

CAD/CAM/CAE 实用技术丛书



【流体力学教学参考书】

FLUENT

——流体工程仿真计算实例与分析

韩占忠 编



本书附有实例光盘

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

CAD/CAM/CAE 实用技术丛书

Fluent——流体工程仿真计算 实例与分析

韩占忠 编

 北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书在介绍了计算流体力学基本概念的基础上,以流体工程中较为典型的9个案例为主线,介绍了利用Fluent软件平台对流体工程问题进行数值模拟与仿真计算的方法。本书的编写仍然采用了“跟我学”的风格,较为细致地介绍了从建模、网格划分到仿真计算的全过程,同时特别强调了对计算结果的分析与讨论,力求引起读者对网格划分和计算结果正确性的深入思考。本书可作为工程类相关专业本科及研究生计算流体力学课程的教学参考书和工程类本科生毕业设计的参考资料,也可供广大从事流体机械工程的科技人员参考。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

Fluent: 流体工程仿真计算实例与分析/韩占忠编. —北京:北京理工大学出版社, 2009. 8

ISBN 978 - 7 - 5640 - 2604 - 2

I. F… II. 韩… III. 流体力学: 工程力学 - 计算机仿真 - 应用软件, Fluent - 高等学校 - 教学参考资料 IV. TB126 - 39

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第139548号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街5号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京友谊印刷有限公司

开 本 / 787毫米×1092毫米 1/16

印 张 / 19

彩 插 / 1

字 数 / 445千字

版 次 / 2009年8月第1版 2009年8月第1次印刷

印 数 / 1~4000册

定 价 / 39.00元

责任校对 / 申玉琴

责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前 言

《Fluent——流体工程仿真计算实例与应用》一书与读者见面已经有五年了，在此感谢读者对本书的厚爱，也感谢许多读者提出的带有建设性的宝贵意见。

在这五年中，情况发生了很大的变化，Fluent 的版本已发展到 6.3 版，读者在流体工程仿真计算的实践中也有很多的体会，为了适应新形势的需要，也是作为《Fluent——流体工程仿真计算实例与应用》一书的延续，特编写了她的姊妹篇《Fluent——流体工程仿真计算实例与分析》，供广大从事流体工程的科学工作者参考。

本书基本上延续了上一本书的编写风格，仍然以工程实例为主线，讲述流体工程仿真计算中的问题以及解决的方法。本书共例举了 9 个算例，介绍了流体仿真计算中的问题与解决方案。这里特别强调的是区别，本书与上一本书的区别主要在于侧重了对计算结果的分析，这也是在教学过程中发现的主要问题。在计算流体力学教学过程中，包括许多本科生做毕业设计以及研究生在所研究的课题上，进行了仿真计算后，往往缺少对计算结果的分析这一重要环节，同时许多物理上的概念也没有得到充分的重视。由于缺乏对计算结果的分析 and 整理，研究报告往往缺乏说服力。为此编写一本带有对计算过程及计算结果进行分析的教材或教案就显得尤为重要，这也是作者编写本书的初衷。

本书的第一章首先介绍了计算流体力学中的若干差分方法，并针对简单问题给出了编程计算的实例，这一章的目的是使读者对计算流体力学有一个初步的认识。第二章介绍二维流动的仿真计算实例，包括了边界层流动问题、翼型的升力计算、船舶航行过程、水的沸腾问题以及动网格的应用，介绍了紊流模型的选取、VOF 模型的应用以及带有相变的多相流动问题的计算与分析。第三章介绍了三维流动问题，包括引射式混流器、螺旋槽纹管道内的流动和叶轮机械内流动以及喷水、喷沙两相流动等的计算方法。书中的这些实例是比较有代表性的，也是在教学和科研中常见的问题。在编写本书过程中，编者其实很忐忑，计算流体力学是一门博大精深的学科，所涉及的内容非常广泛，读者也是来自各行各业，一本书的内容是不可能满足所有需求的，只能是有选择地举几个典型的例子。另外，本书也不想编成一本介绍计算流体力学理论的书，因为这样的书太多了，读者完全可以查阅相关的书籍，满足自己的需要。根据作者自身的体会，学习应首先从算例学起，入门后才能谈得上提高，故本书也只能算是一本流体工程仿真计算中稍微深入一点的入门书籍。

