理論力学

LILUN LIXUE

下 冊

（第一部分）

浙江大学力学教研組編

1961年4月

目　录

第三篇　动力学

第三篇　动力学

第十六章　动力學基本定律

动力学研究物体的运动、作用其上的力与物体的力学性質三者之間的关系。

在15—17世紀期間，随着生产的发展，特别是城市和大建筑物的产生、航海的发展以及手工业向工場手工业的过渡，力学奠定了基础。牛頓（1642—1726）在前人的基础上，特别是伽利略和开普勒，系統地敍述了作为动力学基础的諸定律①。以牛頓定律为基础的力学，称为**古典力学**，以区别于20世紀所創立的**量子力学**和**相对力学**。

16—1 动力学基本定律

第一定律（**慣性定律**）：**質点如不受任何力的作用，则将保持靜止或作等速直綫运动。**

这个定律可以数学表达为：

$$当F=0时，V=常量(包括V=0)。\qquad(16—1)$$

这一定律指出了物体的一种基本性質：一切物体不能自己改变其运动状态。这个性質称为**慣性**。另一方面，这一定律也給出了**力**的概念：力是引起物体运动状态改变的外界作用。因而，若質点的运动不是等速直綫运动，则該質点必受到另一物体所作用的力。

---

①牛頓，"自然哲学的数学原理"（1687年），郑太朴譯，商务印书館，1931年。

事实上，描述质点的运动与所采用的坐标系有关。凡是惯性定律能够成立的坐标系，都称为**惯性座标系**，也就是説，对于这种坐标系而言，若质点的速度$V=$常量，則作用于质点的合力$F=0$，反之也然。

第二定律（运动定律）：**质点运动时的加速度，方向与所受之力相同，而大小与力成正比。**

这个定律可以数学表达为

$$F=mW, \tag{16-2}$$

式中m称为质点的**质量**。对于同一物体来説，其质量是常量，乃是物体的基本物质参数。由（16—2）式可以看出，相同的力作用在不同质点上，质点所产生的加速度与其质量成反比。因此，**质量是物体惯性的度量**。但是，近来也有主张质量应定义为**物质的量的度量**方能正确地反映出质量的唯物主义理解①。

方程（16—2）也常写成如下形式：

$$F=\frac{d(mV)}{dt}, \tag{16-3}$$

式中mV称为质点的**动量**，它是一个方向与质点速度相同，大小等于质点质量与速度乘積的矢量。关于这个物理量的性质，在第十八章中还要进一步討論。

按照方程（16—3），第二定律可以改述为：**质点动量的变化率大小、方向与所受之力相同。**

应該指出，第二定律也只能在惯性坐标系中成立。质点对于惯性坐标系的加速度，約定称为絕对加速度。根据伽利略的实验，重物落下的加速度是常量，称为**重力加速度**，記作g。一般可取$g=9.81$米/秒^2（实际上，g随物体所在位置不同而有不大

① "苏联关于质量和能量問題的討論"（論文集），科学出版社，1959年。

的变化）。因为重物下落时所受之力就是重力p，所以

$$p=mg,$$

由此得到

$$m=\frac{p}{g}。\qquad (16-4)$$

上式表示质点的质量等于其重量除以重力加速度。因此，物体的质量可由秤它的重量而間接地度量出来。

第三定律（**作用反作用定律**）：**两质点相互間的作用力和反作用力，恆同时存在、大小相等、方向相反，並沿着同一直綫。**

这条定律在靜力学中已經講过。

第四定律（**力的独立作用定律**）：**如在质点上同时作用几个力，則此质点的加速度等于这些力分別作用时該点所得諸加速度的矢量和。**

設在质量为m的质点上，作用F_1，F_2，……F_n諸力。以W代表該点的加速度，又以W_1，W_2，……W_n表示当这些力分別作用于該点时所产生的加速度，則根据本定律可得

$$W=W_1+W_2+\cdots\cdots+W_n。\qquad (16-5)$$

現在設有某力R能夠代替力系F_1，F_2，……F_n，即能产生同样的加速度W。根据第二定律，此力应为：

$$R=mW。$$

以(16—5)式代入，得到

$$R=m(W_1+W_2+\cdots\cdots+W_n)=$$
$$=mW_1+mW_2+\cdots\cdots+mW_n。$$

因为 $F_1=mW_1$，$F_2=mW_2$，……，$F_n=mW_n$，

故得这个能产生同样加速度W的力R为：

$$R=F_1+F_2+\cdots\cdots+F_n=\Sigma F。$$

上式的形式与靜力学中熟知的諸汇交力的合力的形式一样。

这説明了有几个力作用于同一質点时，可以用它們的合力来代替而能得同样的加速度，亦卽**力的平行四边形合成法則也適用于动力学**。由此，在应用第二定律时，等号左端应理解为作用于質点諸力的合力，卽

