 和 r 的公度，它也是 CD 和 AB 的公度。

(2) 如果線段 AB 和線段 CD 都含有某一線段 q 的整數倍而沒有剩余，那末線段 r 一定也含有 q 的整數倍而沒有剩余。換句話說，如果 q 是 AB 和 CD 的公度，那末它一定也是 CD 和 r 的公度。

例如，在等式 $AB = 4CD + r$ 中，設 $AB = 19q$ ， $CD = 4q$ ，於是 $r = AB - 4CD = 19q - 4(4q) = 3q$ 。這說明了如果 q 是 AB 和 CD 的公度，它也是 CD 和 r 的公度。

因此，兩組線段

AB 和 CD ， CD 和 r

如果有公度，它們的公度就完全相同，所以它們的最大公度也相同。

§4. 兩條線段的最大公度的求法 設線段 a 和線段 b 有公度，並且 $a > b$ ，要求線段 a 和線段 b 的最大公度，我們就在線段 a 上從一端起，連續截取等於 b 的線段，截到某次以後，根據或不容尺公理，就會產生下面兩種情況中的一種：

(1) 正好截完，一點沒有剩餘，也就是線段 a 含有線段 b 的整數倍而沒有剩餘。這時根據 §3 定理 1 知道，線段 a 和線段 b 的最大公度就是 b 。

(2) 沒有截完，而剩下的一段 r_1 小於 b ，也就是線段 a 含有線段 b 的整數倍而有剩餘 $r_1 < b$ ，這時根據 §3 定理 2 知道，線段 a 和線段 b 的最大公度就是線段 b 和線段 r_1 的最大公度。

為了求這個公度，照上面的方法，在線段 b 上從一端起連續截取等於 r_1 的線段，截到某次以後，也會產生下述兩種情況中的一種：或者正好截完沒有剩餘，這時 r_1 就是 r_1 和 b 的最大公度，也是 b 和 a 的最大公度；或者沒有截完，而剩下的一段 $r_2 < r_1$ 。對於 r_2 來說，也有類似的情況發生。

這樣繼續輾轉相截，所截得的結果可以表示如下：

$$a = n_1 b + r_1, \quad r_1 < b$$

$$b = n_2 r_1 + r_2, \quad r_2 < r_1$$

$$r_1 = n_3 r_2 + r_3, \quad r_3 < r_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$r_{m-2} = n_m r_{m-1} + r_m, \quad r_m < r_{m-1}$$

$$\dots\dots\dots$$

從這些式子我們知道，在剩餘線段 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_m, \dots$ 中，如果有一條，例如 r_{m-1} ，含有下一回剩餘線段 r_m 的整數倍而沒有剩餘，那末 r_m 就是 a 和 b 的公度。這個道理很明顯，因為 r_{m-1} 含有 r_m 的整數倍而沒有剩餘。根據 §3 定理 1， r_m 是 r_m 和 r_{m-1} 的最大公度，再根據 §3 定理 2， r_m 也是 r_{m-1} 和 $r_{m-2}, \dots, r_1$ 和 b 的最大公度。因而也是 b 和

a 的最大公度。

假若線段 a 和 b 有公度，我們就能夠斷定輾轉相截的過程不會永遠不停地繼續進行，也就是在剩余線段 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_m, \dots$ 中，一定能夠找到這樣一條，例如 r_{m-1} ，它含有下一回剩余線段 r_m 的整數倍而沒有剩余。下面我們來說明這個道理。

設 s 是線段 a 和 b 的最大公度，那末 s 也是 b 和 r_1, r_1 和 $r_2, \dots, r_{m-1}$ 和 $r_m, \dots$ 的最大公度 (§ 3 定理 2)。所以剩余線段 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_m, \dots$ 都含有 s 的整數倍而沒有剩余。又知道這些剩余線段一條比一條小，所以它們含有 s 的整數倍也一條比一條少。由於這些剩余線段中的任何一條都不能小於 s ，那末最小的一條剩余線段，例如 r_m ，只能是 s 的 1 倍，即 $r_m = s$ 。因此， r_{m-1} 含有 r_m (即 s) 的整數倍而沒有剩余。

例。設 AB 和 CD 是已知的兩條線段 (圖 9)，且 $AB > CD$ ，求 AB 和 CD 的最大公度。

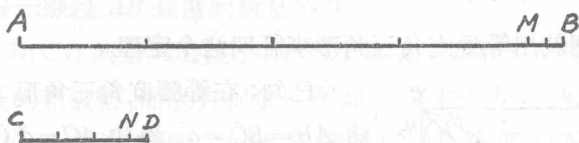


圖 9.