本书采用 Fluent 6.2 版和 Gambit 2.2 版。在本书的编写过程中得到北京理工大学王国玉教授、杨策教授和王瑞君副教授的许多有益的建议和启示，也得到硕士研究生陶磊、冯玥、薛东青、刘广才、牛宁海、祖立正、孔德才和薛庆阳的大力支持，在此一并表示衷心的感谢。由于本人水平有限，加之编写过程较为仓促，书中难免有遗漏、不严谨或错误的地方，恳请广大读者批评指正。

编者

目 录

第一章 计算流体力学概论	(1)
第一节 计算流体力学与数值模拟	(1)
第二节 计算流体力学的发展	(2)
第三节 微分方程的分类	(3)
第四节 常用的模型方程	(3)
第五节 差分格式构造方法	(4)
一、Taylor 级数展开法	(5)
二、多项式插值法	(8)
三、待定系数法	(9)
四、积分方法	(10)
五、特征线法	(11)
六、控制体积分法	(12)
第六节 几种模型方程的常用差分格式	(13)
一、对流方程	(13)
二、扩散方程	(16)
三、对流扩散方程	(17)
第七节 差分格式的相容性、收敛性和稳定性	(19)
第八节 流体力学常见偏微分方程的数值解法	(20)
一、偏微分方程的形式和来源	(20)
二、抛物型方程的数值解	(21)
三、双曲型方程特征线法	(27)
第二章 二维流动与传热问题	(31)
第一节 空气流过高温平板的流动与换热问题	(31)
第 1 步: 在 Gambit 中创建流域结构、划分网格并确定边界类型	(32)
第 2 步: 创建网格	(34)
第 3 步: 定义边界类型	(35)
第 4 步: 在 Fluent 中对问题进行设置	(37)
第 5 步: 求解	(43)
第 6 步: 计算结果分析	(45)
讨论 1: 网格对计算结果的影响	(53)
讨论 2: 边界层流动问题	(56)
一、平板层流边界层	(56)
二、平板紊流边界层	(57)

三、平板混合边界层	(57)
第二节 空气绕流机翼空气动力学分析	(57)
第1步: 利用 Gambit 建立几何模型	(58)
第2步: 划分网格	(64)
第3步: 定义边界类型	(67)
第4步: 保存文件并输出网格	(68)
第5步: 进行 Fluent 求解计算设置	(69)
第6步: 求解计算	(72)
第7步: 计算结果分析	(76)
讨论 1: 网格对计算结果的影响 (将机翼头部网格加密后重新计算)	(80)
讨论 2: 气体压缩性对流动的影响 (将气体视为可压缩流体后重新计算)	(84)
讨论 3: 黏性对计算结果的影响 (将气体视为黏性不可压流体重新计算)	(87)
第三节 船舶行驶阻力特性数值模拟——VOF 模型的应用	(92)
第1步: 启动 Gambit	(93)
第2步: 创建船体附近小流域	(93)
第3步: 创建外围流域	(96)
第4步: 确定边界类型	(97)
第5步: 求解计算	(98)
第6步: 第一次调整水线	(112)
第7步: 第二次调整水线	(116)
讨论 1: 混合网格的计算	(119)
第1步: 创建工作环境	(119)
第2步: 在船体附近小区域构造非结构四边形网格	(119)
第3步: 进行设置并开始计算	(120)
讨论 2: 压力出流边界的计算	(122)
第1步: 创建工作环境	(122)
第2步: 建立压力出流边界计算模型	(123)
第3步: 启动 Fluent 进行模拟计算	(124)
第四节 水箱沸腾加热过程——Mixture 模型的应用	(128)
第1步: 启动 Gambit	(128)
第2步: 创建流动区域	(129)
第3步: 利用 Fluent 进行设置与求解	(132)
一、定义常数和包含库文件	(140)
二、宏 DEFINE_... 定义 UDF 函数	(141)
三、函数体部分	(141)
第4步: 计算结果的后处理	(146)
第五节 平板在空气中的降落过程——动网格应用	(150)

