21世纪高等工科教育数学系列课程教材

高等数学 上册

（第3版）

牟卫华　陈庆辉　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21世纪高等工科教育数学系列课程教材

高等数学 上册

（第3版）

牟卫华　陈庆辉　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本系列教材为大学工科各专业公共课教材2004年版的修订版(第3版),共4册:高等数学(上、下册)、线性代数与几何、概率论与数理统计。编者根据工科数学教改精神、多年教改课题研究和试验编写,书中融入了许多新的数学思想和方法,尤其是改正、吸收了近年教学过程中发现的问题和好的经验。本书为高等数学·上册,内容包括一元函数微积分及其应用。

本书适合作为普通高校工科各专业高等数学教材,也适合作为大专、函授、夜大、自考高等数学教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:上册/牟卫华,陈庆辉主编. —3版. —北京:中国铁道出版社,2009.8
(21世纪高等工科教育数学系列课程教材)
ISBN 978-7-113-10450-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①牟…②陈… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第150150号

书　　名:高等数学·上册(第3版)
作　　者:牟卫华　陈庆辉　主编
出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)
策划编辑:李小军
责任编辑:李小军
编辑部电话:010-83550579
封面制作:李　路
印　　刷:北京市兴顺印刷厂
开　　本:787mm×960mm　1/16　印张:15　字数:300千
版　　本:2002年8月第1版　2004年8月第2版　2009年8月第3版
2009年8月第9次印刷
印　　数:4000册
书　　号:ISBN 978-7-113-10450-4/O·198
定　　价:22.00元

前　言

本系列教材是在原铁道部部级课题、河北省“九五”教育学科规划重点课题“面向21世纪高等工科教育数学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践”的研究成果基础上，通过几年的教学实践，广泛征求意见，按照教育部关于《工科类本科数学基础课程教学基本要求》改编而成的．本版为第3版．第1、2版在多年的教学实践中受到了广大师生的欢迎和同行的肯定，其总体结构、编写思想和特点、难易程度把握等方面，经受了实践的检验．同时，实践中也发现了需要完善之处．本系列教材包括《高等数学》（上、下册）、《线性代数与几何》、《概率论与数理统计》等4册．

本书是《高等数学·上册》．编写中力求做到：渗透现代数学思想，淡化计算技巧，加强应用能力培养．内容编排上，从实际问题出发—建立数学模型—抽象出数学概念—寻求数学处理方法—解决实际问题．目的是：提高学生对数学的学习兴趣，培养数学建模意识，使学生较好地掌握高等数学方法，提高数学应用能力．

本书在编写过程中，力求突出以下几个特点：

1．突出微积分学的基本思想和基本方法，使学生在学习过程中能够整体把握和了解各部分内容之间的内在联系．例如，把微分学视为对函数的微观（局部）性质的研究，而把积分学概括为对函数的宏观（整体）性质的研究；把定积分作为一元函数积分学的主体，不定积分仅仅作为定积分的辅助工具，这样既突出了定积分与不定积分的联系，又节省了教学时数；多元函数微分学中强调“一阶微分形式不变性”，使得多元函数（尤其是各变量之间具有嵌套关系的隐函数）的偏导与微分的计算问题程式化，大大提高学生的学习效率；在定积分、重积分、曲线积分、曲面积分等积分学的应用中，采用“微元法”思想，使学生更容易理解与掌握．

2．尽可能使分析与代数相结合，相互渗透，建立新的课程体系．我们将空间解析几何部分编入《线性代数与几何》教材．在多元函数微积分学、常微分方程等内容中，充分运用向量、矩阵等代数知识，使表述更简洁．

3．尽可能采用现代数学的思维方式，广泛使用现代数学语言、术语和符号，为学生进一步学习现代数学知识奠定必要的基础．内容阐述上尽量遵循深入浅出，从具体到抽象，从特殊到一般等原则，语言上做到描述准确、通俗流畅，并具有启发性．

4．重视数学应用能力培养，淡化某些计算技巧．本书注重学生对数学概念的理解和应用，在每章末都有一节应用举例，阐述这些数学模型的建立、求解等．

5. 备有内容丰富、层次多样的习题. 为适应不同层次的教学需要，习题部分做了较大改动：删除了一部分B型题中较难或较偏的题目，将B型题、综合练习题中一些题目与A型合在一起作为全章的练习题，这部分习题是按教材内容的先后顺序编排的，因此个别较难题目也是按内容出现的；另外，将保留的B型题或综合练习题与一些历届考研题合在一起作为全章的综合练习题，这部分内容是为满足那些对高等数学具有极强的征服欲或有考研意向的学生准备的.

