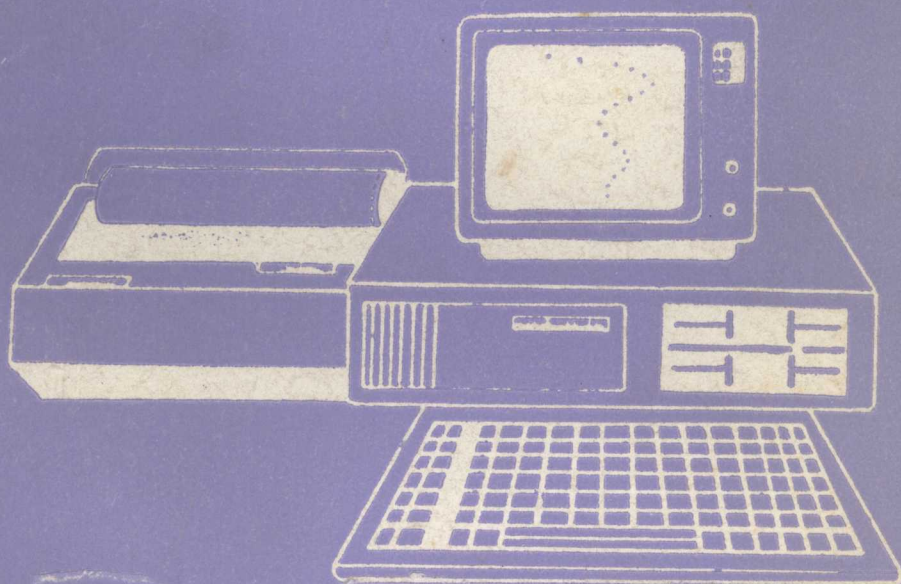


数字控制理论及应用

姚 樵 耕 编 著



中 国 纺 织 大 学

数字控制理论及应用

姚 雄 耕 编 著

立要本野天独，用宜野装廿，用重半建，照发息外，未建息外至，建建息外到到建建于建建在本

中国纺织大学

十 国 幼 儿 人 手

内 容 简 介

《数字控制理论及应用》是专门研究数字信号的传递、变换和控制的基本理论与方法的，是数字计算机应用与控制的理论基础，是现代工程技术人员必备的知识之一。

本书原系中国纺织大学自动化及计算机应用等专业高年级学生与研究生用教材，试用了六年多。这次，作者又结合自己的研究工作，参考了国内外大量文献，重新编写。全书共15章，第1—9章是经典理论，第10—14章是现代理论，第15章是数字系统仿真。主要内容可以概括为三大部分：第一、数字信号与数字系统的数学描述与分析基础；第二、数字系统的性能分析；第三、数字系统的校正及综合。各章均有较多的实例，都经过数字仿真验证，准确无误，各章配备足够的习题，并附有习题参改答案。因此，本书是既有理论、又有实例、习题答案，还有若干仿真实验的完整的教材系统。内容丰富、由浅入深，言简意明，条理清晰，便于教与学。

本书适用于高等院校自动控制、无线电技术、信息处理、数字通讯、计算机应用、航天技术等专业的教学与参考用书，也可供有关工程技术人员参考。

数字控制理论及应用

编 著 姚 樵 耕

责任编辑 李 益 祖 徐 丹 林

编 辑：上海高教局联合实业公司

（上海陕西南路202号）

印 刷：常州煤矿印刷厂

787×1092毫米 16开 25.7印张 612千字

1986年5月第一版 1986年7月第一次印刷

印数1—1200册

（内部使用、不准翻印）

前 言

《数字控制理论及应用》是现代数字计算机应用与控制的理论基础。由于数字计算机的广泛应用,原来的连续模拟系统变成了离散数字系统,要求处理与控制的信号,多数是离散的数字信号。因此,它是现代工程技术人员必备的知识。

数字系统理论及应用,乃是主要研究数字信号的传递、变换及控制的基础理论与基本方法的一门新学科。它是现代网络理论、现代控制理论的基础,也是信号检测、估计及处理、系统识辨、数字滤波、数字通讯和数字控制等系统的理论基础,涉及到许多领域,受到人们的普遍重视。

本书采用先讲经典理论,后讲现代理论的教学顺序。这种安排方法,主要考虑到学生已有的基础和我国的教学习惯,这样比较符合由浅入深的认识规律,有利于教与学。本书共分十五章。第一到第九章为经典理论;第十到第十五章是现代理论。各章配有足够的习题,书后附有参考答案,供读者练习和参考。本书取材精炼、文字简明扼要,强调工程应用,不重数学推导。编者认为讲述过分详尽细致,会妨碍学生的智能发展。为了培养学生的能力,特别是思维能力,应当有意识给学生留下一个又一个问题,启发学生自己去深入思考,刻苦钻研,从而得出结论。