第 1 步: 流域按网格类型分解	(150)
第 2 步: 求解设置	(153)
第 3 步: 稳态流动的求解	(156)
第 4 步: 非定常流动过程计算	(157)
第 5 步: 动网格设置与计算	(160)
第 6 步: 后处理	(165)
第三章 三维流动仿真计算	(168)
第一节 引射式冷热水混流器流动分析	(168)
第 1 步: 建立三维模型	(169)
第 2 步: 划分网格	(172)
第 3 步: 边界类型	(175)
第 4 步: 启动 Fluent 进行计算	(175)
第 5 步: 计算结果后处理	(186)
讨论: 影响出流温度的因素	(195)
第二节 单头螺旋槽纹管内的流动	(197)
第 1 步: 启动 Gambit	(198)
第 2 步: 建立螺旋槽纹管内的螺旋槽	(198)
第 3 步: 创建主管道	(201)
第 4 步: 网格划分	(203)
第 5 步: 确定边界类型	(205)
第 6 步: 启动 Fluent, 读入网格文件	(206)
第 7 步: 计算模型及边界条件设置	(207)
第 8 步: 求解器控制参数设置	(210)
第 9 步: 后处理	(212)
第 10 步: 阻力损失的进一步计算与结论	(218)
第三节 叶轮机机械流动问题——Turbo 工具的应用	(219)
第 1 步: 启动 Gambit, 创建流域外形	(220)
第 2 步: 利用 Turbo 工具进行建模	(224)
第 3 步: 利用 Fluent-3d 求解器进行计算	(229)
第 4 步: 计算结果的后处理	(234)
讨论 1: 有分流叶片流域的建模	(242)
讨论 2: 涡轮建模与旋转坐标系的应用	(245)
第 1 步: 有叶顶间隙流域的建模	(245)
第 2 步: 建立单旋转坐标系并进行计算	(249)
第 3 步: 计算结果的后处理	(255)
第四节 喷泉的喷射——VOF 与 DPM 模型的应用	(260)
第 1 步: 启动 Gambit	(260)
第 2 步: 建立流域	(260)
第 3 步: 网格划分	(263)

(170)	第4步: 确定边界类型.....	(264)
(171)	第5步: 启动 Fluent-3d, 读入网格文件.....	(266)
(172)	第6步: 计算模型及边界条件设置.....	(266)
(173)	第7步: 求解器控制参数设置.....	(271)
(174)	第8步: 后处理.....	(276)
(175)	讨论 1: 空气混合沙粒喷出的非耦合计算.....	(279)
(176)	分析 1: 沙粒所占的体积比例.....	(279)
(177)	分析 2: 沙粒喷射高度.....	(279)
(178)	第1步: 连续相的流动计算.....	(280)
(179)	第2步: 进行喷沙流动的计算.....	(281)
(180)	第3步: 计算结果后处理.....	(284)
(181)	讨论 2: 离散相模型的耦合计算.....	(288)
(182)	讨论 3: 单个颗粒源的点属性设置.....	(291)
(183)	参考文献.....	(295)

计算流体力学概论

计算流体力学在近年来有了突飞猛进的发展,而且正在以更快的速度前进。推动这一发展的原因,一方面是解决实际问题的需要;另一方面也是计算技术的飞速发展和巨型计算机的出现。

计算流体力学是多种领域的交叉学科,它所涉及的学科有流体力学、偏微分方程的数学理论、计算几何、数值分析、计算机科学等。它的发展促进了这些学科的进一步发展,而最终体现计算流体力学水平的是解决实际问题的能力。

第一节 计算流体力学与数值模拟

任何流体运动的规律都是以以下三个定律为基础的:质量守恒定律、动量守恒定律和能量守恒定律。这些基本定律可由数学方程组来描述,如连续性方程、Euler 方程、N-S 方程等。采用数值计算方法,通过计算机求解这些数学方程,研究流体运动特性,给出流体运动空间定常或非定常流动规律,这样的学科就是计算流体力学。

