Answers To Material Mechanics Exercises

普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

CAILIAO LIXUE XITI JIEDA

材料力学习题解答

黄孟生 编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS
中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

CAILIAO LIXUE XITI JIEDA

材料力学习题解答

黄孟生　编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十一五”规划教材，系《材料力学》（黄孟生编著）主教材的配套教材。本书的内容是根据教育部对力学教学的基本要求而定的。为了使学生在有限的时间内掌握材料力学的基本概念，基本理论和基本方法，从内容的编排上力求做到由易到难，由浅入深，循序渐进，并突出重点和难点。本教材的习题是经过精心选取的，具有面广、内容丰富的特点，在后面的章节中增选了部分综合性的习题，力求达到对学生综合能力的训练。

本书保留了传统的材料力学教材内容体系，先研究杆件在拉压、扭转和弯曲等基本变形下的内力、应力、变形和强度、刚度计算及超静定问题，然后是应力状态、强度理论、组合变形和连接件的强度计算，继而是考虑材料塑性的极限分析、能量法、压杆稳定和动荷载及交变应力等内容。截面的几何性质作为附录。原教材第1章无习题。

本书可作为土建、水利等专业参考书，同时也可作同类专业师生、工程专业技术人员及考研人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

材料力学习题解答/黄孟生编. —北京：中国电力出版社，2009

普通高等教育“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5083-9060-4

Ⅰ. 材… Ⅱ. 黄… Ⅲ. 材料力学—高等学校—解题 Ⅳ. TB301-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 109980 号

中国电力出版社出版、发行
（北京三里河路6号 100044 http://jc.cepp.com.cn）
航远印刷有限公司印刷
各地新华书店经售

*

2009年8月第一版 2009年8月北京第一次印刷
787毫米×1092毫米 16开本 10印张 238千字
定价 **16.00** 元

前　言

本书是《材料力学》(黄孟生编著)主教材的配套教材，是为普通高等院校工科64～72学时材料力学课程而编写的，可作为土建、水利等专业的参考书，同时也可作同类专业师生、工程专业技术人员及考研人员的参考书。

本书的内容是根据教育部关于高等院校材料力学A类课程的基本要求而定的。在编写过程中，选取了工程上实用和传统的内容，难易程度适当；在内容的编排上力求做到由易到难，由浅入深，循序渐进，并突出重点和难点；习题是经过精心选取的，具有面广、内容丰富的特点，在相关的章节中增选了部分综合性的习题，力求达到对学生综合能力的训练。

本书保留了传统的材料力学教材内容体系，先研究杆件在拉压、扭转和弯曲等基本变形下的内力、应力、变形和强度、刚度计算及超静定问题，然后讲述应力状态、强度理论、组合变形和连接件的强度计算，继而依次是考虑材料塑性的极限分析、能量法、压杆稳定和动荷载及交变应力等内容，截面的几何性质作为附录。教材第1章无习题。

我们希望本书的出版，对材料力学的教学能起到有益的作用，并希望该书也能成为教师和学生喜欢的一本教学参考书。限于编者水平，本书难免有不妥与疏漏之处，敬请广大师生和读者提出宝贵的意见和建议。

编　者

2009年9月

目　　录

第 2 章　轴向拉伸和压缩

2-1　试绘出如图 2-1 所示各杆的轴力图。

解

(a) 分别取 1—1、2—2、3—3 截面求轴力［见图 2-1 (a)］：$F_{N1}=400\text{kN}$，$F_{N2}=400-130=270(\text{kN})$，$F_{N3}=340\text{kN}$。作轴力图如图 2-1 (a) 所示。

(b) 分别取 1—1、2—2、3—3 截面求轴力［见图 2-1 (b)］：$F_{N1}=F$，$F_{N2}=F-F/3=2F/3$，$F_{N3}=F/3$。作轴力图如图 2-1 (b) 所示。

(c) 分别取 1—1、2—2 截面求轴力［见图 2-1 (c)］：$F_{N1}=3F$，$F_{N2}=2F$。作轴力图如图 2-1 (c) 所示。

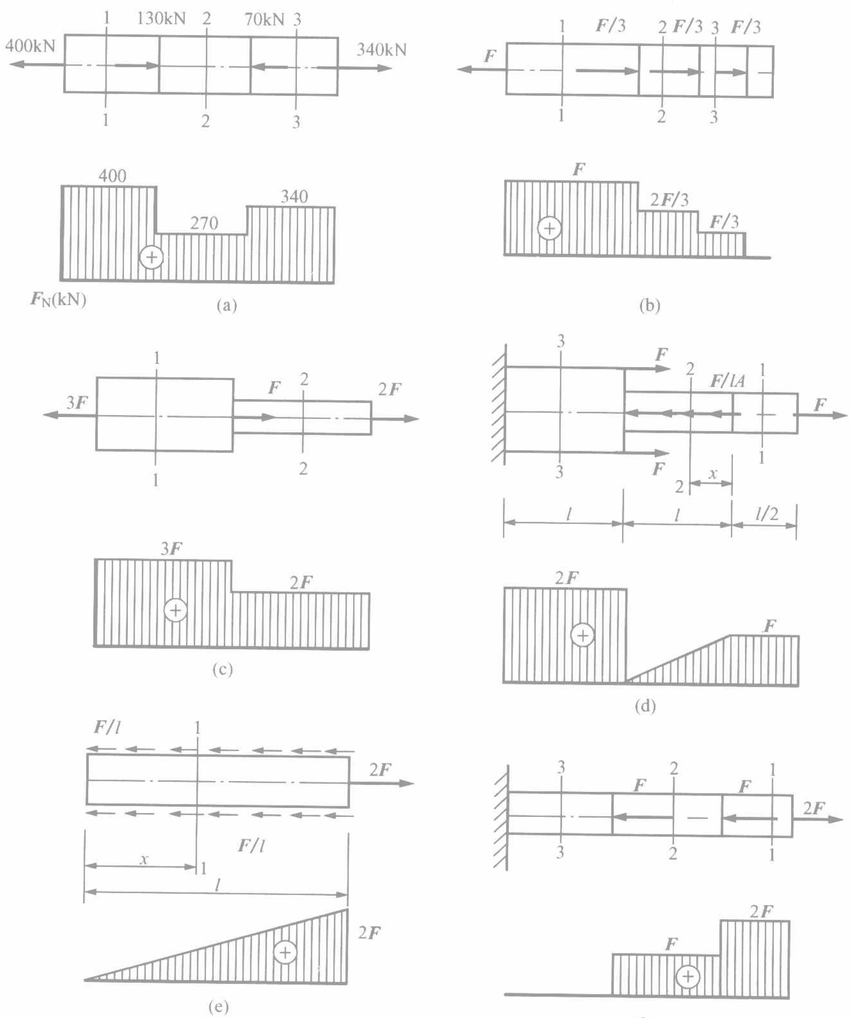


图 2-1　题 2-1 图

(d) 分别取 1—1、2—2、3—3 截面求轴力 [见图 2-1 (d)]: $F_{N1}=F$, $F_{N2}(x)=F-\frac{F}{l}x(0\leqslant x\leqslant l)$, $F_{N3}=F-F+2F=2F$。作轴力图如图 2-1 (d) 所示。