书中带有“*”号的内容为选学内容.

本教材面向工科院校，适合作为土木工程、机械工程、电气自动化工程、计算机工程、交通工程、工程管理、经济管理等本科专业的教材或教学参考书，教学中与《线性代数与几何》配套使用.

本系列教材是在石家庄铁道学院领导的关心和支持下，在编委会全体成员的努力和其他老师的帮助下完成的. 在上册的改版中，王永亮、刘宝友对一些内容的编写提出了宝贵的意见和建议；在下册的改版中，孙秋杰、范瑞琴、王雅茹、崔青及陈聚峰也都提出了自己的见解. 在此一并表示感谢.

由于编者水平有限，难免有错误和不当之处，敬请读者批评、指正.

编　者

2009年6月

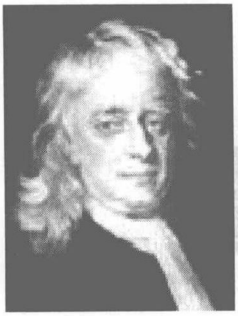
目　　录

第 1 章

一元函数经常出现在我们的生活实践中，是主要的研究对象．一元函数的极限存在性和连续性研究是《高等数学》中最基本的内容，是一元函数微分学和积分学的理论基础．

本章主要介绍：

- 函数及其特性
- 数列的极限及运算
- 函数的极限及运算
  函数的极限概念　运算法则　两个重要极限
  无穷大　无穷小　无穷小的比较
  无穷小的等价代换
- 函数的连续性
- 闭区间上连续函数的性质



牛　　顿

牛顿（Isaac Newton，1643－1727）是英国伟大的数学家、物理学家、天文学家和自然哲学家。

牛顿 1661 年入英国剑桥大学圣三一学院，1665 年获文学士学位。1668 年获硕士学位。1669 年任卢卡斯教授。1706 年受封爵。

牛顿在科学上最卓越的贡献是创建了微积分和经典力学。

牛顿名言：

1. 你该将名誉作为你最高人格的标志。

2. 我的成就，当归功于精微的思索。

3. 聪明人之所以不会成功，是由于他们缺乏坚韧的毅力。

4. 如果说我所看的比笛卡儿更远一点，那是因为站在巨人肩上的缘故。

5. 你若想获得知识，你该下苦功；你若想获得食物，你该下苦功；你若想获得快乐，你也该下苦功，因为辛苦是获得一切的定律。

6. 胜利者往往是从坚持最后五分钟的时间中得来成功。

7. 我不知道世人怎样看我，但我自己以为我不过像一个在海边玩耍的孩子，不时为发现比寻常更为美丽的一块卵石或一片贝壳而沾沾自喜，至于展现在我面前的浩翰的真理海洋，却全然没有发现。

创建微积分　牛顿在数学上最卓越的成就是创建微积分。他超越前人的功绩在于，他将古希腊以来求解无限小问题的各种特殊技巧统一为两类普遍的算法——微分和积分。

微积分方法上，牛顿的贡献是，他不但清楚地看到，而且大胆地运用了代数所提供的大大优越于几何的方法论。他以代数方法取代了卡瓦列里、格雷哥里、惠更斯和巴罗的几何方法，完成了积分的代数化。从此，数学逐渐从感觉的学科转向思维的学科。

微积分产生的初期，由于还没有理论基础，被有些别有用心者钻空子。更因此而引发了著名的第二次数学危机。这个问题直到19 世纪极限理论建立才得到解决。

提出运动三定律　牛顿在力学领域也有伟大的发现，这是说明物体运动的科学。第一运动定律，也被称为牛顿第一定律。牛顿第二定律是最重要的，动力的所有基本方程都可由它通过微积分推导出来。此外，牛顿根据这两个定律推出第三定律。牛顿提出的物理学的三个运动定律总称牛顿运动定律，被誉为是经典物理学的基础。