本书原系中纺织大学自动化、计算机应用等专业的高年级学生与研究生用教材。六年来,试用了七遍,重印了三次。从中国纺织大学自动化系多年的教学实践看,对于学过连续控制理论及线性代数的学生,本书的教学时数约需60~80个学时。经典理论与现代理论各占一半学时左右。由于这两部分是相对独立的,因此,可以根据学时多少而选用之。

本书在重编出版过程中,严伯钧等同志给予了大力支持和帮助。黄振国、孙福良等同志为本书做了习题解答,并用计算机仿真,验证了许多实例,使本书尽量做到准确无误。在此,表示衷心的感谢。

限于编者的水平,尚有不妥或错误之处,恳请读者指正。

编 者

1986年1月于上海

目 录

第一章 绪 论

第一节	数字系统的基本概念	1
第二节	量化电平与量化误差	2
第三节	数字系统的分类及其重要性	4
第四节	数字系统应用示例	4
第五节	数字系统的组成及基本问题	6

第二章 采样与保持

第一节	离散函数及其频谱	8
第二节	采样定理及采样周期	10
第三节	信号复现与保持器	14
习 题		21

第三章 Z 变换理论

第一节	Z 变换原理	24
第二节	$X(z)X^*(s)X^*(\omega)$ 之间的关系	29
第三节	由拉氏变换求 Z 变换	31
第四节	Z 反变换	37
第五节	Z 变换定理	43
第六节	两函数乘积的 Z 变换	47
习 题		52
附录3A:	典型函数拉氏变换、Z 变换和修正 Z 变换对照表	55
附录3B:	Z 变换的性质表	56

第四章 数字系统的差分方程

第一节	差分与和分	57
第二节	差分方程	61
第三节	差分方程的古典解法	64
第四节	差分方程 Z 变换解法	70
习 题		72

第五章 数字系统的传递函数

第一节	数字系统的传递函数	73
第二节	数字系统的方块图	81
第三节	数字系统的信号流图	86
习 题		92

附录5 A：典型数字系统的方块图、信号流图及其输出 $C(s)$ 、 $C(z)$	94
---	----

第 六 章 数 字 系 统 的 稳 定 性

第一节 数字系统的稳定条件.....	95
第二节 R—H 稳定准则.....	96
第三节 S—C 稳定准则及其修正准则.....	99
第四节 数字系统的乃氏稳定准则.....	107
习 题.....	112

第 七 章 数 字 系 统 的 准 确 性 和 快 速 性

第一节 稳态误差分析.....	114
第二节 极点位置与暂态响应的关系.....	120
第三节 最大超调量和峰值时间.....	123
第四节 根轨迹分析法.....	135
第五节 动态过程点绘法.....	142
第六节 修正Z 变换及其应用.....	145
习 题.....	150

第 八 章 多 种 采 样 频 率 的 数 字 系 统

第一节 引 言.....	153
第二节 Slow-Fast 多频率采样系统.....	154
第三节 Fast-Slow 多频率采样系统.....	159
第四节 全数字环节多频率数字系统.....	162
第五节 闭环多频率数字系统.....	162
习 题.....	164

第 九 章 数 字 控 制 系 统 的 校 正 与 综 合 (Z 域 法)

第一节 引 言.....	167
第二节 数字控制器.....	168
第三节 根迹法校正的一种简化方法.....	174
第四节 极点零点综合法.....	180
第五节 最少拍及无波纹设计.....	188
第六节 最小方差设计.....	200
第七节 纯滞后系统设计.....	204
习 题.....	207

第 十 章 数 字 系 统 状 态 空 间 分 析 法

第一节 动态系统及其状态的概念.....	211
第二节 线性、数字动态系统.....	213
第三节 非时变线性数字系统.....	215
第四节 数字系统的实现问题.....	219
第五节 线性时变连续动态系统.....	230

第六节	非时变、线性连续系统	234
第七节	常系数、线性微分方程状态空间表示法	237
第八节	具有采样输入的线性连续系统	238
习 题		242

第 十 一 章 数 字 系 统 的 能 控 性 和 能 观 性

第一节	引 言	248
第二节	能控性定理	249
第三节	能观性定理	253
第四节	对偶性原理	255
第五节	能控性、能观性与传递函数的关系	256
第六节	能控性、能观性与采样周期的关系	257
第七节	应用举例	258
第八节	能控不变性定理	262
第九节	结构分解与传递矩阵	264
习 题		267