(e) 取 1-1 截面求轴力 [见图 2-1 (e)]: $F_{N1}(x)=\frac{2F}{l}x(0\leqslant x\leqslant l)$。作轴力图如图 2-1 (e) 所示。

(f) 分别取 1—1、2—2、3—3 截面求轴力 [见图 2-1 (f)]: $F_{N1}=2F$, $F_{N2}=2F-F=F$, $F_{N3}=2F-F-F=0$。作轴力图如图 2-1 (f) 所示。

2-2　图 2-2 为拉压杆的轴力图，试分别作出杆的受力图。

解　根据轴力图作受力图如图 2-2 所示。

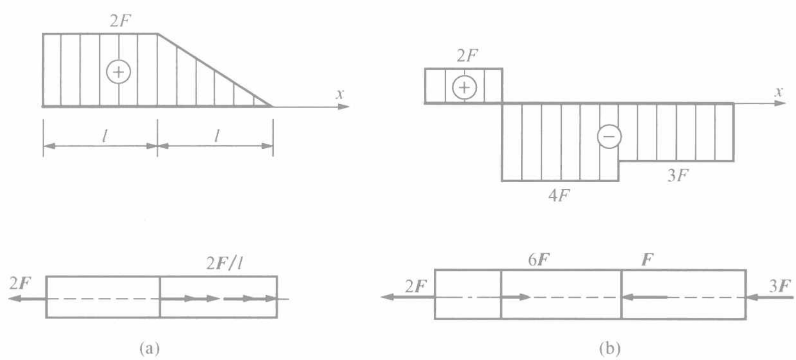


图 2-2　题 2-2 图

2-3　求下列结构中指定杆的应力。已知图 2-3 (a) 中杆的横截面面积 $A_1=A_2=1150\text{mm}^2$；图 2-3 (b) 中杆的横截面面积 $A_1=850\text{mm}^2$，$A_2=600\text{mm}^2$，$A_3=500\text{mm}^2$。

解

(a) 求反力，$F_A=F_B=40\text{kN}$。取一半分析 [见图 2-3 (a)]: 由 $\sum M_C=0$ 得

$$F_2=\frac{40\times4-10\times4\times2}{2.2}\approx36.4(\text{kN})(拉)$$

由结点 D 的平衡有，$\sum F_x=0$，$F_1=F_2\frac{\sqrt{5}}{2}\approx40.7(\text{kN})$ (拉)

由 $\sigma=\frac{F_N}{A}$ [教材式 (2-1)] 得，$\sigma_{①}=\frac{F_1}{A_1}\approx\frac{40.7\times10^3}{1150\times10^{-6}}\approx35.4(\text{MPa})$，$\sigma_{②}=\frac{F_2}{A_2}=\frac{36.4\times10^3}{1150\times10^{-6}}\approx31.7(\text{MPa})$

(b) 解除 B 端的约束 [见图 2-3 (b)]，用约束力 F_B 代之，由 $\sum M_A=0$ 得，

$$F_B=\frac{3\times3\times1.5}{1}=13.5(\text{kN}),\quad F_1=F_B=13.5(\text{kN})(压)$$

由结点 C 的平衡有，$\sum F_x=0$，$F_3=-F_1\times\sqrt{2}\approx-19.1(\text{kN})$ (压)

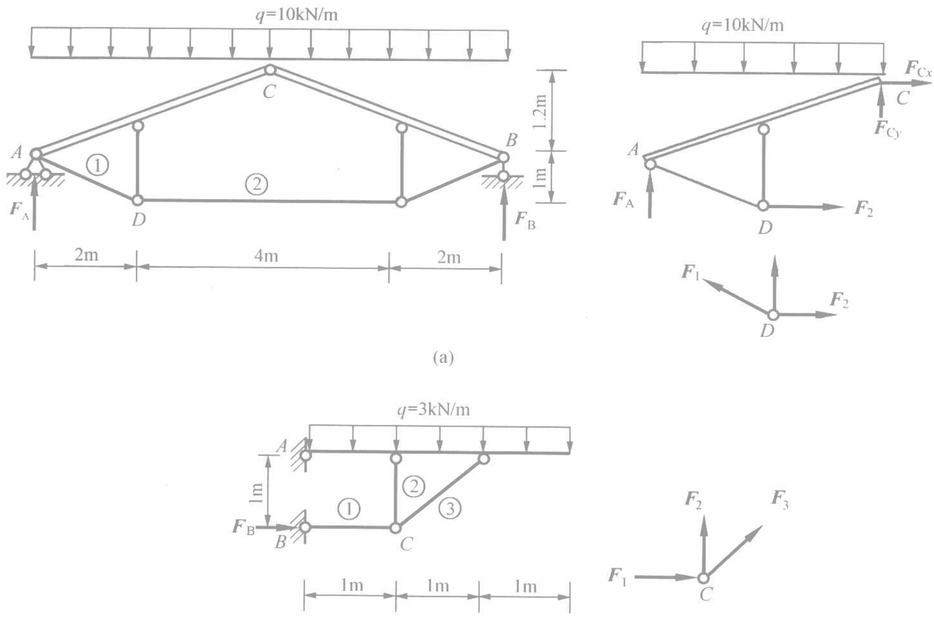
$$\sum F_y=0,\quad F_2=-F_3\times1/\sqrt{2}=13.5(\text{kN})$$

