丁保荣 主编

本书另配《初中数学竞赛解题手册（综合分册）》

初中数学竞赛教程

CHUZHONG SHUXUE JINGSAI JIAOCHENG

综合分册

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

★ 初中数学竞赛教程　七年级
★ 初中数学竞赛教程　八年级
★ 初中数学竞赛教程　九年级
★ 初中数学竞赛教程　综合分册

★ 初中数学竞赛解题手册　七年级
★ 初中数学竞赛解题手册　八年级
★ 初中数学竞赛解题手册　九年级
★ 初中数学竞赛解题手册　综合分册

ISBN 978-7-308-06638-9

9 787308 066389 >

定价：35.00元

本书另配《初中数学竞赛解题手册综合分册》

初中数学竞赛教程

综合分册

主 编 丁保荣

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛教程. 综合分册/丁保荣主编. —杭州：浙江大学出版社，2009.3

ISBN 978-7-308-06638-9

Ⅰ.初… Ⅱ.丁 Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 033756 号

初中数学竞赛教程(综合分册)

丁保荣　主编

责任编辑　沈国明
文字编辑　夏晓冬
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　富阳市育才印刷有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　25
字　　数　451 千
版 印 次　2009 年 4 月第 1 版　2009 年 6 月第 2 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-06638-9
定　　价　35.00 元

版权所有　翻印必究　印装差错　负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话（0571）88925591

前　言

人们一直希望更好、更快、更强地发展，所以就出现了各种竞技活动。数学作为锻炼思维的体操，是一门可以充分展现头脑灵活度的学科，理所当然地被选择用来比试人们的思维和发现能力，于是就出现了数学奥林匹克，即数学竞赛。

数学竞赛在激发青少年学习数学的兴趣、培养刻苦学习的精神、发现科技人才、促进和提高数学教学水平等方面发挥了巨大作用，因而该项活动发展迅速，并取得了令人欣慰的成绩。我国自从参加国际数学奥林匹克以来，每年都取得了好成绩，始终保持领先优势，中国选手的优异表现为祖国赢得了巨大荣誉。在国内的历届比赛中，涌现出大批的优秀选手，他们在以后的学习、科研和生产生活中大多取得了骄人的业绩。

在目前数学竞赛的良好发展氛围下，考虑到广大教师和学生的迫切需要，我们编写了这套《初中数学竞赛教程》，题目精选自国内外各种竞赛，编者是多年从事数学竞赛工作的老师，讲解内容从时效性、实战性、指导性来说都是很好的。

本书涵盖初中数学竞赛大纲所规定的全部内容，分 30 讲，每讲设三个栏目：【赛点归纳】点明本讲赛点，探究命题思路，点拨解题方法；【赛题解密】精选典型赛题，剖析解题奥妙，技法全面解密；【赛场演练】跳出常规思路，演练竞赛真题，实现能力飙升。为了方便读者自学，我们编写了相应的《初中数学竞赛解题手册》，如果将“手册”与“教程”配套使用，收效一定更佳。

参与本书编写的有：方利生、何星天、金旭颖、朱晓燕、凌任涛、徐善海、董烈佳、陈志强、张敏君、张小梅、张喜凤。

丁保荣

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目录 CONTENTS

一、数

第 1 讲　整数的基本性质 …………………………………………（1）
第 2 讲　有理数 ………………………………………………………（11）

二、代数式

第 3 讲　整　式 ………………………………………………………（23）
第 4 讲　因式分解 ……………………………………………………（32）
第 5 讲　分　式 ………………………………………………………（41）
第 6 讲　根　式 ………………………………………………………（54）

三、方程和不等式

第 7 讲　一次方程与一次方程组 ……………………………………（65）
第 8 讲　不等式与不等式组 …………………………………………（79）
第 9 讲　特殊方程与不定方程 ………………………………………（91）
第 10 讲　一元二次方程 ……………………………………………（103）
第 11 讲　统计与概率 ………………………………………………（119）