第 十 二 章 数 字 控 制 系 统 的 极 点 配 置

第一节	状态反馈极点配置(单输入 $r=1$)	270
第二节	状态反馈极点配置(多输入 r 维)	272
第三节	输出反馈极点配置	276
第四节	化多输入系统为单输入系统的极点配置方法	277
第五节	多输入系统输入变换极点配置方法	283
习 题		286

第 十 三 章 数 字 状 态 观 测 (估 计) 器 设 计

第一节	引 言	288
第二节	满维状态观测(估计)器设计	289
第三节	用能观标准型来设计观测(估计)器	294
习 题		298

第 十 四 章 数 字 系 统 线 性 最 优 控 制

第一节	单输入系统时间最佳综合	300
第二节	多输入—多输出系统时间最佳控制	309
第三节	调节器问题	317
第四节	最小能量控制	320
第五节	具有二次型性能指标的最优控制	330
习 题		335

第 十 五 章 数 字 系 统 计 算 机 仿 真 研 究

第一节	引 言	337
-----	-----	-----

第二节	数字系统稳定性的计算机辅助分析.....	337
第三节	脉冲传递函数型式的数字仿真.....	340
第四节	数字系统结构图型式的数字仿真.....	343
第五节	混合系统结构图型式的数字仿真.....	348
习 题		354
附 录15 A:	[仿1] 程序清单.....	356
附 录15 B:	[仿2] 程序清单.....	357
附 录15 C:	[仿3] 程序清单.....	359
附 录15 D:	[仿4] 程序清单.....	363
习题参考答案		369

第五章 离散系统的计算机辅助分析

第一节	离散系统的数学模型.....	371
第二节	离散系统的稳定性分析.....	375
第三节	离散系统的稳态响应.....	379
第四节	离散系统的计算机辅助分析.....	383
习 题		387

第六章 离散系统的计算机辅助分析

第一节	离散系统的数学模型.....	391
第二节	离散系统的稳定性分析.....	395
第三节	离散系统的稳态响应.....	399
第四节	离散系统的计算机辅助分析.....	403
习 题		407

第七章 离散系统的计算机辅助分析

第一节	离散系统的数学模型.....	411
第二节	离散系统的稳定性分析.....	415
第三节	离散系统的稳态响应.....	419
第四节	离散系统的计算机辅助分析.....	423
习 题		427

第八章 离散系统的计算机辅助分析

第一节	离散系统的数学模型.....	431
-----	----------------	-----

第一章 绪 论

第一节 数字系统的基本概念

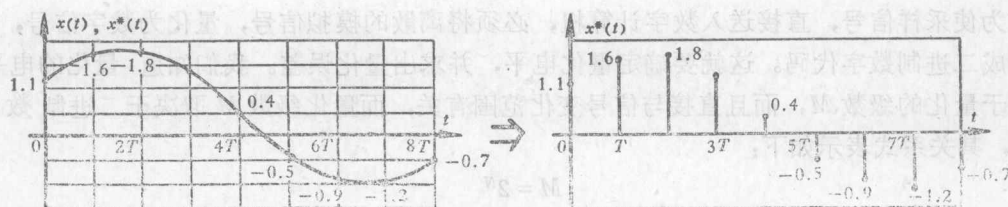
一、连续系统与继续系统

一切动态系统，从本质上看，无非是信号的传递和变换。而信号的传递与变换的方式，可分为连续与断续两类。连续系统，它所传递与变换的是信号的每一瞬时值；断续系统，它所传递与变换的乃是信号的整量值。