计算流体力学的兴起推动了研究工作的发展。自从 1687 年牛顿定律公布以来,直到 20 世纪 50 年代初,研究流体运动规律的主要方法有两种:一是试验研究,它以地面试验为研究手段;另一种是理论分析方法,它利用简单流动模型假设,给出所研究问题的解析解,例如势流理论等。这些研究成果推动了流体力学的发展,很多方法仍是目前解决实际问题时常采用的方法。然而,仅采用这些方法研究较复杂的非线性流动现象是不够的,特别是不能满足 50 年代已开始高速发展起来的宇航飞行器绕流场特性研究的需要。

计算流体力学的兴起促进了试验研究和理论分析方法的发展,为流动模型的简化提供了更多的依据。使很多分析方法得到发展和完善。然而,更重要的是计算流体力学采用它独有的研究方法——数值模拟方法——研究流体运动的基本特性。这种方法的特点如下:

- ① 给出流体运动区域内的离散解,而不是解析解;这有别于一般理论分析方法。
- ② 它的发展与计算机技术的发展直接相关;这是因为可能模拟的流体运动的复杂程度、解决问题的广度和能模拟的流体运动的复杂程度都与计算机速度、内存等直接相关。
- ③ 若物理问题的数学提法(包括数学方程及其相应的边界条件)是正确的,则可在较广泛的流动参数(如马赫数、雷诺数、气体性质、模型尺度等)范围内研究流体力学问题,且能给出流场参数的定量结果。

以上这些常常是风洞试验和理论分析难以做到的。然而,要建立正确的数学方程还必须与试验研究相结合。另外,严格的稳定性分析,误差估计和收敛性理论的发展还跟不上数值模拟的进展。所以计算流体力学仍必须依靠一些较简单的、线性化的、与原问题有密切关系的模型方程的严格数学分析,给出所求解问题的数值解的理论依据;然后再依靠数值试验、地面试验和物理特性分析,验证计算方法的可靠性,从而进一步改进计算方法。

试验研究、理论分析方法和数值模拟是当前研究流体运动规律的三种基本方法，它们的发展是相互依赖、相互促进的。计算流体力学的兴起促进了流体力学的发展，改变了流体力学研究工作的状况，很多原来认为很难解决的问题，如超声速、高超声速钝体绕流、分离流以及湍流问题等，都有了不同程度的发展，且将为流体力学研究工作提供新的前景。

第二节 计算流体力学的发展

计算流体力学是随着计算技术和宇航飞行器的发展而发展，且逐步形成一门独立学科的。计算机问世之前，研究工作的重点是椭圆型方程的数值解。20世纪30年代所研究的绕流流场是假设气体的黏性和旋度效应可忽略不计，故流动的控制方程为 Laplace 方程，求解的方法是基本解的迭加。以后，为了考虑黏性效应，有了边界层方程的数值计算方法，并发展为以位势流方程为外流方程，与内流边界层方程相结合，通过迭代求解黏性流场的计算方法。

同一时期，很多数学家研究了偏微分方程的数学理论。Hadamard, Courant, Friedrichs 等人研究了偏微分方程的基本特性、数学提法的适定性、物理波的传播特性、解的光滑性和唯一性等问题，发展了双曲型偏微分方程理论。以后，Courant, Friedrichs 和 Lewy 等人发表了经典论文，证明了连续的椭圆型、抛物型和双曲型方程组的存在性和唯一性定理，且针对线性方程的初值问题，首先将偏微分方程离散化，然后证明了离散系统收敛到连续系统，最后利用代数方法确定了差分解的存在性。他们还讨论了双曲型方程的特征性质，提出了特征线方法，给出了著名的稳定性判别条件：CFL 条件。这些工作是差分方法的数学理论基础。

60年代，基于双曲型方程数学理论基础的时间相关方法开始应用于求解宇航飞行器的气体定常绕流流场问题。这种方法的基本思想是从非定常 Euler 方程或非定常 N-S 方程出发，利用双曲型方程或双曲-抛物型方程的数学特性，沿时间方向推进求解，由此而得到对于时间 t 趋近于无穷大的渐进解为所要求的定常解。该方法虽然要求花费更多的计算时间，但因数学提法适定，又有较好的理论基础，且能模拟流体运动的非定常过程，故这是应用范围较广的一般方法。以后，由 Lax、Kreiss 和其他学者给出的非定常偏微分方程差分逼近的稳定性理论，进一步促进了时间相关方法的发展。