四、函　数

第 12 讲　函数与图象 ………………………………………………（129）
第 13 讲　函数与最值 ………………………………………………（143）

五、几　何

第 14 讲　三角形 …………………………………… (156)
第 15 讲　四边形 …………………………………… (169)
第 16 讲　比例与相似 …………………………………… (183)
第 17 讲　圆 …………………………………… (198)
第 18 讲　面积与面积法 …………………………………… (215)
第 19 讲　几何变换 …………………………………… (232)
第 20 讲　几何计数 …………………………………… (244)
第 21 讲　解直角三角形 …………………………………… (259)
第 22 讲　几何中的定值与最值 …………………………………… (271)
第 23 讲　三角形的“心” …………………………………… (286)

六、逻辑推理等问题

第 24 讲　反证法 …………………………………… (299)
第 25 讲　抽屉原理 …………………………………… (311)
第 26 讲　组合问题 …………………………………… (319)
第 27 讲　极端原理 …………………………………… (332)
第 28 讲　逻辑推理 …………………………………… (345)
第 29 讲　染色问题 …………………………………… (362)
第 30 讲　生活中的数学 …………………………………… (372)

一　数

第 1 讲　整数的基本性质

要点归纳

1. 我们将只有 1 和它本身两个正约数的数叫做质数(即素数);有两个以上正约数的数叫做合数.1 既不是质数也不是合数.

关于质数与合数有以下常用的性质:

(1) 2 是最小的质数也是唯一的偶质数,除 2 以外,其余的质数都是奇数;

(2) 质数有无穷多个,合数也有无穷多个;

(3) 对于任意大于 1 的整数n,总可以找到n个连续的合数,可表示为: $N+2$, $N+3$, $\cdots$, $N+(n+1)$,其中 $N=1\times 2\times 3\times\cdots\times n\times(n+1)$.

2. 在整数中,能被 2 整除的数叫做偶数,不能被 2 整除的数叫做奇数.偶数一般用 $2n$ 表示,奇数一般用 $2n+1$ 或 $2n-1$ 表示(n 为整数).

关于奇数和偶数有如下性质:

(1) 奇数与偶数不可能相等;

(2) 奇数 $\pm$ 奇数 $=$ 偶数,

　　奇数 $\pm$ 偶数 $=$ 奇数,

　　偶数 $\pm$ 偶数 $=$ 偶数,

奇数个奇数的和是奇数,偶数个奇数的和是偶数;

(3) 两个整数的和与这两个整数的差奇偶性相同;

(4) 奇数 $\times$ 奇数 $=$ 奇数,

　　奇数 $\times$ 偶数 $=$ 偶数,

　　偶数 $\times$ 偶数 $=$ 偶数.

3. 对于任何整数 a, b,如果存在整数 c,使得 $a=bc$,则称 b 整除 a,记作 $b\mid a$;否则,若 b 不能整除 a,记作 $b\nmid a$.

整数的整除有以下基本性质:

(1) 如果 $a\mid b$, $b\mid c$,则 $a\mid c$;

（2）如果 $c \mid a$，$c \mid b$，则 $c \mid ma + nb$（m，n 为整数）；

（3）如果 $b \mid a$，$c \mid a$，$(b, c) = 1$，则 $bc \mid a$；

（4）如果 $b \mid a$，$d \mid c$，则 $bd \mid ac$.

4. 对于整数 a，b，a 除以 b 的商（整数）为 q，余数为 r，则 $a = bq + r(0 \leqslant r < b)$，这就是余数公式，其运算过程叫带余除法.

两个整数被同一个整数除所得的余数相同，称作同余. 例如，给定一自然数 m，如果用 m 去除任意两个整数 a 和 b，所得的余数相同，就称 a 和 b 对于 m 同余. 记作 $a \equiv b(\bmod m)$.

同余有以下简单性质：

（1）如果 $a \equiv b(\bmod m)$，则 $m \mid a - b$；反之，如果 $m \mid a - b$，则有 $a \equiv b(\bmod m)$.

