

本研究获下列资助：

●四川省杰出青年学科带头人培养基金 ● 西南交通大学博士后基金 ● 西南民族学院

风险决策中 理性行为公理体系 与效用理论

■ 张明善 著



电子科技大学出版社

风险决策中理性行为公理 体系与效用理论

张明善 著

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

风险决策中理性行为公理体系与效用理论/张明善著. —成都:电子科技大学出版社, 2002. 7

ISBN 7-81065-768-2

I. 风... II. 张... III. 风险管理—经济决策—理论研究
IV. F272.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 047342 号

风险决策中理性行为公理体系与效用理论

张明善 著

出 版:电子科技大学出版社(成都建设北路二段四号)

责任编辑:张 焰

发 行:电子科技大学出版社

印 刷:北京市朝教印刷厂

开 本:850mm×1168mm 1/32 **印张:**7.5 **字数:**179 千字

版 次:2002 年 7 月第一版

印 次:2005 年 10 月第二次印刷

书 号:ISBN 7-81065-768-2/F·41

定 价:18.50 元

■ 版权所有 侵权必究 ■

◆ 本书如有缺页、破损、装订错误,请寄回印刷厂调换。

序

风险决策理论的建立应从本世纪 40 年代 Von Neumann 和 Oskar Morgenstern 提出的理性行为公理开始算起,但其渊源可以追溯到 18 世纪的 Bernoulli 时代。1738 年, Daniel Bernoulli 对用期望值的大小作为决策的标准提出了异议,并给出了一个著名的例子。该例子中蕴含了我们现在所使用的效用概念的含义。这一异议所涉及的问题到本世纪 40 年代初都未能得以很好地解决。1944 年, Von Neumann 和 Oskar Morgenstern 出版了他们的专著 (The Theory of Games and Economic Behavior), 才把原来存在的期望理论中的那种模糊的关系公理化,并由此从根本上解决了这一问题。该公理体系的建立标志着风险决策理论的诞生,它把人们对决策行为的认识提高到了一个新的高度,认为任何一个具有理性行为的决策者,都应遵循这套公理体系。该公理系统是风险决策理论的基础,它使得决策科学的理论科学化和系统化。到目前为止,该公理体系仍然在风险决策中占着主导地位。

随着 Von Neumann—Morgenstern 公理体系的建立,风险决策理论大量的系统研究便随之开始。自然地,其研究内容有如下两个方面的重点:一是围绕着公理体系的研究;一是围绕着表示理论的研究。

对于前者主要是研究公理系统本身。Herstein-Milnor、Jenson 和 Fishburn 分别于 1953 年、1967 年和 1982 年给出了等价的理

性行为公理。这些公理体系在其偏好满足的条件上作了一点削弱,但没有大的和实质性的变动,其实质都是保证其上线性效用的存在。

另一方面,1953年由 Allais 给出的一个著名的悖论,否定了偏好的传递性,说明它并不总是成立的,但这也并不意味着对传递性偏好关系的全面否定。这个悖论使我们对公理系统的研究和对决策问题的研究必须分别从两个角度去考虑:一是满足传递性;一是不满足传递性。对于这两方面的研究,以 P. C. Fishburn (1991) 为首的许多学者作了大量的工作,并取得了丰富的研究成果。对于偏好理论,有许多方面的研究。1947年, Leontief 提出了偏好关系的独立性问题;1978年, S. A. Ovchinnikov 首先提出了模糊偏好关系,而且在 1991 年又提出了赋值的偏好关系,试图把偏好关系进一步度量化;1975年, E. Glustoff 对偏好的连续性进行了研究。以上这些研究说明,作为公理系统的最基本的概念——偏好,已有了较丰富的内容。但与此相伴的展望空间的理论研究却相对较少。然而,由于展望空间是理性行为公理的基石,因此,对展望空间的研究是必不可少的。Fishburn 曾于 1982 年将展望空间的概念抽象为混合集 (mixture set) 的概念,但对其结构没有作任何研究。

对于表示理论的探讨,无疑离不开对序关系的探讨。1983年 Bridges 给出了可数集合上的实值的序同态存在的充要条件是其序关系是非循环的。对于不可数集合, Birkhoff (1948)、Debreu (1954, 1964) 和 Jafray (1975) 分别给出了独自の但是彼此等价的序可分条件,同时证明了其上存在序同态的充要条件是其序关系满足序可分条件。1952年 Cantor 给出了到实数集合上的序同构映射存在的充分条件。