由 $\sigma=\frac{F_N}{A}$ [教材式 (2-1)] 得

$$\sigma_{①}=\frac{F_1}{A_1}=\frac{-13.5\times10^3}{850\times10^{-6}}\approx-15.9(\text{MPa})$$

$$\sigma_{②} = \frac{F_2}{A_2} = \frac{13.5 \times 10^3}{600 \times 10^{-6}} \approx 22.5(\text{MPa})$$

$$\sigma_{③} = \frac{F_3}{A_3} \approx \frac{-19.1 \times 10^3}{500 \times 10^{-6}} = -38.2(\text{MPa})$$



(a)　(b)

图 2 - 3　题 2 - 3 图

2 - 4　求下列各杆的最大正应力。

(1) 图 2 - 4 (a) 为开槽拉杆，两端受力 $F=10\text{kN}$，$b=4\text{mm}$，$h=20\text{mm}$，$h_0=10\text{mm}$；

(2) 图 2 - 4 (b) 为阶梯形杆，AB 段杆横截面积为 80mm^2，BC 段杆横截面积为 30mm^2，CD 段杆横截面积为 120mm^2；

(3) 图 2 - 4 (c) 为变截面杆，AB 段的横截面积为 400mm^2，BC 段的横截面积为 300mm^2；

(4) 图 2 - 4 (d) 为块石桥墩，材料的容重 $\rho g=23\text{kN/m}^3$。

解

(a) 如图 2 - 4 (a) 所示，$F_N = F = 10\text{kN}$，$\sigma_{max} = \dfrac{F_N}{A_{min}} = \dfrac{10 \times 10^3}{(20-10) \times 4 \times 10^{-6}} = 250(\text{MPa})$。

(b) 作杆 $ABCD$ 的轴力图如图 2 - 4 所示

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{NAB}}{A_{AB}} = \frac{17 \times 10^3}{80 \times 10^{-6}} = 213(\text{MPa})$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{NBC}}{A_{BC}} = \frac{8 \times 10^3}{30 \times 10^{-6}} \approx 267(\text{MPa})$$

$$\sigma_{CD} = \frac{F_{NCD}}{A_{CD}} = \frac{24 \times 10^3}{120 \times 10^{-6}} = 200(\text{MPa})$$

所以　$\sigma_{max} = \sigma_{BC} = 267(\text{MPa})$

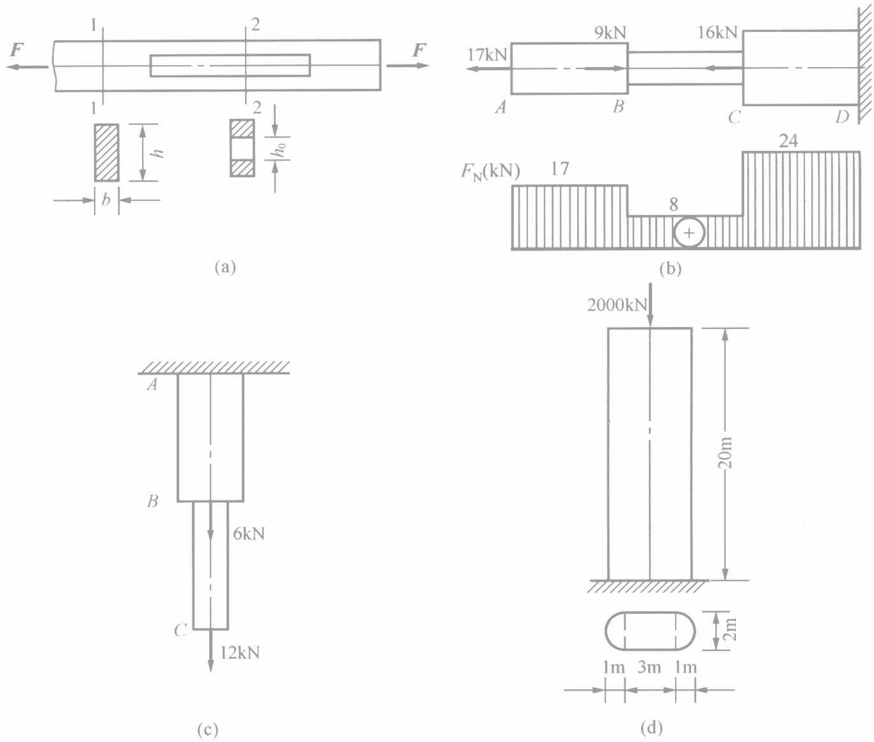


图 2-4　题 2-4 图

(c) 如图 2-4 (c) 所示 BC 段：$F_{NBC}=12\text{kN}$，AB 段：$F_{NAB}=18\text{kN}$

$$\sigma_{BC}=\frac{F_{NBC}}{A_{BC}}=\frac{12\times10^3}{300\times10^{-6}}=40(\text{MPa})$$

$$\sigma_{AB}=\frac{F_{NAB}}{A_{AB}}=\frac{18\times10^3}{400\times10^{-6}}=45(\text{MPa})$$

所以　$\sigma_{max}=\sigma_{AB}=45(\text{MPa})$

(d) 如图 2-4 (d) 所示 $|F_N|_{max}=F+\rho gAl$

$$|\sigma|_{max}=\frac{|F_N|_{max}}{A}=\frac{F}{A}+\rho gl=\frac{2000\times10^3}{3\times2+\pi\times2^2/4}+23\times10^3\times20\approx0.68(\text{MPa})\ (\text{压})$$

2-5　一根直径为 15mm，标距为 200mm 的合金钢杆，在比例极限内进行拉伸试验，当轴向荷载从零缓慢地增加到 58.4kN 时，杆伸长了 0.9mm，直径缩小了 0.022mm，试确定材料的弹性模量 E、泊松比 υ。

解　由 $\Delta l=\dfrac{F_Nl}{EA}$ [教材式 (2-3)] 有

$$E=\frac{F_Nl}{A\Delta l}=\frac{58.4\times10^3\times200\times10^{-3}}{\dfrac{\pi\times(15\times10^{-3})^2}{4}\times0.9\times10^{-3}}\approx73.5(\text{GPa})$$

由 $\upsilon=\left|\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|$ [教材式 (2-5)] 有

$$\upsilon=\left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|=\frac{0.022/15}{0.9/200}=0.326$$