（2）如果 $a \equiv b(\bmod m)$，$b \equiv c(\bmod m)$，则 $a \equiv c(\bmod m)$.

（3）如果 $a \equiv b(\bmod m)$，$c \equiv d(\bmod m)$，则 $a + c \equiv b + d(\bmod m)$；$a - c \equiv b - d(\bmod m)$；$ac \equiv bd(\bmod m)$.

赛题解密

例 1 （2005 年全国初中数学联赛题）若 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 为互不相等的正奇数，满足 $(2005 - x_1)(2005 - x_2)(2005 - x_3)(2005 - x_4)(2005 - x_5) = 24^2$，则 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$ 的末位数字是 （　　）

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 7

【精析】 由题意可知 $(2005 - x_1)$，$(2005 - x_2)$，$(2005 - x_3)$，$(2005 - x_4)$，$(2005 - x_5)$ 为偶数，将 24^2 分解为 5 个互不相等的偶数的积，确定出它们的值，进而获解.

【全解】 因为 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 为互不相等的正奇数，所以 $(2005 - x_1)$，$(2005 - x_2)$，$(2005 - x_3)$，$(2005 - x_4)$，$(2005 - x_5)$ 为互不相等的偶数，而将 24^2 分解为 5 个互不相等的偶数之积，只有唯一的形式：$24^2 = 2 \times (-2) \times 4 \times 6 \times (-6)$，所以 $(2005 - x_1)$，$(2005 - x_2)$，$(2005 - x_3)$，$(2005 - x_4)$，$(2005 - x_5)$ 分别等于 2，(-2)，4，6，(-6).

所以 $(2005 - x_1)^2 + (2005 - x_2)^2 + (2005 - x_3)^2 + (2005 - x_4)^2 + (2005 - x_5)^2 = 2^2 + (-2)^2 + 4^2 + 6^2 + (-6)^2 = 96$.

展开得 $5 \times 2005^2 - 4010(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) = 96$.

所以 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$

$= 96 - 5 \times 2005^2 + 4010(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$

$\equiv 1(\bmod 10)$，选 A.

【探密】 1. 根据整数的奇偶性，其和差不影响原和差的奇偶性的性质可确定结论.

2. 常用 $2n$ 表示偶数，$2n+1$ 表示奇数；奇数、偶数有以下性质经常用到：

$$\text{奇数} \pm \text{奇数} = \text{偶数}, \text{奇数} \times \text{奇数} = \text{奇数},$$
$$\text{偶数} \pm \text{偶数} = \text{偶数}, \text{偶数} \times \text{偶数} = \text{偶数},$$
$$\text{奇数} \pm \text{偶数} = \text{奇数}, \text{奇数} \times \text{偶数} = \text{偶数}.$$

例 2 （2006 年全国初中数学竞赛题）小明家电话号码原为六位数，第一次升位是在首位号码和第二位号码之间加上数字 8，成为一个七位数的电话号码；第二次升位是在首位号码前加上数字 2，成为一个八位数的电话号码. 小明发现，两次升位后他家的电话号码的八位数，恰是原来电话号码的六位数的 81 倍，则小明家原来的电话号码是________.

【精析】 设原来的电话号码的六位数为 $\overline{abcdef}$，则有 $81\times\overline{abcdef}=\overline{2a8bcdef}$. 可整体地设 $x=\overline{bcdef}$，再求解.

【全解】 设原来电话号码的六位数为 $\overline{abcdef}$，则经过两次升位后电话号码的八位数为 $\overline{2a8bcdef}$. 根据题意，有 $81\times\overline{abcdef}=\overline{2a8bcdef}$.

记 $x=b\times10^4+c\times10^3+d\times10^2+e\times10+f$，

于是 $81\times a\times10^5+81x=208\times10^5+a\times10^6+x$，

解得 $x=1250\times(208-71a)$.