$$\Sigma F = mW。$$

如果$W=0$，卽質点作等速直綫运动或处于靜止状态，則$\Sigma F=0$。这就是汇交力系F_1，F_2，……，F_n的平衡条件。

牛頓在敍述这些定律时訊为物体是在絕对靜止的，与物質无关的空間中运动，並訊为时間也是独立地、与物質无关地进行的。这就是所謂絕对时空观念。

由辯証唯物主义和近代物理学的观点来看，將时間、空間理解为与物質无关，与物質的运动无关的絕对标准是完全錯誤的。时間、空間是物質存在的形式，脫离物質的絕对时間和空間是不存在的。

同时还应指出运动是物質的存在形式，物質的固有属性，因而不应企图去寻找物質世界运动的最后原因。牛頓虽然正确地敍述了物質机械运动的基本規律，但是由于歷史的局限性，他总是企图从外面去寻找运动的最后原因，因而不得不以超自然的神的第一推动力来作为解釋，而得出了反科学的唯心主义結論。

16—2. 两种单位制

在动力学中所遇到的物理量，一般采用以下两种单位制：

（1）工程单位制（或M.K.S.制）：在工程上都应用这种单位制，它取长度（米），时間（秒）和力（公斤）为基本单位，由此导出其他的单位。所以在工程单位制中質量的单位是导出单位，它的因次是：

$$[質量]=\frac{[力]}{[加速度]}=[力][长度]^{-1}[时間]^{2};$$

它的单位是〔公斤·米$^{-1}$·秒^{2}〕或〔公斤·厘米$^{-1}$·秒^{2}〕等。

（2）絕对单位制（或C.G.S.制）：取长度（厘米），时間（秒）和質量（克）为基本单位，其他的单位由此导出。所以在絕对单位制中力的单位是导出单位，其因次是：

〔力〕=〔質量〕〔加速度〕=〔質量〕〔长度〕〔时間〕$^{-2}$，

其单位是〔克·厘米·秒$^{-2}$〕。

在絕对单位制中把能使1克質量得到1厘米/秒^{2}加速度的力作为单位力，名为1达因；把能使1公斤質量得到1米/秒^{2}加速度的力称为1牛頓。显然，1〔牛頓〕=10^{5}〔达因〕。

本书中一律采用工程单位制，这里質量是一个导出单位。

复 习 問 題

1.試用自己的語言敍述动力学的基本定律。

2.何謂物体的慣性？怎样比較两物体慣性的大小？

3.怎样性質的力作用于物体，所引起的加速度与該物体的質量无关？

3.質点运动的方向是否一定与所受外力的方向一致？

5.为什么“力”和“質量”两个量，对于一种单位制来說，只其中一个可以作为基本单位，而另一个就成为导出单位？

6.在工程单位制和絕对单位制中，物体質量的单位是什么？

第十七章 动力學基本方程式

本章主要叙述质点动力学的基本方程式。結合具体問題說明动力学两類問題：1)据已知运动求力和 2)据已知力求运动的解法。

17—1 质点的运动微分方程式

設有一质点M，其质量为m，在F_1，F_2……F_n諸力的作用下作曲綫运动（图17—1）。根据牛頓第二定律：质点的加速度W与諸作力用的合力R之間的系关为

$$mW=R。\qquad (17-1)$$

由上章定律四知道合力：

$$R=\Sigma F=(\Sigma X)i+(\Sigma Y)j+(\Sigma Z)k。$$

上面ΣX，ΣY，ΣZ为作用于质点上各力在直角坐标軸x，y，z上投影的代数和。又由运动学知道加速度

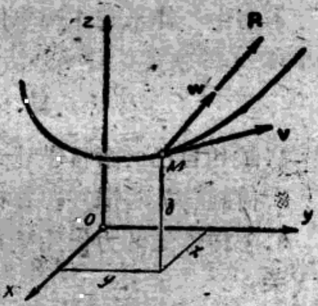

图17－1

$$W=\frac{dV}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}i+\frac{d^2y}{dt^2}j+\frac{d^2z}{dt^2}k.$$

因此（17—1）式又可寫成

$$m\frac{dV}{dt}=\Sigma F,\qquad (17-2)$$

或者
$$m\frac{d^2r}{dt^2}=\Sigma F。\qquad (17-3)$$

这就是矢量形式的质点运动微分方程式。

将（17—3）式投影到直角坐标軸上，便得到

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \Sigma X, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \Sigma Y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \Sigma Z。 \end{aligned}\right\} \qquad (17—4)$$