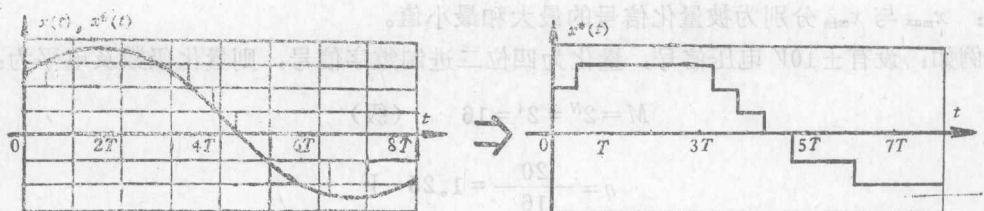
二、整量化的概念

连续的模拟信号，它在时间和幅值上，都具有无限多的数值，而用有限的时间间隔和有限的数值取代之，这种近似的过程，称之为整量化。

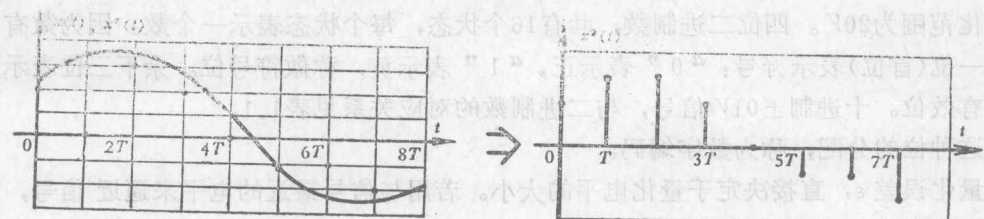
整量化，通常分三类，如图1.1所示。



(a) 按时间整量化



(b) 按幅值数量化



(c) 按时间—幅值整量化

图1.1

1. 按时间整量化

乃在某些固定的时间取信号值, 在工程上, 叫做采样或取样。这种信号, 称为采样信号。采样信号的幅值, 是采样时刻信号的实际值。因而, 其幅值的大小, 在一定的物理限度内, 可能是任意的, 即可能有无穷多种数值, 它与原信号成线性关系, 其代表一定的物理量。人们把这种采样, 称之为模拟采样, 如图1.1(a)所示。

2. 按幅值整量化

乃是信号在某些固定的幅值上取值, 这是实际信号的近似值。因而, 信号只在等于某些固定幅值时, 才发生变化, 且是跳跃变化的。这些幅值, 是有限的数字量。显然, 整量化信号, 与原信号是非线性关系, 如图1.1(b)所示。

3. 按时间与幅值整量化

这是上述两种整量化方法的结合。乃是用时间离散的数字信号, 取代在时间上连续的模拟信号。这些数字信号, 近似地等于各离散时刻信号的实际值。这也是一种采样, 通常称之为数字采样, 如图1.1(c)所示。

第二节 量化电平与量化误差

为使采样信号, 直接送入数字计算机, 必须将离散的模拟信号, 量化为数字信号, 而且要编成二进制数字代码。这就要确定量化电平, 并求出量化误差。我们知道, 量化的电平 q , 取决于量化的级数 M , 而且直接与信号变化范围有关, 而量化级数 M 取决于二进制数的字长 N , 其关系式表示如下:

$$M = 2^N \quad (1)$$

$$q = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{M} \quad (2)$$

其中: $x_{\max}$ 与 $x_{\min}$ 分别为被量化信号的最大和最小值。

例如: 设有 $\pm 10V$ 电压信号, 量化为四位二进制数字信号, 则量化级数及电平为:

$$M = 2^N = 2^4 = 16 \quad (\text{级})$$

$$q = \frac{20}{16} = 1.25 \text{ V}$$

这是因为 $\pm 10V$ 电压信号, 其最大值 $x_{\max} = +10V$, 最小值 $x_{\min} = -10V$, 所以, 被量化信号变化范围为 $20V$ 。四位二进制数, 共有16个状态, 每个状态表示一个数。因为数有正负, 要用一位(首位)表示符号: “0”表示正, “1”表示负, 称做符号位。余下三位表示数值, 称为有效位。十进制 $\pm 10V$ 信号, 与二进制数的对应关系见表1.1。

这种位的分配, 称为数字编码。

量化误差 ε , 直接决定于量化电平的大小。若用与信号最近的电平来逼近信号, 则最大量化误差为:

$$\varepsilon_{\max} = q/2 = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2^{N+1}} \quad (3)$$

表1.1

十进制 → 二进制		十进制 → 二进制	
+9.375	0111	-0.625	1000
+8.125	0110	-1.875	1001
+6.875	0101	-3.125	1010
+5.624	0100	-4.375	1011
+4.375	0011	-5.625	1100
+3.125	0010	-6.875	1101
+1.875	0001	-8.125	1110
+0.625	0000	-9.375	1111

如果量化误差的概率密度 $p(\varepsilon)$ 为均匀分布, 且有

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{q} \left(+\frac{q}{2} \leq \varepsilon \leq -\frac{q}{2} \right) \quad (4)$$