70年代在计算流体力学中，取得较大成功的一大领域是采用时间相关方法，求解可压缩 N-S 方程，数值模拟飞行器超声速、高超声速黏性绕流复杂流场的研究工作。针对流场中激波的数值模拟，发展了高分辨率的差分格式，如总变差递减格式 (Total Variation Diminishing Scheme, 以后简称 TVD 格式)，本质无跳动格式 (Essentially Non-Oscillatory Scheme, 以后简称 ENO 格式)，守恒同族特征方法 (Conservative Supracharacteristic Method, 以后简称 CSCM 方法) 等，形成了第二代差分格式。这些格式的应用使得超声速、高超声速和跨声速绕流流场的计算方法有了大的改进。目前已可模拟包含有各种宏观尺度结构的非光滑流场，如包含有激波、黏性干扰、分离涡、真实气体效应等物理特性的流场，可利用巨型计算机、采用合适的网格生成技术和有效的计算方法，求解非定常可压缩 N-S 方程，模拟各类流动。

在国内，早在 50 年代就有了计算流体力学方面的研究工作。早期的工作是研究钝头体超声速无粘绕流流场的数值解方法。70 年代中，开展了采用时间相关方法求解非定常 Euler 方程，可压缩 N-S 方程和简化 N-S 方程的计算方法研究。在差分格式和构造方面，提出了求解 Euler 方程的特征符号分裂方法和三层格式等。在可压缩 N-S 方程的求解中也提出了许多

有效的方法。

应当指出,近年来计算流体力学发展很快,也有许多较成熟的商业软件包相继出现,如 Fluent、CFX、StarCD 等,这些商业软件的出现,为从事相关专业的研究人员提供了很大的便利,也进一步促进了本学科的发展和应。

第三节 微分方程的分类

当微分方程转化为差分方程并用数值方法求解时,不同类型的微分方程,其数值处理方法各异,其中包括提法的适定性、物理解的性质、差分格式的适用性等。对于一阶拟线性微分方程组,其向量形式为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{F} \quad \text{其中 } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \mathbf{A} \text{ 为 } n \text{ 阶矩阵}$$

设矩阵 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$, 即 $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ 的根, 则:

- ① 当 n 个特征值全部为复数时, 称方程在 (t, x_i) 平面上为纯椭圆型。
 - ② 当 n 个特征值全部为互不相等的实数时, 称方程在 (t, x_i) 平面上为纯双曲型; 而当 n 个特征值全部为实数, 但有部分为相等的实数时, 称方程在 (t, x_i) 平面上为双曲型。
 - ③ 当 n 个特征值全部为零时, 称方程在 (t, x_i) 平面上为纯抛物型。
 - ④ 当 n 个特征值部分为复数、部分为实数时, 称方程在 (t, x_i) 平面上为双曲椭圆型。
- 二阶拟线性方程组, 可以通过降阶法进行类似的分析。

第四节 常用的模型方程

模型方程的引入是为了研究差分格式和计算方法, 并便于对差分格式的性质进行讨论及考核。一般要引入较为简单的模型方程, 要求模型方程必须反映物理问题的最基本的特征, 且便于进行理论分析。

几个典型的模型方程:

- 一维波传播方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- 一维热传递方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 一维对流扩散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- Laplace 方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

• Burger 方程:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

• 无黏 Burger 方程:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

其中前四个方程为线性方程, 可求出解析解; 后两个方程为非线性方程, 也可以求出解析解。例如对 Burger 方程

求解过程如下:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\alpha \text{ 为黏性系数, } \alpha=0 \text{ 时为无黏方程})$$

解: $\alpha \neq 0$ 时, 可令未知函数具有如下的形式:

$$u(x,t) = -2\alpha \frac{\varphi_x}{\varphi} \tag{1-4-1}$$

其中 $\varphi(x,t)$ 是待定的二阶可微分函数, 则有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2\alpha \left(\frac{\varphi_{xt}}{\varphi} - \frac{\varphi_x \varphi_t}{\varphi^2} \right) = -2\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varphi_t}{\varphi} \right)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = 4\alpha^2 \frac{\varphi_x}{\varphi} \left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} \right)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\alpha^2 \left[\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} \right)_x - \frac{2\varphi_x \varphi_{xx}}{\varphi^2} + \frac{2\varphi_x^3}{\varphi^3} \right]$$

