高等学校教学用书

高等数学

第三卷

R. 罗德著

秦裕瑗譯

人民教育出版社

高等学校教学用书

高 等 数 学

第三卷

R. 罗德 著
秦裕瑗 譯

人民教育出版社

本书系根据莱比錫托伊布訥出版社(B. G. Teubner Verlagsgesellschaft)出版的罗德(R. Rothe)著“高等数学”(Höhere Mathematik)第三卷1956年第9版譯出。原书特点是叙述簡要，內容丰富，注重实用近似方法、計算技巧与科技应用，而又不忽視必要的理論基础。此外，并附有相当数量的例题和习题。虽然书中对較重要与較难的材料有足够詳尽的与富于启发性的讲解，但有許多地方仍需讀者作相当大的努力才能深入理解，确实得到好处。本书可以推荐給教学經驗丰富的教师；如果吸取其中的优点，适当加以发揮，可以帮助他們在教学上取得較好的效果。

原书是供德国大学数理系及工科各系学生用的，因此对我国同类性质的各系也有相当大的参考价値，特别是适用于需要数学較多的工科各系。

高等数学

第三卷

R. 罗德 著

秦裕瑗 譯

北京市书刊出版业营业許可证出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号K13010·1089 开本 850×1168 1/32 印张 8 4/16

字数 206.000 印数 000,1—3,800 定价(6)￥0.80

1963年8月第1版 1963年8月北京第1次印刷

序　言

本卷包含曲面与曲綫坐标、曲綫积分与重积分的最重要的定理，末后还有一章微分方程，所有这些部分里都有許多应用。为了使讀者熟练并加深知識，附有九十七个练习題，分成十批。本书有些地方叙述比較簡略，如果讀者确实要想从中得到好处，深入艰苦学习是必要的。

本卷是第九版，只是第八版的未加修改的重印版。著者已于1942年故世，本书已經过多次版的考驗，可以不再修改了，而不一致和排印錯誤的地方已随时加以修正了。

托伊布訥出版社　1956年秋于萊比錫

目　录

第一章　曲面与空間曲綫坐标

§1.　曲面的解析表示·例

1. 参数表示　如果空間一点P——或者也同样可以說是矢量$\boldsymbol{r}=\overline{OP}$——的三个坐标$x$、$y$、$z$依賴于两个独立参量$u$、$v$，那末点$P$的所有对应位置在空間（一般說来）构成一个曲面（$F$）。它的方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)=x(u, v)\boldsymbol{i}+y(u, v)\boldsymbol{j}+z(u, v)\boldsymbol{k}.$$

参量u、v的值叫做P在曲面（F）上的曲綫坐标。我們假定，u、v的每个值偶只有一个点与之对应，而每一个点只有u、v的一个值偶与之对应。如果現在給v以一个固定的值而令u依增大的方向变化，曲面（F）上就得到一条有确定描繪方向的空間曲綫（参看第二卷§28,4），如果給v以另一个固定的值，則又得到另一条这样的空間曲綫。

这族曲綫叫做u曲綫。如果給u以不同的固定值而令v为变量，則所得的对应曲綫族叫做曲面（F）上的v曲綫。这两族曲綫一起构成坐标曲綫网（图1），因而这个网的位置与描繪方向是随曲面的参数表示$\boldsymbol{r}(u, v)$而唯一給定的。

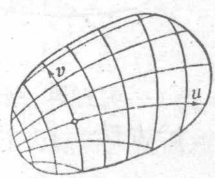

图 1

如果从方程

$$x=x(u, v),\quad y=y(u, v),\quad z=z(u, v)$$

消去两个变量u、v，便得形式为

$$F(x, y, z)=0$$

的曲面方程，从这解出 z，便得

$$z=f(x, y);$$

参看第一卷 § 18, 1 以后我們假定，本书中所讲的这些函数在一个确定的域里都是連續的，并且对三个变量中的每一个都是可以偏微分的。

2. 例　a) 方程

$$\boldsymbol{r}=u\cos v\boldsymbol{i}+u\sin v\boldsymbol{j}+\sqrt{a^2-u^2}\boldsymbol{k}$$