亚历山大·蒲柏说到：

Nature and Nature's laws lay hid in night;
God said, " let Newton be!" and all was light.
Soon, everything returned back to the dark as All be there …

自然和自然的法则在黑夜中隐藏；
上帝说，"让牛顿去吧！"于是一切都被照亮。
不久，一切又回到黑暗，
一如既往。

§1.1　集合　映射与初等函数

函数描述的是变量之间的依赖关系. 本节将通过映射引出函数的概念.

1.1.1　集合　区间　邻域

所谓**集合**(简称为**集**)是指具有某种确定性质的对象的全体. 组成集合的个别对象称为该集合的**元素**(简称为**元**). 习惯上, 用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集合, 用小写字母 $a, b, c, \cdots$ 表示集合的元素. 含有有限个元素的集称为**有限集**; 不含任何元素的集称为**空集**, 记作 $\varnothing$; 既不是有限集又不是空集的集称为**无限集**.

表示集合的方法有两种: 一种是列举法, 就是将集合的所有元素一一列出来, 写在一个花括号内. 例如, 由元素 a, b, c 组成的集 A 可表示为 $A = \{a, b, c\}$, 又如方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集 S 可表示为 $S = \{-1, 1\}$. 另一种是描述法, 就是把集合中元素的共同特征描述出来, 写在一个花括号内. 例如, 满足不等式 $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$ 的点 x 的全体构成的集合为 $\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$.

常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集, $\mathbf{Z}$ 表示整数集, $\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集, $\mathbf{Q}$ 表示有理数集, $\mathbf{R}$ 表示实数集.

对于两个集 A 与 B, 如果 A 的每一个元素都是 B 的元素, 则称集 A 是集 B 的**子集**, 记作 $A \subseteq B$(读作"A 包含于 B"), 或者 $B \supseteq A$(读作"B 包含 A"); 如果 $A \subseteq B$, 并且 B 中至少有一个元素不属于 A, 则称 A 是 B 的**真子集**, 记作 $A \subset B$, 或者 $B \supset A$; 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

显然, 对任何集合 A, 都有 $\varnothing \subseteq A$, $A \subseteq A$. 对于集 A, B, C, 若 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

集合的基本运算有三种: 并、交、差: 设 A、B 是两个集. 由属于 A 或属于 B 的所有元素构成的集称为 A 与 B 的**并集**(简称为**并**), 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

由同属于 A 与 B 的元素构成的集称为 A 与 B 的**交集**(简称为**交**), 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

由属于 A 但不属于 B 的元素所构成的集称为 A 与 B 的**差集**(简称为**差**), 记作 $A \backslash B$, 即

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

特别地, 若 $B \subseteq A$, 则称差 $A \backslash B$ 为 B 关于 A 的**余集**(或**补集**), 记为 $\complement_A B$. 通常我们所讨论的问题是在一个大的集合 X(称为全集) 中进行, 所以我们称集合 $X \backslash A$ 为 A 的余

集，记作 A^{C}. 两个集合的并、交、差可以用图形直观表示(如图 1.1 的阴影部分).

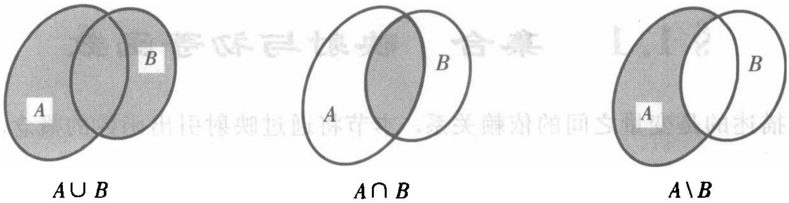


图 1.1

区间是用来表示数集的常用方法. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为**开区间**，记作(a,b)，a 和 b 称为开区间(a,b) 的端点. 数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为**闭区间**，记作$[a,b]$，a 和 b 称为闭区间$[a,b]$ 的端点. 类似定义**半开区间**

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

以上这些区间都称为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为这些**区间的长度**. 从数轴上看，这些区间的长度都是有限的(如图 1.2(a)，(b)). 此外，引进记号 $+\infty$(读作正无穷大) 及 $-\infty$(读作负无穷大)，则可定义**无限区间**(如图 1.2(c)，(d))

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\},.$$

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记为无限区间$(-\infty,+\infty)$.