并与信号 $x(nT)$ 相互独立, 则量化方差及均方根据误差为

$$\sigma^2 = \int_{-q/2}^{+q/2} \varepsilon^2 p(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{q^2}{12} \quad (5)$$

$$\sigma = q/2\sqrt{3}$$

可见, 量化误差 ε , 方差 σ^2 及均方根误差 σ , 都与量化电平 q 有关。字长 N 越大, q 值越小, 则量化误差越小。就上例而言, 4位字长, $q = 1.25$, $\varepsilon_{\max} = 0.625$, $\sigma^2 = 0.1302$, $\sigma = 0.3608$ 。一般微型机为8位字长或16位字长。所以, 量化误差是很小的。

与上述三种整量化方法相对应, 形成三种断续系统:

- (1) 模拟采样系统——按时间整量化;
- (2) 继电特性系统——按幅值整量化;
- (3) 数字采样系统——按时间与幅值整量化。

理论上讲, 模拟采样系统, 属于线性系统; 而继电系统, 属于非线性系统; 数字采样系统, 也是非线性的。

而实际上, 数字采样系统, 对于小信号或整量单位很大时, 则应看成非线性; 而大信号或整量单位很小时, 则可视为线性系统。

近代数字系统, 通常就是采用数字计算机的系统, 由于其字长和容量很大, 整量化的单位是很小的, 数字信号的精度是很高的。因而, 数字采样系统, 可以视为线性系统。而模拟采样系统, 由于测量、传递、运算、变换的精度有限, 实际上把它当成线性系统, 也是近似的。

为了研究方便, 数字采样系统与模拟采样系统, 我们统称之为采样系统, 离散时间系统, 或简称为数字系统, 都用线性数字系统理论来研究。

第三节 数字系统的分类及其重要性

根据采样周期 T 的不同, 可分为三类:

1. 定周期采样的数字系统, 其采样周期是一定的, 均匀不变的, 又称为均匀采样;
2. 变周期或多速采样的数字系统, 其采样周期 T , 按某种规律变化, 或有几种采样周期, 同时进行采样。

3. 随机采样的数字系统, 其采样瞬时是随机变化的。采样周期 T 的变化是随机的。

第一类, 工程应用最为广泛。且因限于篇幅, 本书主要研究第一类, 即定周期的数字系统。为何需要数字系统呢?

首先, 是适应生产过程的间断性。诸如化工生产中, 化学成分的变化, 需要一个时间过程。因而, 成分的测量、分析及调节, 都需要采样地进行。

第二, 数字系统, 乃是一种脉冲系统, 它具有比连续系统更高的精度, 这是由于脉冲信号抗扰能力强。例如, 电报比电话更准确, 数字仪表比模拟仪表更精确, 这是显而易见的。

第三, 数字系统, 可以简化系统结构, 节省设备, 它比连续系统更经济。我们可以用一台数字巡回检测仪采样地测量成百上千点的温度、速度及其它物理量。用一套数字控制器或计算机, 采样控制很多点的许多参数。显然, 可以代替大量的模拟仪表, 节省大量资金。

第四, 数字系统, 通用性强, 只要通过程序编制, 就可以改变信号的处理与控制方式。通过软件的配置, 可以实现从简单调节到复杂控制, 进而达到最优控制。

第五, 还有采用的技术本身的特点, 就决定了它必然是数字系统。例如雷达测量, 电码传输, 数字通讯等。

总之, 由于计算机具有惊人的高速度, 丰富的记忆力, 计算机系统的应用, 将越来越广泛。所以, 数字系统, 乃是近代测量与控制技术数字化的结果, 它具有特殊的重要性。

第四节 数字系统应用示例

一、模拟采样系统

在工业生产过程中, 往往有许多工位, 要求在同样的条件下加工, 需要测量与控制的点数很多。例如化学纤维生产中, 热牵伸机便是如此, 有144个加工部位, 每个工位有一个加热器(热槽、热板或热盘), 需要恒温控制, 可以用一套装置, 进行采样控制。如图1.2所示。

该系统组成如下:

1. 控制对象, 电加热器, 共144只, 要求同温控制在 $180^{\circ} \pm 1^{\circ}$ 。
2. 测量元件铂金热电阻, 共144只, 要求同规格。
3. 控制器, 公用一只脉冲控制器, 控制规律断续PID、或时间比例, 也可位式通断控制。
4. 采样器, 干簧开关, 共144只, 每只四对触头, 由采样矩阵驱动控制, 采样速度为每秒2点, 采样周期 T 为72秒。
5. 保持器 与执行器继电器, 共144只。