对于 $0\leqslant u\leqslant a, 0\leqslant v<2\pi$ 表示立在 xy 平面上的半球面，因为

$$x^2+y^2+z^2=(u\cos v)^2+(u\sin v)^2+(\sqrt{a^2-u^2})^2=a^2.$$

u 曲綫（只有 u 变动）是通过 z 軸且垂直于 xy 平面的四分之一圓周，v 曲綫（只有 v 变动）是平行于 xy 平面的圓周，所以网是由子午綫及緯圓所构成的（图 2）。

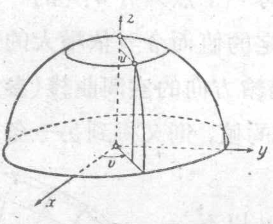

图 2

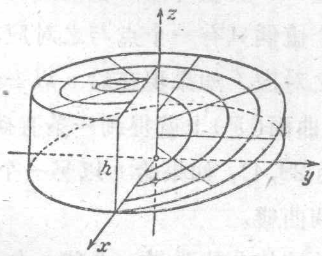

图 3

b) 方程

$$\boldsymbol{r}=u\cos v\boldsymbol{i}+u\sin v\boldsymbol{j}+cv\boldsymbol{k}$$

表示有下列性质的曲面：这里点的坐标 x、y 与 u 的关系只是綫性的，而 z 与 u 无关。所以 u 曲綫是平行于 xy 平面（$z=$常数）的直綫。可是如果 v 变动（u 固定），那末曲面上点 $P=(u, v)$ 繪成一条螺旋綫（第二卷 § 28, 13）。所以曲面的网由螺旋綫及直綫所构成，这曲面便叫做螺旋面或梯面（它是无限宽的螺旋梯面，具有无限多且又无限密的台阶）。从运动学的观点来說，把一个矩形繞它的一

边作等速旋轉，同时沿这个边作等速位移，所描成的图形就是这螺旋面(图 3)。它的直角坐标方程是(消去 u 与 v)

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}v=\operatorname{tg}\frac{z}{c}.$$

这螺旋面也可用别的参数方程来表示，例如表示成

$$\boldsymbol{r}=uv\cos v\boldsymbol{i}+uv\sin v\boldsymbol{j}+cv\boldsymbol{k};$$

因为由点的坐标 $x=uv\cos v$, $y=uv\sin v$, $z=cv$ 也得到像上面一样的方程 $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z}{c}$。但現在的 v 曲綫($u=$常数)是圓錐螺旋綫，即它是在圓錐面(参看下节) $x^2+y^2=\frac{u^2}{c^2}z^2$ 上的螺旋綫。

3. 旋轉曲面 以 z 軸为軸的旋轉曲面可以用下列形式的方程来表示:

$$\boldsymbol{r}=u\cos v\boldsymbol{i}+u\sin v\boldsymbol{j}+f(u)\boldsymbol{k},$$

其中 u 表示曲面上的点到 z 軸的距离，v 表示子午綫截面与 xz 平面的交角(图 4, 即地理經度)，而 $z=f(u)$ 是在 zu 平面上的子午綫方程。子午綫是 u 曲綫，而与 z 軸垂直的緯圓是 v 曲綫。曲面的直角坐标方程是