因为 $0\leqslant x<10^5$，所以 $0\leqslant1250\times(208-71a)<10^5$，

故 $\dfrac{128}{71}<a\leqslant\dfrac{208}{71}$.

因为 a 为整数，所以 $a=2$.

于是 $x=1250\times(208-71\times2)=82500$.

所以小明家原来的电话号码为 282500.

【探密】 1. 整体地设出 $x=\overline{bcdef}$ 是解本题的关键.

2. 设 $x=\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ 是 n 位整数，则有

$$x=10^{n-1}\times a_1+10^{n-2}\times a_2+\cdots+10\times a_{n-1}+a_n.$$

有时因解题需要，还可设 $x=10^2p+q$（q 是两位数）或 $x=10^3p+q$（q 是三位整数）等等.

例 3 （五羊杯竞赛题）已知整数 $\overline{13ab45c}$ 能被 792 整除，求 a，b，c 的值.

【精析】 由于 $792=8\times9\times11$，所以利用被 8，9，11 整除的数的特点即可.

【全解】 因为 $792=8\times9\times11$，8，9，11 两两互质，

所以 792 分别被 8，9，11 整除.

因为 $8 \mid \overline{45c}$,所以 $c=6$.

因为 $9 \mid \overline{13ab456}$,

所以 $9 \mid (1+3+a+b+4+5+6)$,

即 $9 \mid (a+b+19)$.

所以 $a+b=8$ 或 $a+b=17$.

因为 $11 \mid \overline{13ab456}$,

所以 $11 \mid (1+a+4+6)-(3+b+5)$,

所以 $11 \mid (a-b+3)$,

所以 $a-b=8$ 或 $a-b=-3$.

所以 $\begin{cases}a+b=8\\a-b=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+b=8\\a-b=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+b=17\\a-b=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+b=17\\a-b=-3\end{cases}$.

解上面方程组,只有 $a=8, b=0$ 符合题意.

所以 $a=8$，$b=0$，$c=6$.

所以所求的数为 1380456.

例 4 (1998 年“华罗庚金杯”培训题)一个整数除 300，262，205,得到相同的余数,问：这个整数是多少?

【精析】 利用同余的性质,如果两个数的余数相同,则这两个数的差被该除数整除.

【全解】 设所求整数为 x.

则
$$300=xm+r \qquad (1)$$
$$262=xn+r \qquad (2)$$
$$205=xp+r \qquad (3)\ (m,\ n,\ p\text{ 为整数})$$

由(1)－(2)得 $38=x(m-n)$,

由(2)－(3)得 $57=x(n-p)$,

由(1)－(3)得 $95=x(m-p)$.

所以 $x \mid 38$，$x \mid 57$，$x \mid 95$.

所以 $x=19$.

例 5 (第三届华杯赛竞赛题)在一张 9 行 9 列的方格纸上,把每个方格所在的行数与列数加起来,填在这个方格中(见图 1－1),例如 $a=5+3=8$. 问：填入的 81 个数中,奇数多还是偶数多?

【全解】 将第一行的数与第二行的数比较,同一列的两个数奇偶性正好相反(第一

此为试读,需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

行的数是列数加 1，而第二行的数是列数加 2)．因此，第一行的奇数(偶数）个数，正好等于第二行的偶数(奇数）个数．这两行合在一起来看，奇数个数与偶数个数一样多．

同理，三、四两行合在一起来看，奇数个数与偶数个数一样多．五、六两行合在一起，七、八两行合在一起也都是这样．因此，前八行合在一起来看，奇数个数与偶数个数一样多．

第九行的 9 个数是列数加 9，列数 1，2，…，9 中奇数比偶数多 1；加 9 后，奇数变为偶数，偶数变为奇数，所以 9 个数中，偶数比奇数多 1 个．

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5			a						
6									
7									
8									
9									