2-6　如图2-5所示短柱，上段为钢制，截面尺寸为100mm×100mm，钢的弹性模量$E_s=200\text{GPa}$，下段为铝制，截面尺寸为200mm×200mm，$E_a=70\text{GPa}$。当柱顶受F力作用时，柱子总长度减少了0.4mm，试求F值（注：不计杆的自重）。

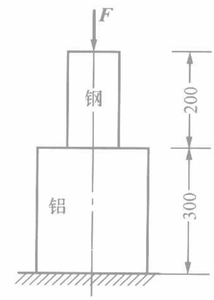


图2-5　题2-6图

解　由$\Delta l=\dfrac{F_N l}{EA}$［教材式（2-3）］有

$$\Delta l=\frac{F_{Ns}l_s}{E_sA_s}+\frac{F_{Na}l_a}{E_aA_a}=-F\left(\frac{0.2}{200\times10^9\times100\times100\times10^{-6}}+\frac{0.3}{70\times10^9\times200\times200\times10^{-6}}\right)=-0.4\times10^{-3}$$

解得，$F=1932\text{kN}$。

2-7　如图2-6所示等直杆ABC，材料的容重为ρg，弹性模量为E，横截面积为A。求杆B截面的位移Δ_B。

解　BC段的轴力：$F_N(x)=-(2F+\rho g Al+\rho g Ax)\qquad(0\leqslant x\leqslant l)$

$$\Delta_B=\Delta l_{BC}=\int_0^l\frac{F_N(x)\mathrm{d}x}{EA}=-\left(\frac{2F+\rho gAl^2}{EA}+\frac{1}{EA}\int_0^l\rho gAx\,\mathrm{d}x\right)=-\left(\frac{2Fl}{EA}+\frac{3\rho gAl^2}{2EA}\right)(\downarrow)$$

2-8　如图2-7所示结构，ABC杆为刚性杆，BD杆为横截面积$A=400\text{mm}^2$、弹性模量$E=2.0\times10^5\text{MPa}$的钢杆。试求$C$点的竖向位移。

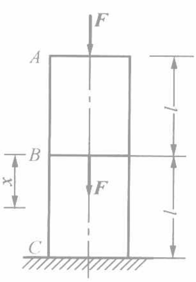


图2-6　题2-7图

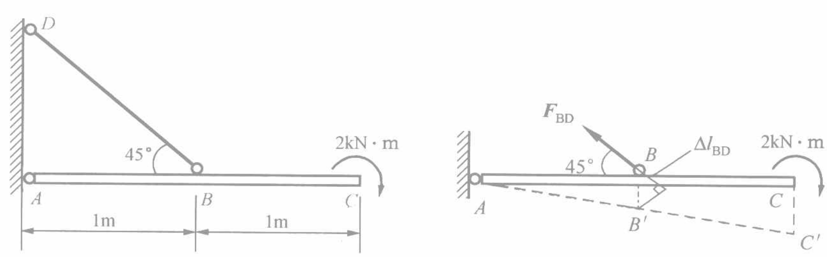


图2-7　题2-8图

解　去掉BD杆的约束，用约束力F_{BD}代之，由$\sum M_A=0$，$F_{BD}\sin45°\times1-2=0$，得：$F_{BD}\approx2.83\text{kN}$

$$\Delta l_{BD}=\frac{F_{BD}l}{EA}=\frac{2.83\times10^3\times\sqrt{2}}{200\times10^9\times400\times10^{-6}}\approx0.05\times10^{-3}(\text{m})$$，由变形的几何关系［见图2-7］，得

$$\Delta_C=\overline{CC'}=2\overline{BB'}=2\frac{\Delta l_{BD}}{\sin45°}\approx0.141\times10^{-3}(\text{m})$$

2-9　如图2-8所示结构中，AB为水平放置的刚性杆，1、2、3杆的材料相同，弹性模量$E=210\text{GPa}$。已知：$F=20\text{kN}$，$A_1=A_2=100\text{mm}^2$，$A_3=150\text{mm}^2$，$l=1\text{m}$。试求C点的水平位移和铅直位移。

解　由平衡条件可求得，$F_1=F_2=F/2$，$F_3=0$

$$\Delta l_1=\Delta l_2=\frac{F_1l_1}{EA_1}=\frac{10\times10^3\times1}{210\times10^9\times100\times10^{-6}}\approx0.476\times10^{-3}(\text{m})，\Delta l_3=0$$

由变形的几何关系（见图2-8）可见，C点的水平位移和铅直位移等于A点的相应位

移，即 $\Delta_{Ch}=\Delta_{Cn}=\Delta l_1=0.476\text{mm}$，方向如图 2-8 所示。

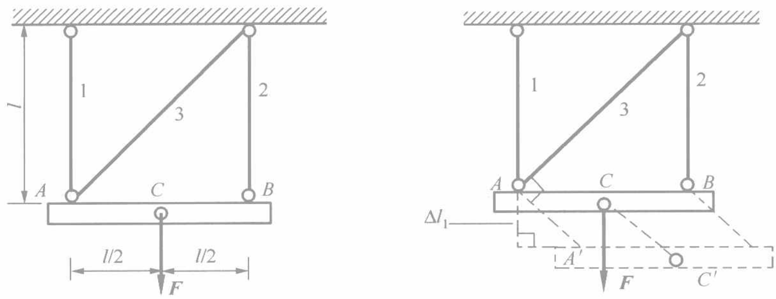


图 2-8　题 2-9 图

2-10　如图 2-9 所示正方形箱形薄壁截面杆受轴向力 F 作用，已知该材料的弹性常数为 E，ν. 试求截面上 C 与 D 两点间的距离改变量 Δ_{CD}。

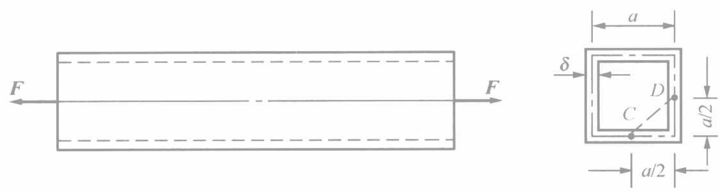


图 2-9　题 2-10 图

解　杆的纵向应变　$\varepsilon=\dfrac{\sigma}{E}=\dfrac{F}{4a\delta E}$，横向应变 $\varepsilon'=-\nu\varepsilon=-\nu\dfrac{F}{4a\delta E}$