$$z=f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

讀者可把任一平面曲綫(例如直綫、正弦曲綫、双紐綫…)繞 x 軸或 y 軸旋轉，并建立所得旋轉曲面的方程，作为练习。把曲綫 $y=$

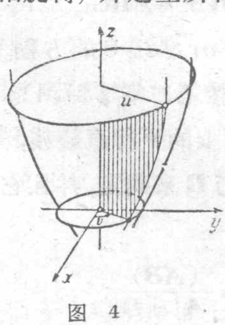

图 4

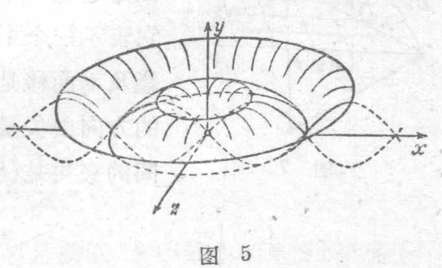

图 5

$=|\sin x|$ 繞 y 軸旋轉一周所得到的旋轉曲面的方程是

$$y=|\sin\sqrt{x^2+z^2}|$$

(圓盘形的波浪面馬口铁片图 5)。把它繞 x 軸旋轉时，所得旋轉曲面的方程是 $y^2+z^2=\sin^2 x$(像一串珍珠，图 6)。

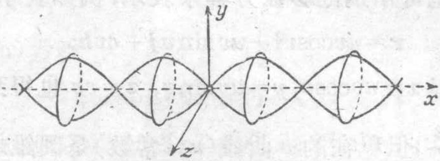

图 6

如果把直綫 $y=mx$ 繞 x 軸旋轉，就得到**正圓錐面**

$$y^2+z^2=m^2x^2,$$

可是如果旋轉軸是 z 軸，那末

$$x^2+y^2=m^2z^2$$

是以 $2\operatorname{arctg} m$ 为頂角的正圓錐面的方程。

4. 平面的参数表示　方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}u+\boldsymbol{B}v+\boldsymbol{C}\qquad(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\neq 0)$$

表示一个平面，其中 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 是常矢量。这是可用矢量算法来簡单证明的，即在上式左右两端用 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 作数量积，由于 $\boldsymbol{AAB}=0$, $\boldsymbol{BAB}=0$(第二卷 § 26, 7)得

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\boldsymbol{r}=\boldsymbol{ABC}.$$

图　7

但是这是一个形如 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}+d=0$ 的方程。所以它表示一个平面(按第二卷 § 27, 4)。u 曲綫及 v 曲綫是平面上的平行直綫族，它們的方向由矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 来确定，并且它們之間的夹角是(图 7)

$$\arccos\frac{(\boldsymbol{AB})}{|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|}.$$

5. **附言** 一般說来，只有一条边界的曲面片（如球面片）有两側，其中的一側叫做內側，另一側叫做外側。只有穿过曲面，或者越过边界，曲面片上的点才能从一側进到另一側。值得注意的是，在只有一条边界的曲面片中，还有单側的曲面。这种曲面片最先是麦俾烏斯（Möbius 1790—1868）发現的，这样的曲面片就叫做麦俾烏斯带（图 8）。它确实只有一条边界和一个側（单側面）。

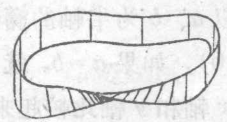

图 8

6. 二次曲面 用直角坐标 x, y, z 的一般二次方程

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fzx+2Gx+\\+2Hy+2Kz+L=0$$

表示的所有空間图形叫做二次曲面。类似于对圓錐曲綫方程的討論，对这一般方程的图形可得下面的結果。二次曲面可分为二类：眞二次曲面，包括有心曲面及无心的抛物面；准二次曲面，例如錐面，柱面及平面对都是。眞二次曲面有五种，即：橢球面，两种双曲面（单叶与双叶），两种抛物面（橢圓的与双曲的）。現将它們（关于主軸）的方程分述如下，并作簡单的討論。

a) 橢球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a, b, c>0).$$

对于实的点来說，应有 $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant b$, $|z|\leqslant c$. 其中 a, b, c 表示橢球面沿着坐标軸正的方向所能达到的最大值，a, b, c 就是它的半軸。容易看到，橢球面的每一个平面截痕（例如 $z=$ 常数 $<c$）是一个橢圓（图 9）。