6. 给定器与比较器 由给定电位器, 测量电阻和固定电阻, 组成电桥。测量电阻, 是采样地接入的。

这种采样控制系统, 是很经济的。因而应用很广泛。

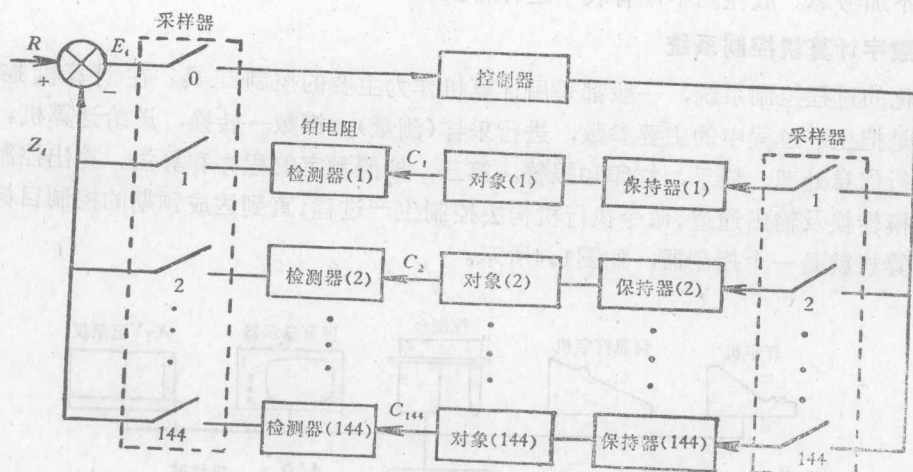


图1.2 多点温度采样控制系统

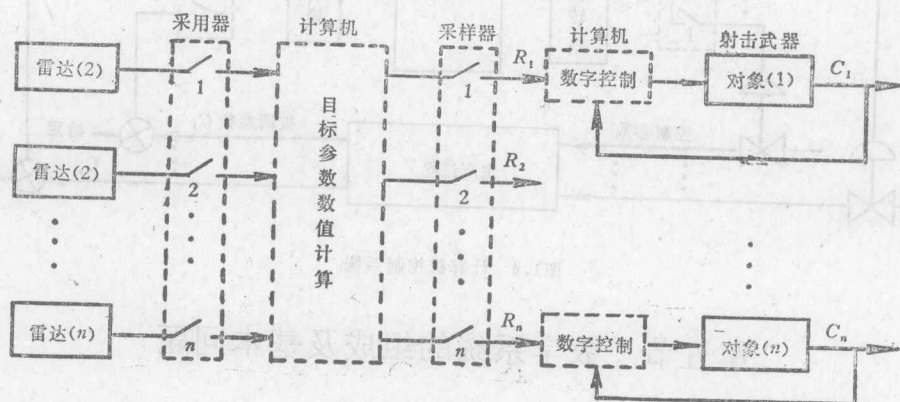


图1.3 数字随动系统

二、数字随动系统

在国防上, 仪表、机械工业中, 数字随动系统, 应用很广、图 1.3 就是一个数字随动系统的例子。它是由雷达、计算机、火炮组成的防空系统。

其工作原理是: 当目标进入雷达作用半径内, 雷达便自动跟踪目标、同时, 将目标信息采样地送入计算机, 计算机按照人们事先规定的算法和程序, 迅速算出目标的方位, 航向, 航速, 并指挥数字随动系统, 驱动火炮发射装置, 瞄准目标, 进行射击, 去击中目标。若控制对象是发射导弹, 则计算机还要计算导弹的飞行参数, 指挥控制雷达, 引导导弹, 去接近和命中目标。

由于计算机的高速度和大容量, 它可以处理很多跟踪雷达搜集来的情报, 为很多火炮提供目标的状态参数, 指挥很多火炮, 去瞄准和围击目标, 这便是现代化的人民防空系统。

在这种数字系统中，计算机实际上是一个解算装置，它和模拟采样系统的区别是，既需要进行模—数转换 (A/D)，又需进行数—模转换 (D/A)。但是， A/D 或 D/A 转换器，只具有物理意义，在精度允许范围内，不影响动态过程数学分析。因此，在动态分析数学模型中，可以不加考虑。故在图中没有表示这种转换器。

三、数字计算机控制系统

现代化的过程控制系统，一般都采用计算机作为主要的控制工具。在计算机控制系统中，首先是把生产过程中的主要参数，进行采样(测量)，模数—转换，送给计算机。其次，计算机进行信息处理、显示，打印和报警。第三，按照预定的程序和算法，算出控制量，再通过数—模转换及输出通道，命令执行机构去控制生产过程，直到达成预期的控制目标为止。这儿，计算机就是一个控制器，如图1.4所示。