C 与 D 两点距离的改变

$$\Delta_{CD}=\varepsilon'\overline{CD}=-\nu\frac{F}{4a\delta E}\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=-\nu\frac{\sqrt{2}F}{8\delta E}$$

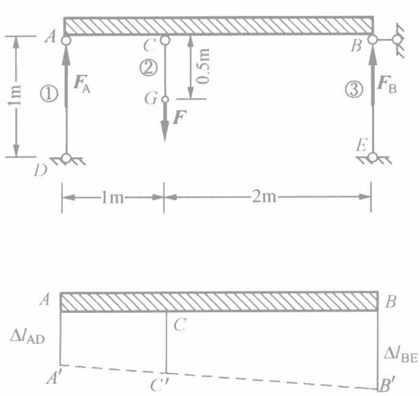


图 2-10　题 2-11 图

2-11　如图 2-10 所示结构中，AB 为刚性杆，AD 为钢杆，横截面面积 $A_1=500\text{mm}^2$，弹性模量 $E_1=200\text{GPa}$；CG 为铜杆，横截面面积 $A_2=1500\text{mm}^2$，弹性模量 $E_2=100\text{GPa}$；BE 为木杆，横截面面积 $A_3=3000\text{mm}^2$，弹性模量 $E_3=10\text{GPa}$。当 G 点受力 $F=60\text{kN}$ 作用时，求该点的竖直位移 Δ_G。

解　由平衡条件可求得：$F_A=\dfrac{F\times2}{3}=40(\text{kN})$ (压)

$$F_B=\frac{F\times1}{3}=20(\text{kN})\ (压)，F_{CG}=F=60\text{kN}\ (拉)$$

由 $\Delta l=\dfrac{F_H l}{EA}$ [教材式（2-3）] 可求得杆的变形

$$\Delta l_{AD}=\frac{F_A l_{AD}}{E_1A_1}=\frac{40\times10^3\times1}{200\times10^9\times500\times10^{-6}}=0.4(\text{mm})$$

$$\Delta l_{CG}=\frac{F_{CG}l_{CG}}{E_2A_2}=\frac{60\times10^3\times0.5}{100\times10^9\times1500\times10^{-6}}=0.2(\text{mm})$$

$$\Delta l_{BE}=\frac{F_B l_{BE}}{E_3 A_3}=\frac{20\times10^3\times1}{10\times10^9\times3000\times10^{-6}}=0.67(\text{mm})$$

G 点的竖直位移

$$\Delta_G=\overline{CC'}+\Delta l_{CG}=0.4+\frac{0.67-0.4}{3}+0.2=0.69(\text{mm})$$

2-12 如图 2-11 所示一挡水墙，其中 AB 杆支承着挡水墙。若 AB 杆为圆木，其容许应力 $[\sigma]=11\text{MPa}$，试求 AB 杆所需的直径 d（注：挡水墙下端可视为铰接）。

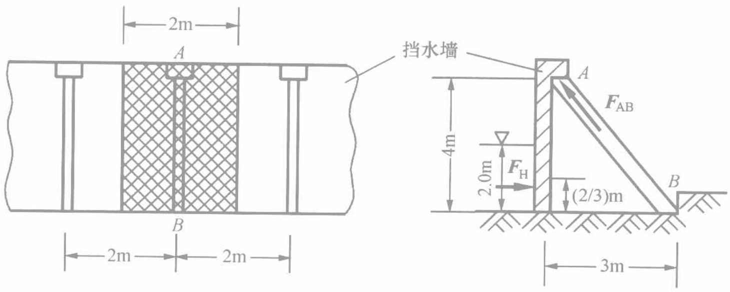


图 2-11 题 2-12 图

解 水压力 $F_H=\frac{1}{2}\rho g h^2 b=\frac{1}{2}\times10\times2^2\times2=40(\text{kN})$；由平衡条件，$AB$ 杆的内力

$F_{AB}=\dfrac{F_H\times\frac{2}{3}}{4\times\frac{3}{5}}\approx11.1(\text{kN})$；由强度条件 $\sigma_{max}=\dfrac{F_{N\max}}{A}\leqslant[\sigma]$ [教材式（2-7）]，故

$$d\geqslant\sqrt{\frac{F_{AB}}{[\sigma]\pi/4}}=\sqrt{\frac{11.1\times10^3}{11\times10^6\times3.14/4}}\approx36\times10^{-3}(\text{m})$$

2-13 如图 2-12 所示结构，CD 杆为刚性杆，C 端铰接于墙壁上，AB 杆为钢杆，直径 $d=30\text{mm}$，容许应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$，弹性模量 $E=2.0\times10^5\text{MPa}$。试求结构的容许荷载 F。

解 AB 杆的轴力 $F_N=\dfrac{2.5F}{2\times\sin30^\circ}=2.5F$，由强度条件 $\sigma_{max}=\dfrac{F_{N\max}}{A}\leqslant[\sigma]$，则

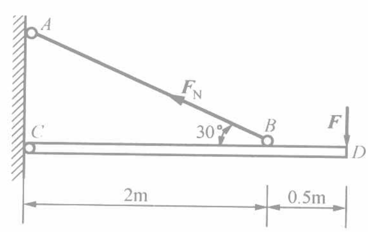


图 2-12 题 2-13 图

$$F\leqslant\frac{[\sigma]A}{2.5}=\frac{170\times10^6\times\pi\times\frac{0.03^2}{4}}{2.5}=48.0(\text{kN})$$

所以容许荷载 $[F]=48.0\text{kN}$。

2-14 如图 2-13 所示正方形砖柱，顶端受集中力 $F=16\text{kN}$ 作用，柱边长为 0.4m，砌筑在高为 0.4m 的正方形块石底脚上。已知砖的容重 $\rho_1 g=16\text{kN/m}^3$，块石容重 $\rho_2 g=20\text{kN/m}^3$。地基容许应力 $[\sigma]=0.08\text{MPa}$。试设计正方形块石底脚的边长 a。

解 最大轴力 $|F_N|_{max}=F+\rho_1 g A_1 l+\rho_2 g A_2 h$，由强度条件得，$\sigma_{max}=\dfrac{|F_N|_{max}}{A_2}\leqslant[\sigma]$，其中 $A_2=a^2$