在線段 AB 上，從 A 點起，連續截取等於 CD 的線段，假定截了 4 次，得剩余線段 $MB < CD$ 。再在線段 CD 上從 C 點起，連續截取等於 MB 的線段，假定截了 3 次，得剩余 $ND < MB$ 。又在 MB 上從 M 點起，連續截取等於 ND 的線段，假定截了 2 次，正好截完，沒有剩余。於是

$$AB = 4CD + MB,$$

$$CD = 3MB + ND,$$

$$MB = 2ND。$$

所以

$$AB=4(3MB+ND)+MB=4(3\cdot 2ND+ND)+2ND=30ND,$$

$$CD=3\cdot 2ND+ND=7ND。$$

因此 ND 是 AB 和 CD 的最大公度。

§ 5. 無公度線段 兩條線段如果沒有公度,就叫做無公度線段。

上節已經講過,輾轉相截一定能夠求得兩條有公度線段的最大公度。如果兩條線段沒有公度,輾轉相截的過程就要永遠不停地繼續進行;不然,已知的兩條線段就有公度了。但是,在輾轉相截時,好像可能得到這樣一條剩餘線段,從表面上看來,上一回的剩餘線段正好含着它的整數倍而沒有剩餘,因而懷疑無公度線段的存,實際上,這時還應該有更小的剩餘線段,不過受了儀器和視覺的限制,觀察不到罷了。下面的定理說明了無公度線段確實是存在的。

定理 正方形的對角線和它的邊無公度。

因為每個正方形都被它的一條對角線分為兩個全等的等腰直角三角形。所以這個定理也可以這樣說:等腰直角三角形的斜邊和直角邊無公度。

我們就用等腰直角三角形來證明這個定理。

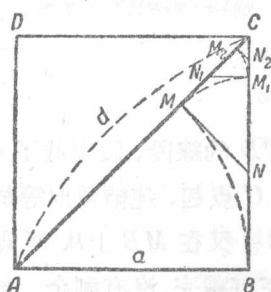


圖 10.

已知: 在等腰直角三角形 ABC 中, 直角邊 $AB=BC=a$, 斜邊 $AC=d$ (圖 10)。

求證: a 和 d 無公度。

證明: 首先用 AB 去截 AC 。以 A 點為圓心, AB 為半徑畫弧交 AC 於 M 點。在三角形 ABC 中, $AB < AC < AB + BC$, 也就是 $AB < AC < 2AB$, 所以用等腰直角三角形 ABC 的直角邊 AB 去截斜邊 AC , 截 1 次後得剩餘線段 $r_1 = MC < a$ 。因此

$$d = a + r_1, \quad r_1 < a。$$

其次, 用 $r_1 = MC$ 去截 AB 。因為 $AB = BC$, 為了方便, 我們就用 $r_1 = MC$ 去截 BC 。過 M 點作垂直於 AC 的直線 MN 交 BC 於 N 點,

就得 $MN=BN$ (由圓外一点向圓上引的兩切線相等), 和 $MN=MC$ (它們是等腰直角三角形 CMN 的直角边)。因此, 用 $r_1=MC$ 去截 BC , 截了一段 $BN=MC=r_1$ 后, 如果再截下去, 就变成了用等腰直角三角形 CMN 的直角边 $r_1=MC$ 去截斜边 NC 的問題了。