对于表示理论的研究,涉及两个方面的内容:一方面是线性效用的表示理论,一方面是非线性效用的表示理论。线性效用的存在有其理性行为公理作为保证,但这只是充分条件。Jenson 和 Herstein-Milnor 在这方面的工作比较出色。对于非线性效用来说,由于非线性效用不再有其线性性,因此,研究中还需要借助一些其他的性质,比如拓扑性质等等。1970 年,Peleg 曾证明了一个具有闭的自反的严格偏序构成的拓扑空间上,若偏好关系满足:(1) $(\leftarrow, x)$ 是开的;(2) $x > y$ 可推出 $\overline{(\leftarrow, y)} \subset (\leftarrow, x)$;

(3) 存在可数的 Cantor 序稠密子集。那么,其上存在连续的实现值的序同态。1980 年, Sondermann 证明了对于具有严格偏序关系的第二可数的拓扑空间,其上存在着上半连续的效用和下半连续的效用。自然地,这些结论对于展望空间而言,也是成立的,但现有的结论还很少,还需要作进一步的探讨。

整个决策理论最初是在统计学的基础上发展起来的,主要研究包括决策机理、决策规则、决策模型以及决策方法等方面的内容。

自有人类社会以来,人们一直都没有离开过决策,而且一直都在努力探索着怎样或者应该怎样作出科学决策的途径。决策理论的发展可以追溯到 18 世纪上半叶效用值概念的提出。Nicholas Bernoulli (1713) 设计了著名的 St. Petersburg 悖论,生动地说明了以期望收益值作为决策准则与实际决策行为之间存在矛盾,从而对风险报酬应根据其期望报酬评价(期望收益极大化原则)的传统观念提出了挑战。Daniel Bernoulli (1738) 还进一步论述了效用值的概念以及效用函数的可能形式,提出了基于财富水平的风险展望应根据其期望主观值加以衡量的思想,并指出了财富的边际效用递减的原理。19 世纪下半叶,效用作为一个专用术语

被人们广为接受，当时其主要含义专指 19 世纪新古典经济学中的商品效用。经济学家们利用 Daniel Bernoulli 的边际效用递减原理研究了消费者需求理论，进一步发展了 19 世纪新古典学派的商品效用思想，逐渐形成了传统意义上的效用理论。但是在进入 20 世纪以后，效用理论发展缓慢，其主要原因之一就是传统的效用理论还不具有直观的数量意义。虽然有学者一直致力于研究基于偏好差的效用测量，但收效甚微。

1944 年，Von Neumann 和 Oskar Morgenstern 出版了在决策科学上具有划时代意义的巨著——《Theory of Games and Economic Behavior》，提出了一组看起来似乎是合乎“理性”的决策行为公理，即 Von Neumann-Morgenstern 理性行为公理体系，证明了在决策行为满足这一公理体系的前提下，决策者可以对决策问题的各种决策方案的后果设定效用值，并根据期望效用值的大小来确定自己喜爱的决策方案，从而说明了期望效用值可以作为决策的理性标准，解决了长期悬而未决的如何遵循理性决策规则求得 Bernoulli 首先提出的效用值的问题。Von Neumann-Morgenstern 理性行为公理体系的建立，标志着现代决策理论的开端，也为规范型决策理论奠定了基石。半个多世纪以来，决策理论得到了飞速的发展，围绕着该公理体系——从公理体系本身的不断改善到其上的效用表示的研究与应用，在理论和实用上都取得了丰硕的研究成果，直到现在，Von Neumann-Morgenstern（线性）期望效用理论仍然在现代决策理论中占有重要的地位。

20 世纪 50 年代，Wald 和 Leonard J. Savage 在 Von Neumann-Morgenstern 决策理论的基础之上，研究了统计决策问题，并建立了相应的决策理论体系。

20 世纪 60 年代, R. A. Howard、H. Raiffa 以及 W. Edwards 进一步发展了统计决策理论, 系统地研究了贝叶斯决策理论付诸实施的具体步骤, 考虑了通过试验收集新的信息以改进决策分析方法的可能性。

与规范型决策理论(理性决策理论)研究的角度不同, W. Edwards 和 M. Allais 考虑了理性决策理论在实际决策行为中的真实性问题, 即人们的实际决策行为是否与 Von Neumann-Morgenstern 理论或者 Leonard J. Savage 理论相符, 由此引发了人们对描述型决策理论(行为决策理论)的研究。心理学家 W. Edwards 曾经致力于决策分析中信息处理过程的研究, 他发现规范型决策理论模型中隐含了许多难以避免的系统性偏差, 由于人们认知错觉的普遍存在, 在没有智能性或者实物性的辅助工具的引导之下所作出的直观判断往往会出现失误。经济学家 M. Allais 认为概率的判定过程应该与效用值无关, 而且效用值的计算也应该不受事件出现概率大小的影响, 他建议概率和效用值应该组合成一个有别于数学期望值的优先度指标。