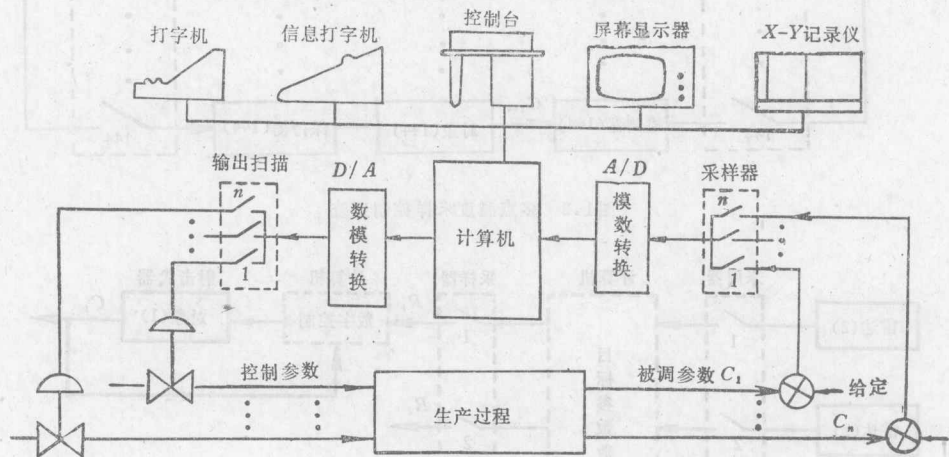


图1.4 计算机控制系统

第五节 数字系统的组成及基本问题

一、数、字系统的基本形式及组成

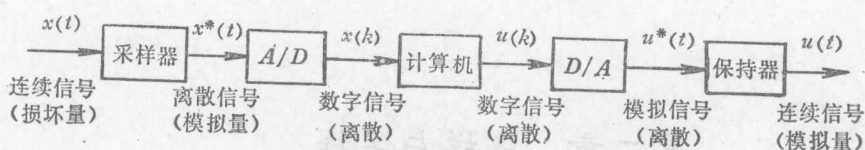
其基本形式有两种：

1. 开环数字系统 巡回检测系统，数据处理系统，开环数字控制系统，都是属于开环数字系统，其模型如图1.5(a)所示。其基本组成为：采样器、保持器， A/D ， D/A 转换器。
2. 闭环数字系统 其特点是采用了反馈回路，如图1.5(b)所示(注意，(A/D ， D/A 与动态无关，亦可不要画出))

这两种模型，具有典型性和代表性。我们研究数字系统的动态性能时，不必讨论组成一个实际系统的每一个部件和所有的回路，只需要研究这种基本结构。

二、数字系统的基本问题

首先，是采样的真实性和数字系统的数学描述。采样信号怎样才能如实地反映原来的连续信号，又如何从采样信号中复现原来的信号，这关系到采样定理与保持器理论。



(a) 开环数字系统



(b) 反馈数字控制系统

图 1.5

其二，是数字系统的稳定性、准确性与快速性分析。任何动态系统，都必须确保其稳定性，否则是无法工作的。由于数字系统的延滞性，稳定性问题比连续系统突出。当然，仅仅稳定是不够的、还必须准确、迅速。

第三，数字系统的校正与综合，是为数字控制与计算机控制提供程序算式的，因而是非常重要的。

三、研究数字系统的基本方法

基本方法有两种： Z 域法和时域法。

1. Z 域法，目前应用较多，它和拉氏变换及传递函数(S 域法)差不多，是解决单输入单输出，线性定常数字系统的有效工具。

2. 状态空间法，它是一种时域方法，对于多输入多输出系统、时变系统，就显得十分必要了，这种方法，特别适用于计算机进行数值计算和控制。

数字系统，特别有利于采用数字计算机进行辅助分析与设计，可以进行仿真试验。

第二章 采样与保持

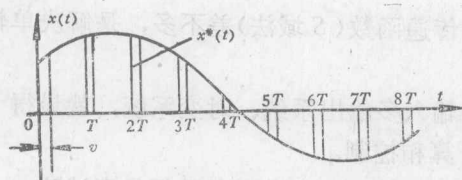
第一节 离散函数及其频谱

数字系统的首要问题,是如何确保采样的真实性。采样定理,就是给出采用不失真条件的定理。为更好地研究这个定理,必须先研究采样过程及其数学描述,并导出离散函数及其频谱。