由此可見, 照这样繼續輾轉截下去, 每次总是重行上次的手續, 这样就永远不會截完。因此 a 和 d 無公度。

§ 6. 線段度量的概念 为了要度量一条線段, 例如 AB , 我們取另一条線段 CD , 把它叫做長度單位, 並在線段 AB 上从一端起連續截取等於長度單位的線段。这个过程就叫做用長度單位 CD 去量線段 AB 。由於被量線段 AB 和長度單位 CD 可能有公度, 也可能沒有公度。因此, 我們分兩種情形來研究:

第一種情形 設被量線段 AB 和長度單位 CD 有公度。

如果 AB 和 CD 的最大公度是 CD 。用 CD 去截 AB , 截了若干次, 比如說 8 次, 恰好截完, 沒有剩余。那末線段 AB 的長度就是 8 個單位。这时表示線段 AB 長度的数是整数 8。

如果 AB 和 CD 的最大公度小於 CD , 那末 AB 和 CD 都含着它們的最大公度的整数倍, 而沒有剩余。例如, AB 和 CD 分別含着它們的最大公度的 11 倍和 4 倍。这时表示線段 AB 長度的数是分数 $\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$ 。

通常, 表示線段長度的数是用十進小数。为了把線段 AB 長度的数表成十進小数, 我們用長度單位 CD 去截 AB (如果 AB 大於 CD 的話), 截了若干次 (比如說 2 次) 后, 剩下小於 CD 的一段 r_1 , 再用 $\frac{1}{10}CD$ 去截 r_1 , 截了若干次 (比如說 7 次) 后, 剩下小於 $\frac{1}{10}CD$ 的一段 r_2 , 再用 $\frac{1}{100}CD$ 去截 r_2 , 截了若干次 (比如說 5 次) 后, 正好截完, 沒有剩余。这时表示線段 AB 長度的数是 2.75。这是一个有限十進小数, 把它化为分数, 就得 $\frac{11}{4}$ 。所以 $AB=\frac{11}{4}CD$ 。这时 AB 和 CD 的最大

公度是 $\frac{1}{4}CD$ 。

有时用長度單位 CD 去量線段 AB , 得一个循环小数, 例如 $5.1666\cdots$, 把它化为分数得 $\frac{31}{6}$, 即 $AB = \frac{31}{6}CD$ 。所以 AB 和 CD 的最大公度是 $\frac{1}{6}CD$ 。

总起来說, 当被量線段 AB 和長度單位 CD 有公度时, 用 CD 去量 AB , 所得的数是一个整数或分数。也就是一个有理数。如果 AB 和 CD 的最大公度是 CD , 那末表示 AB 長度的数是一个整数; 如果 AB 和 CD 的最大公度小於 CD , 那末表示 AB 長度的数是一个分数 (有限十進小数或循环小数)。

第二种情形 設被量線段 AB 和長度單位 CD 沒有公度。

用 CD 去量 AB (圖11)。由或不容尺公理 (§ 1), 可以求得这样一

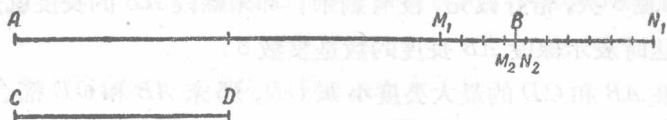


圖 11.

个正整数 n , 使 $n \cdot CD < AB$, 且 $(n+1)CD > AB$ 。例如, 設 $n=2$, 就是 $2CD < AB$, 且 $3CD > AB$ 。設 $2CD = AM_1$, 且 $3CD = AN_1$ (圖 11)。那末 $AM_1=2$ 是 AB 的不足近似值, $AN_1=3$ 是 AB 的过剩近似值。因为 AB 和 AM_1 或 AN_1 的差都小於長度單位 CD , 所以用 AM_1 或 AN_1 表示 AB 的長度都准确到 1。把線段 $M_1N_1=CD$ 分为 10 等分, 仍由这个公理, 又能夠求得这样一个正整数, 例如 3, 使 $\frac{3}{10}CD < M_1B$, 且 $\frac{4}{10}CD > M_1B$ 。設 $\frac{3}{10}CD = M_1M_2$, $\frac{4}{10}CD = M_1N_2$, 那末 $AM_2=2.3$ 和 $AN_2=2.4$ 分别是 AB 准确到 0.1 的不足和过剩近似值。再把線段 $M_2N_2=\frac{1}{10}CD$ 分为 10 等分, 同样又能夠求得这样一个整数, 例如 6,