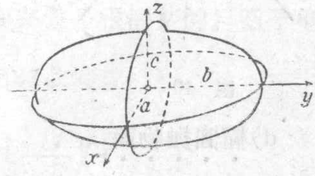

图 9

b) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

垂直于 z 軸的平面上的截痕是橢圓，其中最小的是 xy 平面上

以 a、b 为半軸的橢圓。通过 z 軸的平面上的截痕是双曲綫(图 10)。如果 $a=b$, 就得到以双曲綫繞 z 軸旋轉而得的旋轉曲面。跟 x 軸和 y 軸比較起来, 这种曲面的 z 軸显得更重要些。

c)双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

垂直于 z 軸的平面与曲面相交的曲綫为橢圓, 在通过 z 軸的平面上, 截痕是双曲綫。这曲面有互不相联的两叶(距离为 $2c$; 图 11)。如果 $a=b$, 就得到以双曲綫繞实軸旋轉的旋轉曲面。这时 z 軸是主要軸。

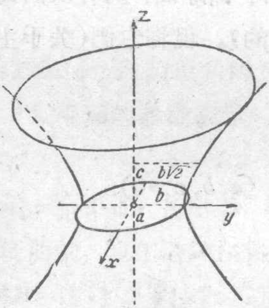

图 10

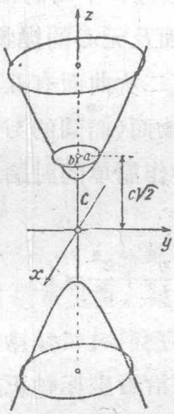

图 11

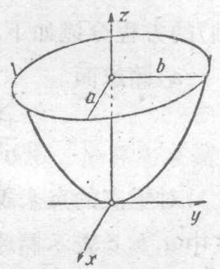

图 12

d)橢圓拋物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

垂直于 z 軸的平面上的截痕(如果 $z>0$)是橢圓。通过 z 軸的平面与曲面的交綫是拋物綫(图 12)。如果 $a=b$, 就得到以一个拋物綫繞它的軸旋轉而成的旋轉曲面。z 軸是主要軸。

е) 双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad (a, b>0).$$

每一个垂直于 z 軸的平面上的截痕(如果 $z\neq 0$)是双曲綫，可是在 xy 平面上的截痕是一对直綫 $\frac{x}{a}=\pm\frac{y}{b}$；在通过 z 軸的平面上，截痕是以 $+z$ 軸或 $-z$ 軸为軸的抛物綫，只要这平面不通过上述这一对直綫中的任何一条。在每一点的近旁，例如在原点的近旁，曲面是一个馬鞍形(图 13)。它在任何情况下都沒有相应的旋轉曲面。如果把上述这一对直綫作为 ξ 軸及 η 軸(这两个軸一般不是正交的)以代替 x 軸及 y 軸，曲面方程就簡化成

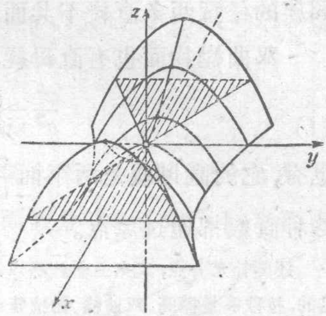

图 13

$$z=c\xi\eta,$$

其中 c 是一个常数($\neq 0$)。无論是对 x 軸与 y 軸来說，或是对 ξ 軸与 η 軸来說，z 軸总是主要軸。

7. 二次曲面的直母綫 有些二次曲面，尽管它們是弯曲的，却可能含实的直綫族。这对柱面和錐面来說是很清楚的。至于单叶双曲面，它的方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 可以改写成

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

利用两个輔助变量 u、v，用两种方法把它們拆开，就得到

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=u\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{u}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases} \text{或} \begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=v\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{v}\left(1+\frac{y}{b}\right).\end{cases}$$

对于每一个固定的 u, 第一个方程組表示两个平面的交綫, 即是一条直綫。第二个方程組也是一样的。所以在这个双曲面上确实含有两族直綫。旋轉单叶双曲面的这个性质在工程技术上可用来制作双曲齿輪, 把繞一个軸的轉动改变成繞另外任一个方向的軸的轉动。容易证明, 一族中的直綫都与另一族的每一条直綫相交; 而同族的任意两条直綫不共面, 因而都是不相交的。