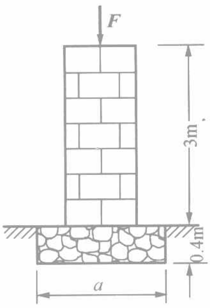


图 2 - 13 题 2 - 14 图

所以

$$a \geqslant \sqrt{\frac{F+\rho_1 g A_1 l}{[\sigma]-\rho_2 g h}}=\sqrt{\frac{16\times10^3+16\times10^3\times0.4^2\times3}{0.08\times10^6-20\times10^3\times0.4}}\approx 0.573(\mathrm{m})$$

2 - 15 如图 2 - 14 所示结构 AB 为刚性杆，1、2 两杆的直径 $d_1=d_2=100\mathrm{mm}$，3 杆直径 $d_3=120\mathrm{mm}$，容许拉应力 $[\sigma_t]=8\mathrm{MPa}$，容许压应力 $[\sigma_c]=10\mathrm{MPa}$。试求结构的最大荷载。

解 由平衡条件，三杆的内力：$F_1=-F/\sqrt{2}$（压），$F_2=F/2$，$F_3=-F/2$（压）

由强度条件得

$$\sigma_1=\frac{F_1}{A_1}\leqslant[\sigma_c]，F\leqslant\sqrt{2}[\sigma_c]A_1=\sqrt{2}\times10\times10^6\times\pi\times0.1^2/4\approx111.0(\mathrm{kN})$$

$$\sigma_2=\frac{F_2}{A_2}\leqslant[\sigma_t]，F\leqslant2[\sigma_t]A_2=2\times8\times10^6\times\pi\times0.1^2/4\approx125.6(\mathrm{kN})$$

$$\sigma_3=\frac{F_3}{A_3}\leqslant[\sigma_c]，F\leqslant2[\sigma_c]A_3=2\times10\times10^6\times\pi\times0.12^2/4\approx226.1(\mathrm{kN})$$

所以，容许荷载 $[F]=111.0(\mathrm{kN})$。

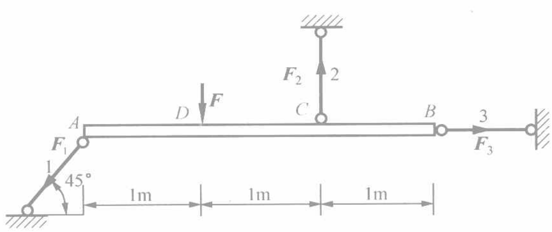


图 2 - 14 题 2 - 15 图

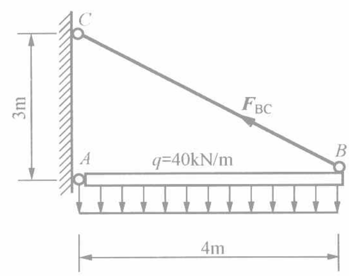


图 2 - 15 题 2 - 16 图

2 - 16 如图 2 - 15 所示结构中，钢索 BC 是由一组直径 $d=2\mathrm{mm}$ 的钢丝组成，钢丝的容许应力 $[\sigma]=160\mathrm{MPa}$，试求钢丝的根数。若将 BC 杆改为由两个等边角钢焊成的组合截面，试确定等边角钢号。

解 由平衡条件 $\sum M_A=0$，$F_{BC}=40\times2\times5/3\approx133.3(\mathrm{kN})$

由强度条件 $\sigma=\dfrac{F_{BC}}{A}=\dfrac{133.3\times10^3}{n\times\pi\times0.002^2/4}\leqslant[\sigma]=160\times10^6$，得 $n=265$

再由强度条件 $A\geqslant\dfrac{F_{BC}}{[\sigma]}=\dfrac{133.3\times10^3}{160\times10^6}\approx8.34\times10^{-4}(\mathrm{m}^2)$，故选两根 45×45×5 等边角钢，则 $A=2\times4.29\times10^{-2}\mathrm{m}^2=8.58\times10^{-2}$ (m^2)，能满足强度要求。

2 - 17 如图 2 - 16 所示 AB 杆为刚性杆，长为 $3a$。A 端铰接于墙壁上，在 C、B 两处分别用同材料、同面积的 1、2 两杆拉住。在 D 点受力 F 作用，求 1、2 两杆的应力。设弹性模量为 E，横截面面积为 A。

解 变形协调的几何关系为 $3\Delta l_1=\Delta l_2$

力与变形之间的物理关系

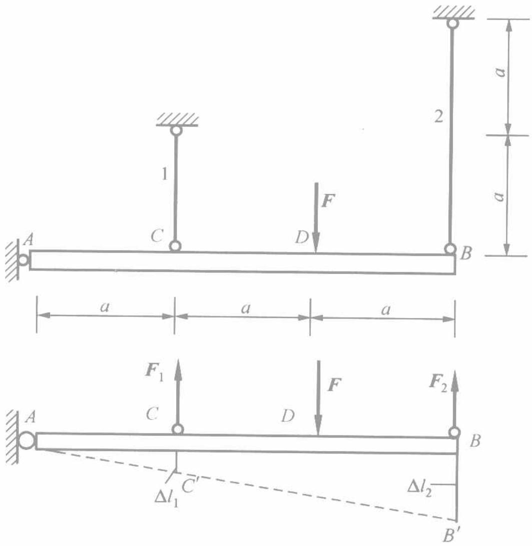


图 2-16 题 2-17 图

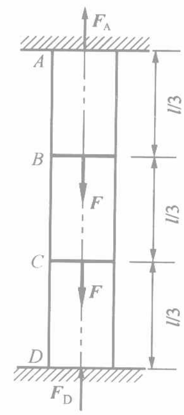


图 2-17 题 2-18 图

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 a}{EA},\ \Delta l_2 = \frac{F_2 2a}{EA}$$

代入几何方程，得补充方程：$3F_1 = 2F_2$，最后由平衡条件有 $F_1 + 3F_2 = 2F$，解得 $F_1 = \frac{4F}{11}$，$F_2 = \frac{6F}{11}$；所以 $\sigma_1 = \frac{4F}{11A}$，$\sigma_2 = \frac{6F}{11A}$