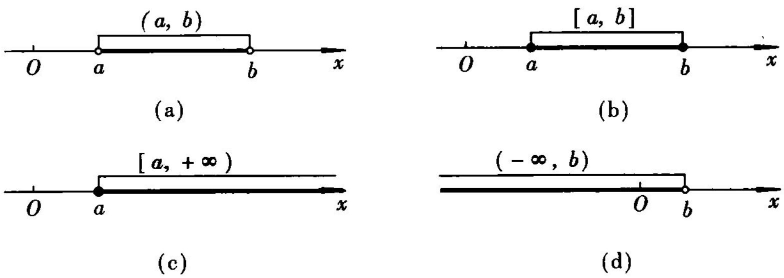


图 1.2

为了简单起见，以后在不需要指明所讨论区间是开区间还是闭区间，以及是有限的还是无限的时，我们就简单地称它为“区间”，且用英文字母 I 表示.

邻域是高等数学中使用较多的一个概念. 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，称数集

$$\{x\mid |x-a|<\delta\}$$

为**点 a 的 δ 邻域**，记为 $U(a,\delta)$. 点 a 称为邻域中心，δ 称为邻域半径. 显然，邻域 $U(a,$

δ) 就是以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$（如图 1.3）.

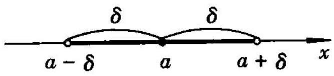


图 1.3

将邻域 $U(a,\delta)$ 的中心点 a 去掉后，称为**点 a 的去心邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

另外，在数对构成的集合中，还可以定义**笛卡儿乘积**（简称**积集**）

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

1.1.2　映射与函数的概念

映射是数学中应用较为广泛的一个概念，利用它可以给出函数概念.

1　映射　函数

定义 1.1　设 A,B 是两个非空集合. 若对每个元素 $x \in A$，按照某种确定的法则 f，有唯一确定的 $y \in B$ 与之相对应，则称 f 是从 A 到 B 的一个**映射**，记作

$$f: A \to B \quad 或 \quad f: x \to y, x \in A.$$

并称 y 为 x 在 f 下的**象**，而 x 称为 y 在 f 下的一个**原象**（或**逆象**），A 称为 f 的**定义域**，记作 $D(f)$. 所有 $x \in A$ 的象 y 的全体构成的集合称为 f 的**值域**，记作

$$R(f) = \{y \mid y = f(x) \in B, x \in A\} \triangleq f(A).$$

应当注意，x 的象是唯一的，但 y 的原象不一定是唯一的，并且 $f(A) \subseteq B$.

定义 1.2　设 D 是 $\mathbf{R}$ 的一个非空数集. 若对于每个数 $x \in D$，按照某个确定的法则 f，有唯一的数 $y \in \mathbf{R}$ 与之相对应，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为 D 到 $\mathbf{R}$ 的函数，记为 $y = f(x)$（或 $y = y(x)$）. 称式中 D 为**定义域**，f 为函数法则，x 为**自变量**，y 为**因变量或函数**.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$、$y|_{x=x_0}$ 或 $y(x_0)$. 当 x 取遍 D 的各个数值时，对应函数值的全体所构成的数集

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\} \triangleq W$$

称为函数的**值域**（式中“$\triangleq$”表示“记作”）. 而由定义域 D 与值域 W 内的所有点构成的数对 (x,y) 的集合

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

称为函数 $f(x)$ 的**图象**，它通常对应着平面直角坐标系 xOy 上的曲线（如图 1.4）.