将上面三个式子代入 Burger 方程, 得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\varphi_t}{\varphi} - \alpha \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} \right] = 0$$

不妨设 φ 为满足抛物方程, 即

$$\varphi_t - \alpha \varphi_{xx} = 0 \tag{1-4-2}$$

求解上式, 将结果代入 (1-4-1) 式, 得到 Burger 方程的解析解的一般形式。

若 $u(x,t)$ 的初始条件为 $u(x,0) = f(x)$, 则由 (1-4-1) 式得到对应于 $\varphi(x,t)$ 的初始条件为

$$\varphi(x,0) = \exp \left[-\frac{1}{2\alpha} \int_0^x f(s) ds \right] = F(x)$$

由 (1-4-2) 式得到 Burger 方程的通解为

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha t}} ds$$

代入 (1-4-1) 式可得 $u(x,t)$ 的解析解。特别指出, 黏性 Burger 方程的解是连续的。

第五节 差分格式构造方法

构造差分方程的方法是多种多样的。对应于一个微分方程, 可以建立多种不同的差分方程, 它们的解都是原偏微分方程的近似解, 也可以用不同的方法得到相同的差分方程。本节

以一维模型方程为例, 介绍几种常用的差分方程的构造方法。

一、Taylor 级数展开法

(一) 时空节点及差商

双曲型一维方程及初值条件如下:

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \\ t > 0, \quad -\infty < x < +\infty \end{aligned} \quad (1-5-1)$$

其求解域为 $x-t$ 的上半平面。

1. 把求解域分成矩形网格

问题的求解域为 $x-t$ 的上半平面。在上半平面上画出两族平行于坐标轴的直线, 把求解域分成矩形网格。网格线的交点称为节点, x 方向上网格线之间的距离 Δx , 称为空间步长, t 轴上网格线之间的距离 Δt , 称为时间步长 (见图 1-5-1)。

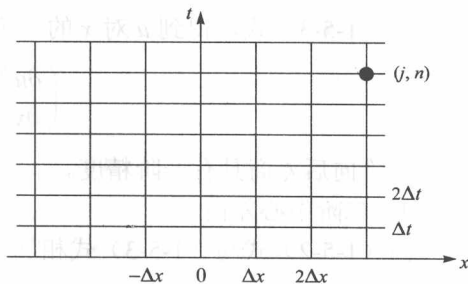


图 1-5-1 $x-t$ 网格线

对于这样的两族网格线, 节点坐标可记为

$$\begin{aligned} x &= x_j = j\Delta x \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ t &= t_n = n\Delta t \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

网格节点 (x_j, t_n) 简记为 (j, n) , 则节点处的函数值可记为

$$u_j^n = u(x_j, t_n) = u(j\Delta x, n\Delta t)$$

2. 偏导数的基本差分表达式 (Taylor 展开法)

为求出偏导数的各种差分表达, 首先对空间坐标将函数 u 做如下 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} u_{j+1}^n &= u(x_j + \Delta x, t_n) \\ &= u_j^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \end{aligned} \quad (1-5-2)$$

$$\begin{aligned} u_{j-1}^n &= u(x_j - \Delta x, t_n) \\ &= u_j^n - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \Delta x^2 - O(\Delta x^3) \end{aligned} \quad (1-5-3)$$

利用这两个展开式, 可导出几种基本差分表达式。

1) 一阶中心差商

用 (1-5-2) 式减 (1-5-3) 式, 然后两边同除 $2\Delta x$, 得到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (1-5-4)$$

上式称为一阶偏导的一阶中心差商表达。它具有 Δx^2 阶的截断误差, 记为 $R = O(\Delta x^2)$, 或说具有二阶精度。当 Δx 趋于零时, 截断误差 R 也趋于零, 因此说差商与微商是相容的。