图 1－1

因此，在填入的 81 个数中，偶数比奇数多 1 个．

【探密】 本题并不需要具体算出每一个数，因为重要的并不是这些数的数值，而是它们的奇偶性．于是，通常可将偶数记作 0，奇数记作 1．等式

$$0+0=0,\ 1+1=0,\ 1+0=1 \tag{1}$$

正好表明：

$$\begin{aligned}\text{偶数}+\text{偶数}&=\text{偶数},\\ \text{奇数}+\text{奇数}&=\text{偶数},\\ \text{奇数}+\text{偶数}&=\text{奇数}.\end{aligned}$$

此外，在比较多少时，也并不需要将两种对象(例 1 中是奇数与偶数）的个数先算出来．由于有一一对应的关系(第一行的奇数正好与第二行的偶数对应，第一行的偶数正好与第二行的奇数对应，等等)，所以前八行的奇数与偶数个数相等，只需考虑第九行中奇数与偶数谁多谁少即可．

例 6 （第四届祖冲之杯竞赛题）表甲是一个英文字母电子显示盘，每一次操作可以使某一行 4 个字母同时改变，或者使某一列 4 个字母同时改变．改变的规则是，按照英文字母表的顺序，每个英文字母变成它下一个字母(即 A 变成 B，B 变成 C，…，最后的字母 Z 变成 A)．

问：能否经过若干次操作，使表甲变为表乙？如果能，请写出变化过程；如果不能，说明理由．

S	O	B	R
T	Z	F	P
H	O	C	N
A	D	V	X

表甲

K	B	D	S
H	E	X	G
R	T	B	S
C	F	Y	A

表乙

【精析】 本题首先需要判断“能”还是“不能”. 表甲与表乙不很有规律,似不太容易将表甲变为表乙(可以试一试,看看能否成功). 如果是不能,就应当找出不能的理由. 这类“操作”(或变换)问题,往往需要挖掘其中的“不变量”,即经过操作不会改变的量.

当然,还得将问题归结为奇偶分析. 因此,注意 26 个字母实际上就是 1 ~ 26 这 26 个数,其中一半是奇数,一半是偶数. 我们将“奇数字母”A, C, E, G, I, K, M, O, Q, S, U, W, Y 记成 1,而将“偶数字母”B, D, F, H, J, L, N, P, R, T, V, X, Z 记成 0,然后考察表中奇数的个数.

【全解】 按照分析所说,

表甲可写成

1	1	0	0
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0

表丙

而表乙可写成

1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1
1	0	1	1

表丁

每次操作将同一行或同一列的 1 改为 0, 0 改为 1.

因为每一行(每一列)有 4 个数,所以其中 1 的个数 a 与 0 的个数 $b(=4-a)$ 有相同的奇偶性. 每次操作将 1 与 0 互换,从而个数 a 与 b 互换. 所以操作的结果不改变 1 的个数的奇偶性.

表丙中原有 5 个 1,由于操作不改变 1 的个数的奇偶性,所以无论经过多少次操作,表中 1 的个数始终为奇数.

而表丁中 1 的个数 8 为偶数,所以表丙不可能经过有限多次操作变为表丁,即表甲不可能经过有限多次操作变为表乙.

例 7 (2005 年上海市初中数学竞赛题) 已知 a, b, c 都是大于 3 的质数,且 $2a+5b=c$.

(1) 求证:存在正整数 $n>1$,使所有满足题设的三个质数 a, b, c 的和 $a+b+c$ 都能被 n 整除;

(2) 求上一问中 n 的最大值.

【精析】 (1) 由 $a+b+c=3(a+2b)$,可取 $n=3$;(2) 根据 a, b 被 3 除的余数只能是 1 或 2 讨论求解.

【全解】 (1) 因为 $c=2a+5b$,所以 $a+b+c=3a+6b=3(a+2b)$.

又 a, b, c 都是大于 3 的质数,所以 $3\mid(a+b+c)$,即存在正整数 $n>1$(例如 $n=3$),使 $n\mid(a+b+c)$.