使 $\frac{6}{10} \left(\frac{1}{10} CD \right) = \frac{6}{100} CD < M_2 B$, 且 $\frac{7}{100} CD > M_2 B$ 。設 $\frac{6}{100} CD = M_2 M_3$, $\frac{7}{100} CD = M_2 N_3$, 那末 $AM_3 = 2.36$ 和 $AN_3 = 2.37$ 分別是 AB 准确到 0.01 的不足和过剩近似值。由於 AB 和 CD 沒有公度, 所以用 CD 、 $\frac{1}{10} CD$ 、 $\frac{1}{100} CD$ 、 $\dots$ 分別去量 AB 、 $M_1 B$ 、 $M_2 B$ 、 $\dots$ 时, 总有剩余。因此, 用 CD 量 AB , 就得到一个無限小数 $2.36\dots$ 。这个無限小数不可能是循环的, 因为循环小数都能化为分数, 这样就和題設矛盾了。

因此, 当被量線段 AB 和長度單位 CD 沒有公度时, 用 CD 量 AB , 所得的数是一个無限非循环小数。也就是一个無理数。

当度量線段时, 在大多数情形下, 只能根据所需要的准确度近似地表达出來。因此, 在对線段的近似長度進行运算时, 必須遵守近似数的数字計算法則。

由上面所講的度量線段的方法, 可以推出線段長度的三个基本性質:

1. 相等的線段有相同的長度。
2. 較大的線段有較大的長度。
3. 許多線段和的長度等於这些線段長度的和。

顯然, 用不同的單位去量同一線段时, 所量得的数也不相同。如果單位擴大若干倍, 所量得的数就縮小同样的倍数。例如, 用 1 厘米作为長度單位去量線段 AB , 如果量得的数是 35, 那末用 1 米 (即 100 厘米) 作为長度單位去量線段 AB , 量得的数就是 $0.35 = 35 \times \frac{1}{100}$ 。

今后如果我們說到線段的長度, 在長度單位已經确定了以后, 应当理解为表示線段長度的数。

II. 比例線段

§7. 兩線段的比 定义 兩条線段的比就是用同一个長度單位

去量這兩條線段所得的數的比。

例如，用長度單位 u 去量兩條線段 AB 和 CD ，如果所得的數分別為 a 和 b ，那末

$$AB:CD=a:b, \text{ 或 } \frac{AB}{CD}=\frac{a}{b}。$$

從一種長度單位變為另一種長度單位時，表示兩條線段長度的數也就從原來的兩個變為另外的兩個，後兩個是前兩個分別和同一個常數的相乘積。所以這兩條線段的比不變，也就是線段的比和長度單位無關。

例如，用厘米為單位去量線段 AB 和線段 CD ，所得的數如果分別是 5 和 4，那末

$$\frac{AB}{CD}=\frac{5}{4}。$$

取毫米為單位再去量線段 AB 和線段 CD ，所得的數分別為 $50=5\times 10$ 和 $40=4\times 10$ ，所以

$$\frac{AB}{CD}=\frac{50}{40}=\frac{5}{4}。$$

如果取 CD 作為長度單位，那末線段 AB 和線段 CD 的比，就是表示線段 AB 長度的數。

如果兩條線段有公度，它們的比是一個有理數；如果兩條線段沒有公度，它們的比是一個無理數。

例如，設線段 AB 和線段 CD 有公度，它們的最大公度的長度是 m ，並且 AB 正好含着 m 的 4 倍，而 CD 正好含着 m 的 3 倍。由兩條線段的比的定義有