在 Von Neumann-Morgenstern 理性行为公理体系中, 受到来自描述型决策理论派学者攻击最多的是独立性公理。首先, Allais (1953, 1979) 设计了著名的 Allais 悖论, 指出独立性公理并不是经常都能得到满足的, 以后, Morrison (1967)、MacCrimmon (1968)、MacCrimmon 和 Larsson (1969)、Hagen (1979)、Kahneman 和 Tversky (1979, 1981) 更是系统地提供了违背独立性公理的例证。

Flood (1951)、May (1954)、MacCrimmon 和 Larsson (1979) 在研究多目标决策问题的时候, 指出了“克星循环”现象的普遍存在性, 对传递性公理也提出了质疑。

此外, Georgecu (1954)、Thrall (1954) 和 Chipman (1960) 利用人们的决策行为所具有的确定性效应, 设计出了可能存在“无限好”或者“无限坏”的备选方案的决策问题, 从而也对连续性公理提出了有力的挑战。

在 Von Neumann-Morgenstern 理性行为公理体系中, 惟有连通性公理(该公理假设备选方案集合中的元素可以成对比较)还没有人提出太多异议。然而我们发现在实际决策问题中, 由于决策环境的复杂性以及决策者理性的有限性, 人们并不是总能分辨每对决策方案的优劣, 即连通性公理也不是总能得到保证的。

R. J. Aumann (1962) 完全放弃连通性公理研究了部分序展望空间上的效用表示理论, 证明了基于独立性公理以及弱连续性公理的(线性)效用函数的存在性定理。但是, 由于部分序展望空间的概念过于普遍, Aumann 条件不能保证(线性)效用函数的相对惟一性, 事实上难以为实际决策问题提供有效的分析依据。因此, 寻求弱化连通性公理的适当条件, 以满足效用函数的相对惟一性已成为规范型决策理论研究的又一重要内容。

实际生活中的决策过程往往不是单个决策者的行为, 而是有多个人组成的群体共同参与决策的群体行为。每一项决策都应该尽量满足这个群体中的每一个成员的意愿和要求, 因此如何集中群体中的各个成员的意见以形成整个群体的意见就显得十分重要。群决策和社会选择理论是决策理论的重要内容之一, K. J. Arrow 为此做出了非常突出的贡献, 他的不可能性定理指出: 在符合一组“理性”原则的条件之下, 不存在能集结群体中(社会中)所有成员的偏好而形成该群体的(社会的)一个统一偏好的社会福利函数。该定理对群决策理论和社会选择理论的贡献犹如能量守恒定理对物理学的贡献一样重大。

历史上包括 Von Neumann、Morgenstern 以及 Allais 在内的许多管理学家都曾力求建立一个既能满足描述的精确性，又能满足规范的合理性要求的决策理论，然而 A. Tversky 和 D. Kahneman 的研究结果表明，没有一种理论能同时满足这两方面的要求。他们认为，规范模型所需遵循的必要条件和充分条件，从描述的观点来看却往往是不真实的；而以描述性研究为主要内容的描述型决策理论不仅是规范型决策理论的先行阶段，而且是不可替代的、独立的研究领域。规范型决策理论与描述型决策理论相辅相成，彼此促进，构成了现代决策理论研究的基本格局。

正是由于规范型决策理论（理性决策理论）与实际决策行为之间存在着诸多差异，才促使规范型决策理论与描述型决策理论研究的继续深入发展，并在短短几十年之间取得了丰硕的研究成果，这包括 S. H. Chew 和 K. R. MacCrimmon (1979) 的权重效用值理论、M.J.Machina 的局部效用函数理论、J.L.Becker 和 R.K.Sarin 的事态体关联效用理论、P. C. Fishburn 的双线性 (SSB) 效用理论，以及贾建民和 James S. Dyer (1998) 的风险价值理论等等。然而迄今为止，对于许多有重大实际意义的决策问题，仍然缺少非常有效的分析方法。

目 录

第一部分 理性行为公理体系.....	1
第一章 风险与概率.....	2
1.1 风险.....	2
1.2 概率运算和数字特征.....	5
1.3 概率测度.....	8
第二章 序关系与偏好.....	10
2.1 二元关系.....	10
2.2 序关系及其代数性质.....	13
2.2.1 序关系.....	13
2.2.2 序关系的代数性质.....	19
2.2.3 对偶原理、上集与下集.....	21
2.3 偏好关系与 Hasse 图.....	23
2.4 序表示.....	28
2.4.1 有限集合上的序表示.....	28
2.4.2 可数集合上的序表示.....	30
2.4.3 不可数集合上的序表示.....	33
2.5 Cantor 的两个基本定理.....	42
第三章 St.Petersburg 悖论与效用.....	47
3.1 St.Petersburg 悖论与效用的提出.....	47