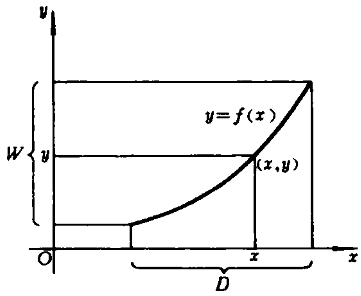


图 1.4

函数由定义域及函数法则这两个基本要素所确定. 函数法则可以由符合定义1.2的各种形式给出. 函数的定义域通常按两种情况确定：**当函数表示着某个实际问题时，其定义域由实际意义确定**，如圆面积公式 $S=\pi r^2$ 的定义域为 $\{r \mid r>0\}$；而**当函数没有实际意义时，其定义域就是使函数有意义的全体实数**，如，当 S 没有具体意义时，函数 $S=\pi r^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

习惯上，我们把由映射或函数的定义确定的函数称为**单值函数**，即如果自变量在定义域内任意取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，否则称为**多值函数**. 例如，在直角坐标系中，半径为 a，圆心在原点的圆（图 1.5）的方程是

$$x^2+y^2=a^2,$$

由此解得

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}.$$

可见，当 x 取 a 或 $-a$ 时，上式对应 y 的一个值，当 x 取开区间 $(-a,a)$ 内的任一个数值时，上式对应两个值

$$y=\sqrt{a^2-x^2},$$

$$y=-\sqrt{a^2-x^2}.$$

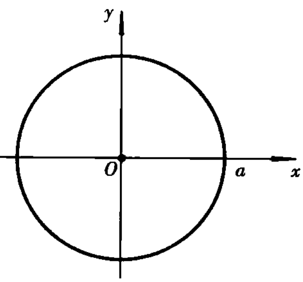


图 1.5

所以 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ 是多值函数，上面的每一个都称为它的**单值支**，它们的图象分别是图 1.5 中的上半圆周和下半圆周.

以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数.

下面介绍几个以后常用的**分段函数**：

（1）**符号函数**：

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0\\ 0 & \text{当 } x=0.\\ -1 & \text{当 } x<0\end{cases}$$

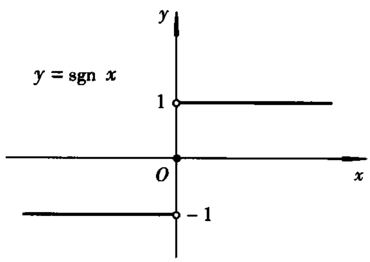


图 1.6

它的图象如图 1.6 所示. 显然，对于任何实数 x，有

$$|x|=x\operatorname{sgn} x.$$

（2）**取整函数**：设 x 为任一实数，将不超过 x 的最大整数简称为 x 的最大整数，记作 $[x]$，由此定义取整函数

$$y=[x].$$

它的图象如图 1.7 所示，为阶梯曲线. 因此，取整函数也称为阶梯函数. 例如

$$[\pi]=3,$$
$$[2]=2,$$
$$[0.3]=0,$$
$$[-1]=-1,$$
$$[-2.5]=-3.$$

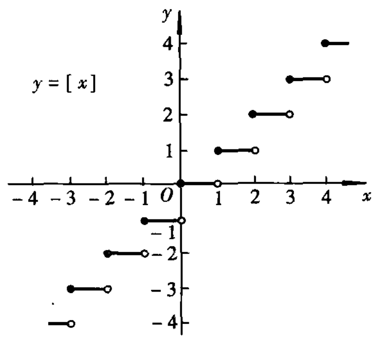


图 1.7

(3) **狄里克莱**[①]**函数**：

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

2　复合映射　复合函数

设有映射 $f:A\to B$ 与 $g:B\to C$，由

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)),\ x\in A$$

确定的映射 $g\circ f:A\to C$ 称为 f 与 g 的**复合映射**（如图 1.8），其中 $y=f(x)$ 称为**中间元**.