(2) 因为 a, b, c 都是大于 3 的质数,所以 a, b, c 都不是 3 的倍数.

若 $a \equiv 1 \pmod 3$, $b \equiv 2 \pmod 3$,则 $c = 2a + 5b \equiv 2 + 10 \equiv 0 \pmod 3$,这与 c 不是 3 的倍数矛盾.

同理,$a = 2 \pmod 3$, $b \equiv 1 \pmod 3$ 也将导致矛盾. 故只能是 $a \equiv b \equiv 1 \pmod 3$ 或 $a \equiv b \equiv 2 \pmod 3$.

于是,$a + 2b \equiv 3a \equiv 0 \pmod 3$. 从而 $q \mid (a + b + c)$.

当 $a = 7, b = 13$ 时,$c = 2 \times 7 + 5 \times 13 = 79$ 为质数,$a + b + c = 99 = 9 \times 11$.

当 $a = 7, b = 19$ 时,$c = 2 \times 7 + 5 \times 19 = 109$ 为质数,$a + b + c = 135 = 9 \times 15$.

故在所有 $n \mid (a + b + c)$ 的 n 中,最大的为 9.

例 8 (2005 年全国初中数学竞赛题 B 卷) 某校举行春季运动会,由若干名同学组成一个 8 列的长方形队列. 如果原队列中增加 120 人,就能组成一个正方形队列;如果原队列中减少 120 人,也能组成一个正方形队列. 问:原长方形队列中有多少名同学?

【精析】 由于若干名同学组成一个 8 列的长方形队列,故可设原长方形队列中有 $8x$ 人,于是由题意可得 $8x + 120$ 和 $8x - 120$ 是完全平方数.

【全解】 设原长方形队列中有同学 $8x$ 人,由题意可知 $8x + 120$ 和 $8x - 120$ 均为完全平方数. 于是可设

$$\begin{cases} 8x + 120 = m^2, & ① \\ 8x - 120 = n^2. & ② \end{cases}$$

其中 m, n 均为正整数,且 $m > n$.

由 ① − ② 得 $m^2 - n^2 = 240$,即 $(m + n)(m - n) = 240 = 2^4 \times 3 \times 5$.

由 ① 与 ② 可知 m^2, n^2 都是 8 的倍数,所以 m、n 均是 4 的倍数. 于是 $m + n$, $m - n$ 均是 4 的倍数,所以必有

$$\begin{cases} m + n = 60 \\ m - n = 4 \end{cases} \text{或} \begin{cases} m + n = 20 \\ m - n = 12 \end{cases}.$$

解得 $m = 32$, $n = 28$ 或 $m = 16$, $n = 4$.

所以 $8x = m^2 - 120 = 32^2 - 120 = 904$ 或 $8x = m^2 - 120 = 16^2 - 120 = 136$.

故原长方形队列中有同学 136 人或 904 人.

【探密】 1. 此题主要是用到因式分解,再用整数的奇偶性判断每个因式是多少.

2. 高次不定方程的求解方法主要是因式分解法和约数法.

竞场演练

一、选择题

1. （希望杯竞赛题）三人中每两个人的平均年龄加上余下一人的年龄分别是 47，61，60，那么这三个人中最大年龄与最小年龄的差是（　　）
   A. 28　　B. 27　　C. 26　　D. 25

2. （1997 年学习报竞赛题）有 1997 盏亮着的电灯，各由一个拉线开关控制着，现按其顺序编号为 1，2，…，1997，然后将编号为 2 的倍数的灯线拉一下；再将编号为 3 的倍数的灯线拉一下；最后将编号为 5 的倍数的灯线拉一下，三次拉完后亮着的灯的盏数为（　　）
   A. 1464　　B. 533　　C. 999　　D. 998

3. （1998 年江苏省竞赛题）从 1 开始的自然数中，把能表示成两个整数的和与它的差的乘积的数从小到大排列，在这种排列中，第 1998 个数是（　　）
   A. 2662　　B. 2664　　C. 2665　　D. 2666