3.2	效用函数	51
3.3	效用的决策准则	53
3.4	效用的测定	54
第四章	理性行为公理体系	60
4.1	理性行为理论	60
4.2	Von Neumann-Morgenstern 公理体系及其基本定理	61
4.3	其他的理性行为公理体系	65
4.3.1	Herstein-Milnor 的公理体系	66
4.3.2	Fishburn 的公理体系	67
4.4	各理性行为公理体系之间的关系分析	68
4.4.1	Von Neumann-Morgenstern 公理体系与 Herstein-Milnor 公理体系的关系	68
4.4.2	Fishburn 公理体系与其他公理体系的关系	73
4.5	关于 Jensen 理性行为公理体系中的连续性公理	78
4.5.1	Jensen 理性行为公理体系中的连续性公理的 替换形式	78
4.5.2	等价性的证明	79
第五章	理性行为公理的弱化	86
5.1	行为决策对理性行为公理的质疑	86
5.1.1	Allais 悖论与独立性公理	89
5.1.2	确定性效应与连续性公理	93
5.1.3	克星循环与传递性公理	94
5.2	关于理性行为公理的理性思考	95
5.3	完全性公理弱化的讨论	99

第二部分 展望空间与效用理论	102
第六章 展望空间及其结构	103
6.1 展望空间	103
6.2 展望空间的基与同构	104
6.3 Von Neumann-Morgenstern 理性行为公理体系下 展望空间的结构	106
第七章 展望空间上的非线性效用理论	110
7.1 展望空间的拓扑性质	111
7.2 展望空间上的非线性效用函数的存在性	115
第八章 混合集上的效用理论	121
8.1 效用函数	121
8.2 混合集上的效用函数	123
第九章 带有理数概率的效用理论	130
9.1 基本概念	131
9.2 基于有理数概率的公理体系及效用函数	132
9.3 等价的公理体系及证明	133
第十章 Savage 的期望效用理论	141
10.1 Savage 的期望效用定理	141
10.2 概率的原则	145
10.3 根据优先的概率	155
10.4 简单动作的效用	157
10.5 效用是有界的	161
10.6 关于全部动作的效用	162

第三部分 风险决策模型	167
第十一章 风险决策的基本要素	168
11.1 风险决策的基本要素	168
11.2 期望损益决策准则	170
第十二章 风险决策模型	175
12.1 决策树模型	175
12.2 矩阵决策模型	181
12.3 部分期望决策模型	186
12.4 增量分析模型	190
参考文献	194

第一部分

理性行为公理体系

第一章 风险与概率

1.1 风险

风险一词，在日常生活中被经常谈论，但要从理论角度对风险下一个准确的定义并不容易。一般认为，风险是指某一事件出现的实际状况与预期状况（即实际值与预期值）有背离，从而产生的一种损失。这种损失有时表现为实际值的绝对减少，有时表现为相对减少或机会损失。而这种背离或差异的出现又是不确定性的，即以一定的概率随机发生的，而不是事先能准确预计的。但对风险涵义的理解，从不同的角度可以作不同的陈述和定义。目前，关于风险的定义主要有以下几种代表性观点：

以研究风险问题著称的美国学者 A·H·威雷特认为：“风险是关于不愿发生的事件发生的不确定性之客观体现。”

美国经济学家 F·H·奈特认为：“风险是可测定的不确定性。”

日本学者武并勋认为：“风险是在特定环境中和特定期间内自然存在的导致经济损失的变化。”

我国台湾学者郭明哲认为：“风险是指决策面临的状态为不确定性产生的结果。”

我国大陆地区不少学者认为，风险是指实际结果与预期结果相背离从而产生损失的一种不确定性。

综上所述，风险一词包括了两方面的内涵。其一，是指风险意味着出现了损失，或者是未实现预期的目标值；其二，是指这种损失出现与否是一种不确定性随机现象，它可用概率表示出现的可能程度，不能对出现与否作出确定性判断。基于上述分析，我们假定：用 C 表示出现的结果（损失），用 P 表示损失出现的概率，用 R 表示风险，则可用以下公式表示风险：

$$R = f(P, C)$$

上式表明，风险是某一不利事件（比如“损失”）的不利程度（比如损失额大小）和该事件出现概率的函数。

用简洁的语言来定义，风险是指不利结果（或损失）出现的可能性。

风险在社会经济生活中无所不在。在经济、军事、政治等各领域中都存在风险。大至战略决策，小到日常生活，人们时刻要面对风险，需要进行风险分析。在风险世界中，根据不同的层次和范畴，可以把风险分为各种类型。比如，根据不同的范围和层次，风险可以分为宏观风险和微观风险；根据不同的领域，有经济风险、军事风险、政治风险等；经济风险中按经济活动的过程和范围又可以分为生产风险、流通风险、投资风险、金融风险、结算风险和管理风险等；在经济决策活动中，根据不同的影响因素，风险又可分为购买力风险、流动性风险、利率风险、财务风险、资金风险等等。

风险是存在于社会经济生活中的普遍现象，它具有以下特征：