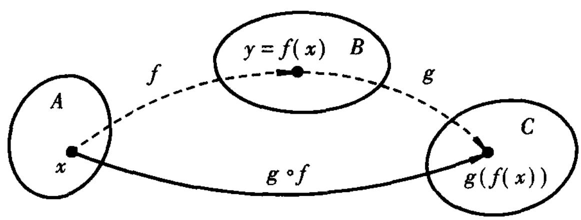


图 1.8

由定义易见，任给两个映射 $f:A\to B$ 与 $g:B\to C$，当且仅当 $f(A)\subseteq B$ 时才存在复合映射 $g\circ f:A\to C$.

两个映射的复合也叫做映射的**乘积**，不难将它推广到有限个映射的情形. 映射的乘积满足结合律，即若 f,g,φ 分别是 $A\to B, B\to C, C\to D$ 的映射，则

$$\varphi\circ(g\circ f)=(\varphi\circ g)\circ f$$

事实上，上式两端都是从 A 到 D 的映射，并且对任何 $x\in A$，都有

$$\begin{aligned}(\varphi\circ(g\circ f))(x)&=\varphi((g\circ f)(x))=\varphi(g(f(x)))\\&=(\varphi\circ g)(f(x))=((\varphi\circ g)\circ f)(x).\end{aligned}$$

所以，等式 $\varphi\circ(g\circ f)=(\varphi\circ g)\circ f$ 成立.

① 狄利克莱(P. G. Dirichlet)，1805—1859，德国数学家.

特别地，当 A,B,C 都是数集时，我们就可得到复合函数的概念.

设有函数 $y=f(u)$，$u\in D_u$ 及函数 $u=\varphi(x)$，$x\in D_x$，若对于每一个数 $x\in D_x$，对应有确定的数 $u=\varphi(x)\in D_u$，则由 $y=f(u)$ 就对应出 y，即对每一个数值 $x\in D_x$，通过 u 有确定的数值 y 与之对应，从而得到了一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，这个函数就称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作

$$y=f(\varphi(x)),\ x\in D_x,$$

而 u 称为中间变量.

例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可看成是函数 $y=\sqrt{u}$ 与函数 $u=1-x^2$ 复合而成的，它的定义域为 $[-1,1]$，是 $u=1-x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的一个子集. $y=\arctan x^2$ 可看作由 $y=\arctan u$ 及 $u=x^2$ 复合而成的，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它也是 $u=x^2$ 的定义域. $y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数，这是因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内任何 x 值所对应的 u 值(都大于或等于 2)，都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

与复合映射一样，复合函数也可以由两个以上的函数复合而成. 例如，$y=\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$ 就是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=\frac{x}{2}$ 复合而成，这里 u 及 v 都是中间变量.

3 逆映射 反函数

设 A 为一个非空集合，把集合 A 中每一个元都映为自身的映射称为 A 上的恒等映射(或单位映射)，记作 I_A，即任意的 $x\in A$，有 $I_A(x)=x$.

设有映射 $f:A\to B$，若存在一个映射 $g:B\to A$，使

$$g\circ f=I_A,\quad f\circ g=I_B,$$

则称映射 f 是**可逆映射**，并且称映射 g 是映射 f 的**逆映射**，记为 f^{-1}.

特别地，当 A,B 都是数集时，可以得到反函数的概念.

如果函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的逆映射 $f^{-1}:R(f)\to D$ 存在，则称 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的**反函数**，而称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

应当注意，单值函数的反函数未必是单值函数. 例如，函数 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，任意的 $y\in(0,+\infty)$，适合关系式 $x^2=y$ 的数值 x 有两个：$x=\sqrt{y}$ 及 $x=-\sqrt{y}$(如图 1.9)，所以 $y=x^2$ 的反函数是一个多值函数. 如果把 x 限制在 $[0,+\infty)$ 上，则 $y=x^2$ 的反函数为单值支 $x=\sqrt{y}$，如果把 x 限制在 $(-\infty,0]$ 上，则为单值支 $x=-\sqrt{y}$.

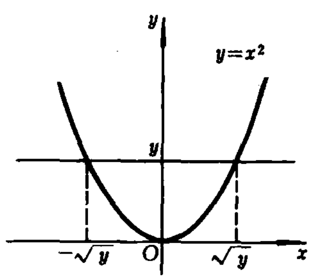


图 1.9

习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示. 如果把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 对调，就得