2) 一阶向前差商

由 (1-5-2) 式, 两边同时减去 u_j^n , 然后等式两边同除以 Δx , 得到 u 对 x 的一阶向前差商

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (1-5-5)$$

一阶向前差商具有一阶精度, $R = O(\Delta x)$, 它与微商也是相容的。

3) 一阶向后差商

由 (1-5-3) 式, 得到 u 对 x 的一阶向后差商

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (1-5-6)$$

一阶向后差商具有一阶精度。

4) 二阶中心差商

由 (1-5-2) 式与 (1-5-3) 式相加, 可以推出二阶偏导数的二阶中心差分表达

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (1-5-7)$$

它具有二阶精度, $R = O(\Delta x^2)$, 二阶中心差商与二阶偏导也是相容的。

3. 对时间的差分表达式

将 u 对 t 进行 Taylor 展开, 有

$$u_j^{n+1} = u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n + \Delta t) = u_j^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (1-5-8)$$

$$u_j^{n-1} = u(x_j, t_{n-1}) = u(x_j, t_n - \Delta t) = u_j^n - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (1-5-9)$$

1) 对时间的一阶向前差商

由 (1-5-8) 式, 可得到 u 对 t 的一阶向前差商

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (1-5-10)$$

2) 对时间的一阶向后差商

由 (1-5-9) 式可得到 u 对 t 的一阶向后差商

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (1-5-11)$$

以上两式的截断误差均为 $R = O(\Delta t)$ 。

有了以上的差商公式, 就可以用差商代替偏微分方程中的微商, 构成逼近偏微分方程的差分方程。差分方程加上离散化的初始条件, 就得到差分格式。当用一阶向前差商逼近时, 导数分别选用三种不同的空间一阶差商来逼近空间偏导数时, 可以构成三种差分格式。

(二) 对定解问题的三种差分格式

定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (1-5-12)$$

1) 中心差分格式

用一阶中心差商代替方程中的微商，将初值条件写成离散形式，差分格式为

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} &= 0 \\ u_j^0 &= f(x_j) \end{aligned} \quad (1-5-13)$$

写成便于计算的格式为

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ u_j^0 &= f(x_j) \end{aligned} \quad (1-5-14)$$

格式截断误差 $R = O(\Delta t, \Delta x^2)$ ，差分方程中用到 $n+1$ 时间层上的一个节点和 n 层上的三个节点。节点如图 1-5-2 所示。

注：① 式中，可令 $\lambda = \Delta t / \Delta x$ ，称为网格比。

② 此格式又称为 FTCS (Forward for Time; Center for Space) 格式。

2) 向前差分格式

用一阶向前差商代替微商，得到

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) \\ u_j^0 &= f(x_j) \end{aligned} \quad (1-5-15)$$

节点如图 1-5-3 所示。

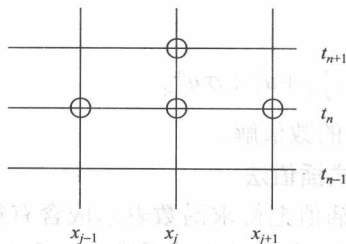


图 1-5-2 中心差分格式节点图

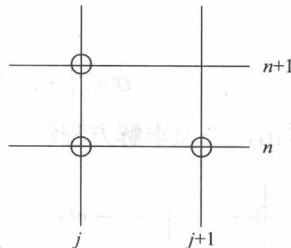


图 1-5-3 向前差分格式节点图

3) 向后差分格式

节点如图 1-5-4 所示，用一阶向后差商代替微商，得到

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) \\ u_j^0 &= f(x_j) \end{aligned} \quad (1-5-16)$$