$$\frac{AB}{CD}=\frac{4m}{3m}=\frac{4}{3}。$$

如果線段 CD 就是 AB 和 CD 兩線段的公度，那末比 $\frac{AB}{CD}$ 是一個整數。因此，有公度線段的比是一個有理數。

無公度線段的比不可能是整數或分數，因為不論在那種情形，它們

都不会成为有公度线段。因此，無公度线段的比只能是無理数。

§ 8. 比例線段的概念 我們已經知道，在四个数中，如果这两个的比等於那兩個的比，便說这四个数成比例。数的比例的概念也可用到線段上來，如果線段 a 和 b 的比等於線段 c 和 d 的比，即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，我們就說这四条線段 a 、 b 、 c 、 d 成比例。

因此，兩条線段的比和兩個数的比性質完全一样。同样，四条線段成比例和四个数成比例，它們的性質也完全一样。下面敘述这些性質。

比的性質：

1. 比的兩項同用一數乘或除，它的值不变。

2. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$ ，那末

$$\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots \quad (\text{等比定理}).$$

比例的性質：

1. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那末 $ad = bc$ 。

2. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那末 $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ 和 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (更比定理)。

3. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那末 $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (反比定理)。

4. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那末 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ 或 $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ (合比定理)。

5. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那末 $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ 或 $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$ (分比定理)。

6. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那末 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (合分比定理)。

已知比例的三个項，去求剩下的未知項，叫做解比例。例如，在比例 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 中，如果 d 是未知項，那末 $d = \frac{bc}{a}$ ，这时線段 d 叫做其他三

条線段 a, b, c 的第四比例項。如果所給的比例是 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, 那末 $b^2 = ac$, 这时線段 b 叫做線段 a 和 c 的比例中項。

§ 9. 定理 与角的两边相交的二平行線在兩边上截出成比例的線段。

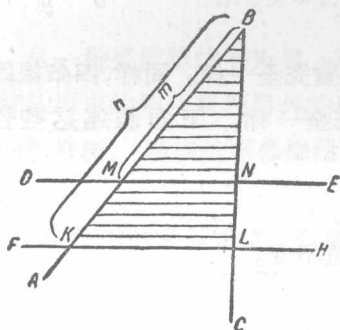


圖 12.

已知：兩条直線 DE 和 FH 互相平行，且和角 ABC 的兩边 BA 和 BC 相交於 M, K, N, L 諸点 (圖 12)。

求證：

$$\frac{BM}{BK} = \frac{BN}{BL} \quad \text{和} \quad \frac{MK}{BM} = \frac{NL}{BN}.$$

証明：我們分兩種情形來証明：

I. 線段 BK 和 BM 有公度。

設線段 BK 和 BM 的最大公度是 d , 且線段 BK 正好含着 d 的 n 倍, 而線段 BM 正好含着 d 的 m 倍。在这种情形下, 兩条線段 BM 和 BK 的比是一个有理数 $\frac{m}{n}$, 也就是 $\frac{BM}{BK} = \frac{m}{n}$ 。这个等式說明, 如果把線段 BK 分为 n 等分, 那末線段 BM 就含有 m 个这样的等分。通过每个分点作直線平行於 DE 和 FH , 由定理“如果在角的一边上截取相等的線段, 並且过各線段的端点作平行線与角的另一边相交; 那末这些平行線在角的另一边上所截得的線段也相等”, 線段 BN 和 BL 被分成許多等分。这些等分在 BN 中含有 m 个, 在 BL 中含有 n 个, 也就是線段 BL 的 $\frac{1}{n}$ 是 BN 和 BL 的一个公度。因此, $\frac{BN}{BL} = \frac{m}{n}$, 所以 $\frac{BM}{BK} = \frac{BN}{BL}$ 。

II. 線段 BK 和 BM 沒有公度。

在这种情形, 它們的比是一个用無限非循环小数表示的無理数。

設 $\frac{BM}{BK} = 0.6435\dots$ 。这个比的近似值准确到 0.1 时等於 0.6, 就是說, 如果把 BK 分为 10 等分时, BM 含有 $\frac{1}{10} BK$ 的 6 倍, 还剩下