2-18 两端固定，长度为 l，横截面面积为 A，弹性模量为 E 的杆，在 B、C 截面各受一 F 力作用，如图 2-17 所示。求 B、C 截面间的相对位移。

解 解除 A 端的约束，用约束力 F_A 代替，其变形协调的几何条件为 $\Delta_A = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = 0$

力与变形之间的物理关系为

$$\Delta l_{AB} = \frac{F_A l}{3EA},\ \Delta l_{BC} = \frac{(F_A - F)l}{3EA},\ \Delta l_{CD} = \frac{(F_A - 2F)l}{3EA}$$

代入几何方程，得 $F_A = F$

最后由平衡条件，得 $F_D = F$，$F_{BC} = 0$

所以 B、C 两截面间的相对位移为 $\Delta_{BC} = \Delta l_{BC} = 0$。

2-19 如图 2-18 所示钢筋混凝土柱，已知：钢筋和混凝土的横截面积分别为 250mm^2 和 10000mm^2，其弹性模量分别为 2.0×10^5MPa 和 2.0×10^4MPa。试问它们各承担多少荷载。

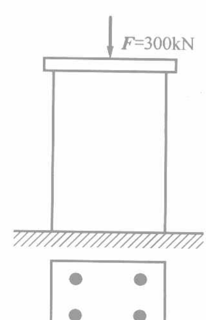


图 2-18 题 2-19 图

解 变形协调的几何关系为 $\Delta l_g = \Delta l_h$

力与变形之间的物理关系为 $\Delta l_g = \frac{F_g l}{E_g A_g}$，$\Delta l_h = \frac{F_h l}{E_h A_h}$

代入几何方程，得补充方程 $F_h = 4F_g$

最后由平衡条件 $F_h + F_g = F$，得

$$F_g = \frac{F}{5} = \frac{300}{5} = 60(\text{kN}),\ F_h = \frac{4F}{5} = \frac{4\times300}{5} = 240(\text{kN})$$

2-20 如图 2-19 所示结构，已知：1、2、3 杆的材料相同，其横截面积分别为 $A_1=400\text{mm}^2$，$A_2=300\text{mm}^2$，$A_3=200\text{mm}^2$，$F=40\text{kN}$。试求各杆的应力。

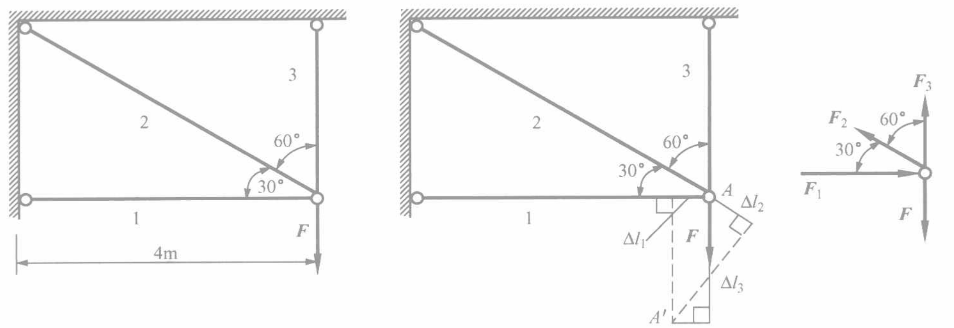


图 2-19 题 2-20 图

解 首先确定力作用点 A 的平衡位置 A'，如图 2-19 所示，过平衡点 A' 再作各杆（或杆延长线）的垂直线，可见，变形协调的几何关系为 $\Delta l_3=\dfrac{\Delta l_2}{\sin 30°}+\dfrac{\Delta l_1}{\tan 30°}$，

力与变形之间的物理关系为

$$\Delta l_1=\frac{F_1 l_1}{E_1 A_1},\quad \Delta l_2=\frac{F_2 l_2}{E_2 A_2},\quad \Delta l_3=\frac{F_3 l_3}{E_3 A_3}$$

式中：$l_1=4\text{m}$，$l_2=\dfrac{4}{\cos 30°}(\text{m})$，$l_3=4\times\tan 30°(\text{m})$

把物理关系式代入几何关系式，得补充方程为

$$\frac{F_3}{2}=\frac{4}{3}F_2+\frac{3}{4}F_1$$

取结点 A 立平衡方程为

$$F_1=F_2\cos 30°,\quad F_3+F_2\sin 30°=F$$

联立求解，得

$F_1=0.194\,\text{F}=7.76\text{kN}$（压），$F_2=0.224\,\text{F}=8.96\text{kN}$，$F_3=0.889\,\text{F}=35.5\text{kN}$

各杆的应力为

$$\sigma_1=\frac{F_1}{A_1}=-19.4\text{MPa},\quad \sigma_2=\frac{F_2}{A_2}=29.9\text{MPa},\quad \sigma_3=\frac{F_3}{A_3}=177.5\text{MPa}$$

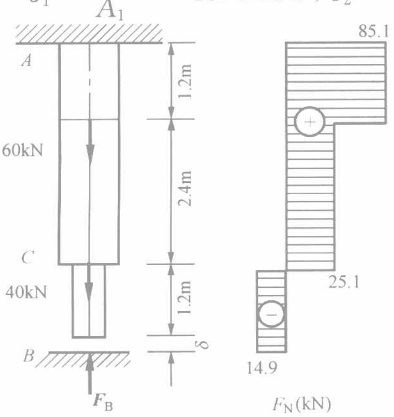


图 2-20 题 2-21 图

2-21 如图 2-20 所示阶梯形杆，其上端固定，下端与支座距离 $\delta=1\text{mm}$，已知上下两段杆的横截面积分别为 600mm^2 和 300mm^2，弹性模量 $E=2.1\times10^5\text{MPa}$。试作杆的轴力图。

解 首先计算杆的伸长

$$\Delta l=\frac{40\times10^3\times2.4}{2.1\times10^{11}\times600\times10^{-6}}+\frac{100\times10^3\times1.2}{2.1\times10^{11}\times600\times10^{-6}}=1.71\times10^{-3}(\text{m})>\delta$$

解除 B 端的约束，用约束力 F_B 代替，其变形协调

的几何条件

$$\Delta_B = \Delta l_{AC} + \Delta l_{CB} = \delta$$

力与变形之间的物理关系

$$\Delta l_{CB} = -\frac{F_B \times 1.2}{2.1 \times 10^{11} \times 300 \times 10^{-6}}$$

$$\Delta l_{AC} = \frac{(-F_B + 40 \times 10^3) \times 2.4}{2.1 \times 10^{11} \times 600 \times 10^{-6}} + \frac{(-F_B + 100 \times 10^3) \times 1.2}{2.1 \times 10^{11} \times 600 \times 10^{-6}}$$