双曲抛物面也有直母綫, 錐面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

也有, 它的直母綫是两平面 $\frac{z}{c}+\frac{y}{b}=u\frac{x}{a}$, $\frac{z}{c}-\frac{y}{b}=\frac{1}{u}\frac{x}{a}$ 的交綫, 这种直綫都通过原点。

还要补充一点, 二次曲面总是以通过主要軸(像上面是 z 軸)的平面上的截痕来命名的, 按截痕是橢圓、双曲綫、抛物綫或一对直綫, 就相应地叫做橢球面、双曲面、抛物面或錐面(及柱面)。至于形容詞"橢圓的"或"抛物的", 还要按主要軸垂直平面上截痕的图形来决定。可是对于两种双曲面, 截痕都是橢圓的, 它們的命名就要按叶数来分。至于橢球面和錐面, 虽然它們的截痕都是橢圓, 在名称前面不需要加这形容詞了。当然, 使用了这些形容詞时并不是說不可以有别的形状的截痕, 如果用任意平面去截的話。像双曲抛物面上也有以抛物綫为截痕的, 在圓錐面上也有以抛物綫及双曲綫为截痕的。

§2.　切平面·弧长元素·曲面的法綫·面积元素

1. 曲面上的曲綫　在曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ 上, 如果点 P 的曲綫坐标 u、v 之間存在函数关系, 譬如它們滿足一个形如 $\varphi(u, v)=0$ 的方程, 或者这两个量都与一个参数 t 有关, 那末点 P 的軌迹就是曲面上的一条曲綫, 因为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)=\boldsymbol{r}(u(t), v(t))=\boldsymbol{R}(t)$$

是一个参数 t 的(矢量)函数, 它正表示一条空間曲綫。

于是

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}'(t)\,dt$$

是一个矢量，它平行于这曲綫在点P处的切綫，$|d\boldsymbol{r}|$表示一个用自变量的微分dt来确定的切綫段的长，即曲綫的弧长元素ds(第二卷§28, 4)，于是$\boldsymbol{t}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}|}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$是曲綫的单位切綫矢量。还有

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}'(t)dt=\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}u'(t)+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}v'(t)\right)dt,$$

如果采用縮写記号$\boldsymbol{r}_u=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\boldsymbol{r}_v=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$, $du=u'(t)dt$, $dv=v'(t)dt$，就得到

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv. \tag{1}$$

2. 切平面 在上面的公式里，矢量$\boldsymbol{r}_u$及$\boldsymbol{r}_v$是随曲面上所考虑的点$P(u, v)$的位置而完全确定的，而微分du与dv及随之而得的$d\boldsymbol{r}$还要与函数$u(t)$, $v(t)$的选擇有关，也就是說，与曲綫C的选取有关。所以如果在曲面上选取了另一条通过P的曲綫，那末虽然$\boldsymbol{r}_u$及$\boldsymbol{r}_v$保持不变，但是切綫段$d\boldsymbol{r}$的大小和方向都改变了(图14)。特别地，如果把u曲綫及v曲綫的$d\boldsymbol{r}$記作

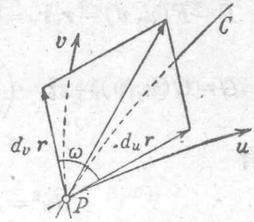

图 14

$$d_u\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du,\quad d_v\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_v dv,$$

那末一般的$d\boldsymbol{r}$就可以写作$d_u\boldsymbol{r}$及$d_v\boldsymbol{r}$的矢量和：

$$d\boldsymbol{r}=d_u\boldsymbol{r}+d_v\boldsymbol{r}.$$

于是一切可能的切綫段$d\boldsymbol{r}$都在一个平面上，即在由两个固定方向的矢量$d_u\boldsymbol{r}$及$d_v\boldsymbol{r}$所确定的平面上，这个平面就叫做切平面。从矢量$d\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$所构成的平行六面体的体积等于零这一事实，也可以得到上述結果。事实上，这体积按第二卷§26, 7等于

$$d\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=(\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv)\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)du+(\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)dv=0,$$

上式括号里的两个乘积都等于零，因为其中有两个矢量是相等的。