4. （2005 年河南省竞赛题）探索规律：$3^1=3$，个位数字是 3；$3^2=9$，个位数字是 9；$3^3=27$，个位数字是 7；$3^4=81$，个位数字是 1；$3^5=243$，个位数字是 3；$3^6=729$，个位数字是 9，…，那么 3^{2005} 的个位数字是（　　）
   A. 3　　B. 9　　C. 7　　D. 1

5. （第 17 届希望杯竞赛题）三角形的三边长 a，b，c 都是整数，且 $[a, b, c]=60$，$(a, b)=4$，$(b, c)=3$（注：$[a, b, c]$ 表示 a，b，c 的最小公倍数，(a, b) 表示 a，b 的最大公约数），则 $a+b+c$ 的最小值是（　　）
   A. 30　　B. 31　　C. 32　　D. 33

6. （第 17 届希望杯竞赛题）若 a，b，c 都是大于 1 的自然数，且 $a^0=252b$，则 a 的最小值是（　　）
   A. 42　　B. 24　　C. 21　　D. 15

二、填空题

7. （希望杯竞赛题）3 个质数 a，b，c 的乘积等于这 3 个质数的和的 5 倍，则 $a^2+b^2+c^2=$ ________.

8. （1999 年重庆市竞赛题）一个自然数与 13 的和是 5 的倍数，与 13 的差是 6 的倍数，则满足条件的最小自然数是________.

9. （第 17 届五羊杯竞赛题）在 1 ～ 2005 的所有正整数中，共有________个整数 x，使 3^{3x+1} 和 x^3 被 5 除的余数相同.

10. (第 17 届希望杯竞赛题) $2^{m+2006}+2^{m}$(m 是正整数)的末位字数是________.

11. (第 18 届五羊杯竞赛题) 如果 n 为正偶数,并且$(n-1)^2$ 整除 $n^{2006}-1$,那么 n 的最大值为________.

12. (第 18 届五羊杯竞赛题) 设 $a_1=12\times 8, a_2=102\times 98, a_3=1002\times 998, a_4=10002\times 9998,\cdots$,又设 $S=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{20}$,那么 S 的各位数字和为________.

13. (第 4 届中国趣味数学决赛题) 下面的算式中,每个汉字代表一个数字($0\sim 9$),不同汉字代表不同数字,则美 + 妙 + 数 + 学 + 花 + 园 = ________.

		美	妙	数	学
×				花	园
	数	学	真	美	妙
4	2	3	8	0	
5	好	好	好	美	妙

三、解答题

14. (1998 年重庆市竞赛题) 按下面规则扩充新数:已知有 a, b 两数,可按规则 $c=ab+a+b$ 扩充一个新数,而 a, b, c 三个数中任取两个数,按规则又可扩充一个新数,…,每扩充一个新数叫做一次操作. 现有数 1 和 4,求按上述规则经过三次扩充得到的最大新数.

15. (1998 年希望杯竞赛题) 23 个不同的正整数的和是 4845,问:这 23 个数的最大公约数可能达到的最大的值是多少?写出你的结论,并说明理由.

16.（第17届希望杯竞赛题）

（1）求证：奇数的平方被8除余1；

（2）请你进一步证明：2006不能表示为10个奇数的平方之和.

17.（第21届江苏省初中数学竞赛题）已知k，a，b为正整数，k被a^2，b^2整除所得的商分别为m，$m+116$.

（1）若a，b互质，求证：a^2-b^2与a^2，b^2都互质；

（2）当a，b互质时，求k的值；

（3）若a，b的最大公约数为5，求k的值.

18.（首届华杯赛试题）一个六位数$\overline{3434ab}$能同时被8和9整除，已知$a+b=c$，求c的最小值.

19.（首届华杯赛试题）观察下列数列，求出第90个数除以3的余数：10，13，23，36，59，95，154，….

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com