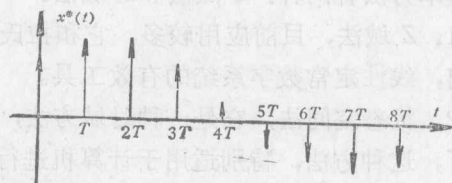
一、离散函数

采样过程 乃是将连续信号变换成离散信号的过程。这个过程,是由采样器完成的。采样器可以看成是一个开关,故又称采样开关。它每隔一定时间 T , 闭合一次, 这个时间 T , 就是采样周期。这样, 原来连续信号 $x(t)$ 便变成离散的栅状信号了如图 2.1 (a) 所示。

离散函数 如果采样持续时间 ν , 即采样开关闭合时间很短, 和采样周期及系统的时间常数相比, 可以忽略时, 则离散栅状信号可以看成一串脉冲, 脉冲的强度, 分别等于采样时刻 kT 的信号值 $x(kT)$ 。如图 2.1 (b) 所示。这个脉冲系列称为采样函数或离散函数, 记作: $x^*(t)$ 。



(a) 采样过程



b) 采样函数

图1.6

采样看成调制 离散函数 $x^*(t)$ 与连续函数 $x(t)$ 关系如何呢? 借助调制的概念, 可以导出它们的关系式。假设载波函数是一串单位脉冲序列, 其周期等于采样周期 T , 用 $\delta_T(t)$ 表示。

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad (1)$$

由脉冲函数的采样性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - kT) dt = x(kT) \quad (2)$$

及调制过程的数学表示式

$$x(t) = x(t) \delta_T(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad (3)$$

当 $x(t)$ 在采样点连时则有

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\delta(t-kT) \quad (4)$$

被调制函数，即连续函数 $x(t)$ ；调制后的函数，即离散函数 $x^*(t)$ ；调制函数 为单位脉冲序列，也称它为采样函数 $\delta_T(t)$ ，调制过程示于图1.7。

可见，离散函数 $x^*(t)$ 可以表示为广义函数，其幅值等于采样值 $x(kT)$ ，分布在时间轴上相应的 $t=kT$ 处，这个表达式，是采样系统的基本关系式，也就是采样过程的数学描述。

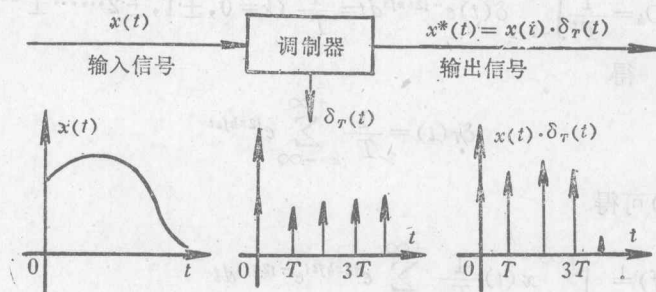


图2.2 采样看成调制

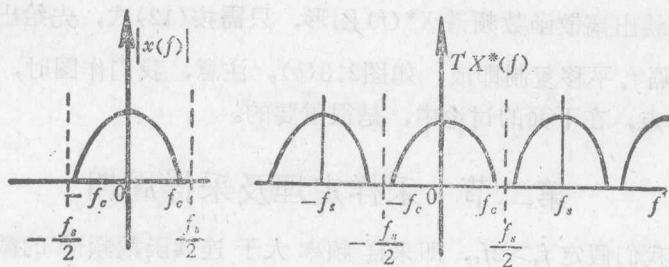
二、离散函数的频谱

为进一步揭示离散函数 $x^*(t)$ 与连续函数 $x(t)$ 数之间的关系，我们来讨论 它们的频谱，这儿，需要借助于富里叶变换理论。

设连续函数 $x(t)$ 由富里叶变换，可得频谱函数：

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \quad (5)$$

式中 f 为频率(次/秒)。这样定义富里叶变换，免去了积分前面的 系数的 麻烦。且与拉普氏变换一致起来。通常，这个频谱是有限带宽的，即当频率 f 大于或等于某个频率 f_c 时，频谱 $|X(f)|$ 为零，这个频率 f_c 称之为截止频率。如图2.3(a)所示。



(a) 连续函数的频谱

(b) 采样函数的频谱

图2.3 ($f_s < f_c$)

同样，离散函数 $x^*(t)$ 的频谱，记着 $X^*(f)$ ，由傅里叶变换得：

$$X^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-i2\pi ft}dt \quad (6)$$