代入几何方程，得 $F_B = 14.9\text{kN}$ 。作轴力图如图 2-20 所示。

2-22　直径 d=25mm 的钢杆（见图 2-21），在常温下加热到 30°C 后将杆的两端固定起来，然后再冷却到常温。已知钢的线膨胀系数 $\alpha = 12 \times 10^{-6}/°\text{C}$，弹性模量 $E = 2.1 \times 10^5\text{MPa}$。求杆两端的约束反力和横截面上的应力。

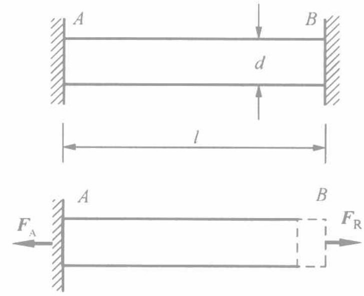


图 2-21　题 2-22 图

解　解除 B 端的约束，用约束力 F_R 代替，其变形协调的几何条件

$$\Delta_B = \Delta l_{AB}(F_R) + \Delta l_{AB}(\Delta t) = 0$$

力与变形之间的物理关系

$$\Delta l_{AB}(F_R) = \frac{F_R l}{EA}, \ \Delta l_{AB}(\Delta t) = \alpha \Delta t l$$

得　$F_R = -\alpha \Delta t E A$

把 $\Delta t = -30°$，d，E 和 α 代入，得　$F_R = 37.1\text{kN}$

最后由平衡条件，得 $F_A = F_R$

横截面上的应力

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{37.1 \times 10^3}{\dfrac{\pi \times 0.025^2}{4}} = 75.6(\text{MPa})$$

第3章 扭 转

3-1 试作如图3-1所示各杆的扭矩图。

解

(a) 如图3-1 (a) 所示，分别取1—1、2—2、3—3、4—4截面求扭矩

$M_{x1}=-T$，$M_{x2}=-T-2T=-3T$，$M_{x3}=-T-2T-T=-4T$，$M_{x4}=2T$

作轴力图如图3-1 (a) 所示。

(b) 如图3-1 (b) 所示，分别取1—1、2—2、3—3截面求扭矩

$M_{x1}=-500x(0\leqslant x\leqslant 200)$，$M_{x2}=-10-90=-100(\mathrm{N\cdot m})$，$M_{x3}=-10\mathrm{N\cdot m}$

作扭矩图如图3-1 (b) 所示。

(c) 如图3-1 (c) 所示，分别取1—1、2—2、3—3、4—4截面求扭矩

$M_{x1}=3\mathrm{kN\cdot m}$，$M_{x2}=3+2=5(\mathrm{kN\cdot m})$，$M_{x3}=3+2-4=1(\mathrm{kN\cdot m})$，$M_{x4}=3+2-4+1=2(\mathrm{kN\cdot m})$

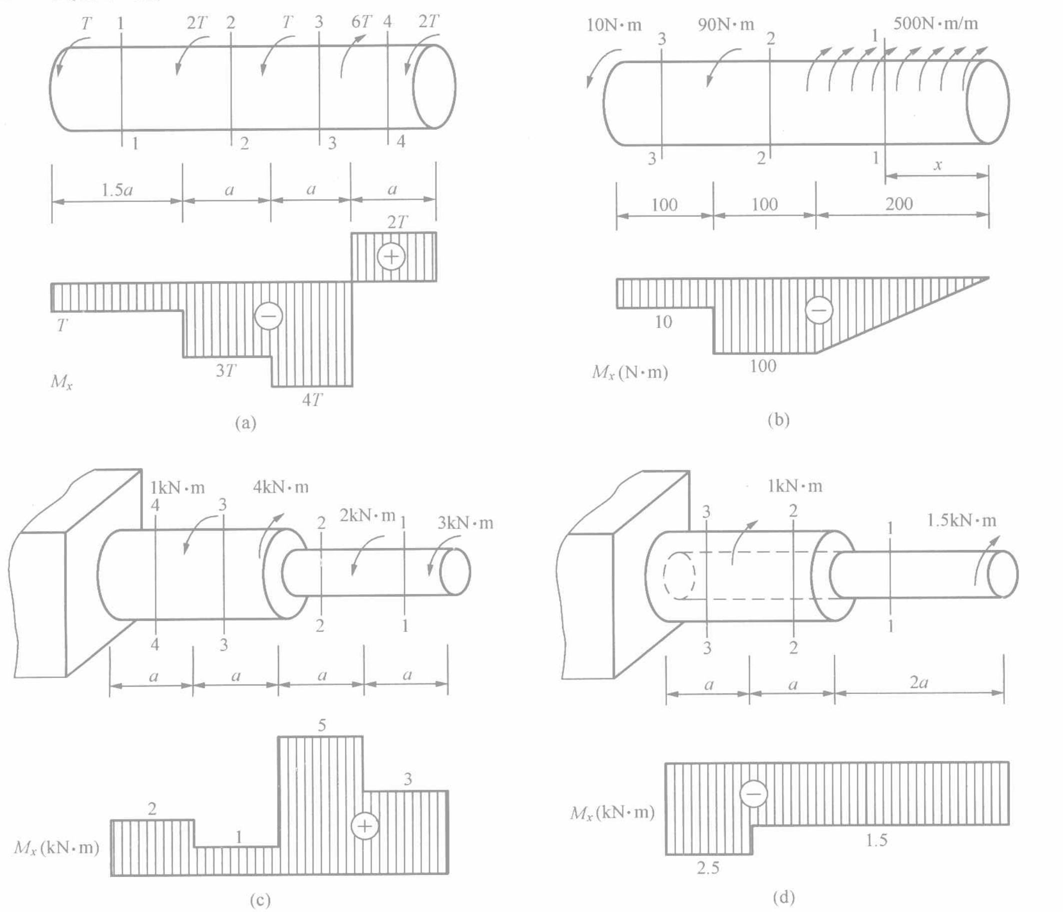


图3-1 题3-1图