这三种格式都可以作为原定解问题的近似解。由于 $n+1$ 时间层上只用到一个节点的函数

值，只要已知第 n 层的值就可以计算第 $n+1$ 层上的值，这样从初始条件可逐层计算下去，不必求解方程组。这种格式叫做显示格式。

构成差分格式的 Taylor 级数展开法是一种最常用的方法。它简便但不包含物理意义，得到的差分格式的相容性、收敛性和稳定性还需进一步考证。

注意：对于隐式格式，有如下解法（节点如图 1-5-5 所示）。

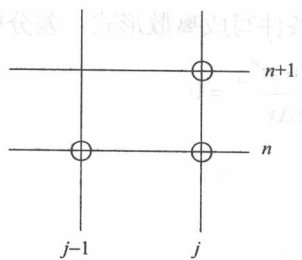


图 1-5-4 向后差分格式节点图

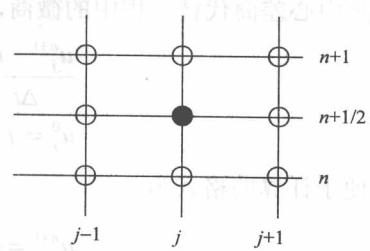


图 1-5-5 隐式格式节点图

在 $(j, n + \frac{1}{2})$ 上，要求满足

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n+1/2} + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^{n+1/2} = 0 \quad (1-5-17)$$

采用时、空间均为中心差分，则有

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \alpha \frac{1}{2} \left[\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right] = 0 \quad (1-5-18)$$

此即为 Crank-Nicolson 格式，为一个隐式格式。

令
$$\sigma = \frac{\alpha \Delta t}{4 \Delta x} \quad (1-5-19)$$

则有

$$\sigma u_{j+1}^{n+1} + u_j^{n+1} - \sigma u_{j-1}^{n+1} = -\sigma u_{j+1}^n + u_j^n + \sigma u_{j-1}^n \quad (1-5-20)$$

由此可明显看出，必须求解方程组才可以得到方程的数值解。

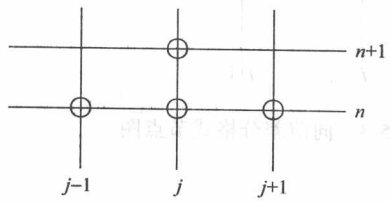


图 1-5-6 中心差分节点图

二、多项式插值法

用多项式插值把待求函数表示成含有待定系数的解析函数，由节点函数值确定该系数，然后对此函数求偏导数，得到逼近偏导数的差商表达式，将差商代入偏微分方程中求出差分方程。

下面以中心差分格式为例，说明多项式插值法及其应用。

(1) 选择差分节点（如图 1-5-6 所示），在第 n 层上有 $j-1, j, j+1$ 三个节点。

(2) 设在此区间上函数 u 可用抛物线插值公式来近似表示，即有

$$u(x, t_n) = a + bx + cx^2 \quad (1-5-21)$$

为方便, 设原点 $x=0$ 在 j 点的位置, 则有

$$u_{j-1}^n = a - b\Delta x + c\Delta x^2$$

$$u_j^n = a$$

$$u_{j+1}^n = a + b\Delta x + c\Delta x^2$$

得

$$b = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$c = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2}$$

(3) 对 $u = a + bx + cx^2$ 微分, 并计算在 j 点的值, 得到

$$u'_x = b + 2cx$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = (b + 2cx)_{x=0} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j = 2c = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

(4) 在第 j 条网格线上, 函数在 n 与 $n+1$ 层内可设

$$u(x_j, t) = \alpha + \beta t$$

有

$$u_j^n = \alpha + \beta t_n$$

$$u_j^{n+1} = \alpha + \beta t_{n+1} = \alpha + \beta t_n + \beta \Delta t$$

得

$$\beta = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

对 $u = \alpha + \beta t$ 微分, 有 $u'_t = \beta$, 则得到时间向前差商

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = \beta = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad (1-5-22)$$

注意:

- ① 结果与 Taylor 公式法相同。
- ② 若用不同的节点图, 可得到一阶向前或向后差商。
- ③ 用高阶多项式插值可得到高阶差分表达式, 除一、二次多项式外, 所得到的表达式与高阶 Taylor 展开得到的结果不相同。
- ④ 除边界附近的微商外, 不采用多项式插值方法。

三、待定系数法

(1) 选择差分节点 (如图 1-5-7 所示)。

设差分格式的形式为

$$\alpha u_j^{n+1} + \beta u_j^n + \gamma u_{j+1}^n = 0 \quad (1-5-23)$$

(2) 利用 Taylor 展开

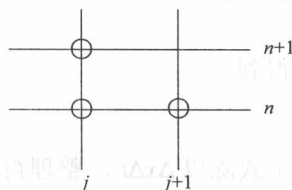


图 1-5-7 向前差分节点图