这就是**直角坐标中的质点运动微分方程式**。（17—4）式中z, y, x为质点M的坐标。

当然也可将（17—3）投影到自然坐标軸上。若力F在切綫、主法綫与付法綫上的投影分别为F_τ，F_n与F_b，則得：

$$\Sigma F_\tau = mw_\tau，\ \Sigma F_n = mw_n，\ \Sigma F_b = mw_b；$$

又因为：

$$W_\tau = \frac{dv}{dt}，\quad W_n = \frac{v^2}{\rho}，\ W_b = 0；$$

于是得到：

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= \Sigma F_\tau, \\ m\frac{v^2}{\rho} &= \Sigma F_n, \\ 0 &= \Sigma F_b。 \end{aligned}\right\} \qquad (17—5)$$

这就是自然座标中的质点运动微分方程式。

观察以上諸动力学方程式，自然可提出两類問題：

1)**第一类問題**：已知質量为給定的質点的运动，即已知在考虑的一段时間中的所有运动学要素，或者与之相当的运动方程式，需求引起这种运动的作用力。

2)**第二类問題**：已知在考察的一段时間中所有作用于質量为給定的質点或質点系上的力，需求所发生的运动的运动学要素，

亦卽运动方程式。

下面我們通过例子来討論这两類問題的解法。

17—2、动力学第一类問題：

現在首先研究質点动力学的第一類問題：已知質点的运动情況，求作用于質点上的力。一般說来，这類問題較为簡单。例如，若已知以直角坐标表示的运动方程式：

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t)。$$

解題时只需将上列各式对时間微分两次，然后应用（17—4)式，就可完全确定質点所受各力投影的代数和：

$$\left.\begin{aligned}\Sigma X&=m\frac{d^2x}{dt^2}=f_1''(t),\\ \Sigma Y&=m\frac{d^2y}{dt^2}=f_2''(t),\\ \Sigma Z&=m\frac{d^2z}{dt^2}=f_3''(t)。\end{aligned}\right\}\qquad(17—6)$$

根据上式可以求出力的三个未知量。

【例17—1】質量为m的重物，固定在鉛垂彈性桿的上端。在受到一定扰动（卽得到一定的初位移和初速度）后，重物在垂直于彈性桿的平面中作曲綫运动（图17—2）。已知軌迹为椭圆，

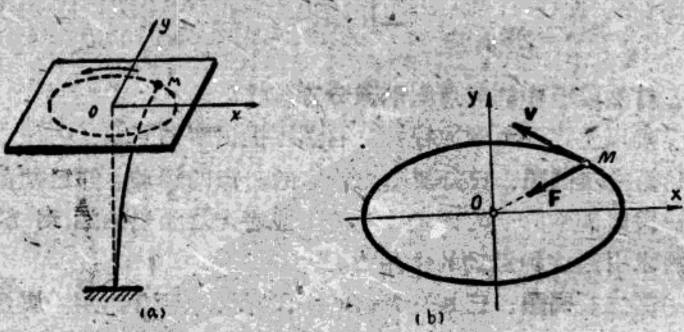

图17－2

其运动方程为$x=a\cos\omega t$，$y=b\sin\omega t$。求弹性桿作用于重物的力按什么规律变化。

【解】首先，从已知的运动方程求出加速度：

$$\left.\begin{aligned} W_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x, \\ W_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = -b\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y。\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

其次，根据（17—6）式求得力F的投影为

$$\left.\begin{aligned} X &= m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x, \\ Y &= m\frac{d^2y}{dt^2} = -m\omega^2 y。\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

因此弹性桿作用于重物的力为

$$F = Xi + Yj = -m\omega^2 xi - m\omega^2 yj =$$
$$= -m\omega^2(xi + yj) = -m\omega^2 r,$$

式中r为点M的位置矢，其量值为

$$r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}。$$

由此可見，力F的作用綫与OM重合而指向原点O，其大小与OM成正比：

$$F = m\omega^2 r = m\omega^2(OM)。 \quad (4)$$

这就是説，彈性桿給重物的力就是普通的**彈性恢复力**，也即在运动时，胡克定律仍然成立。

【例17—2】汽輪机的安全开关結构如图17—3。轉軸鉆一垂直的小孔，用彈簧将重$Q=0.225$公斤的銷子A压入孔内。当汽輪机以正常轉速$n=1500$轉/分运行时，銷子重心离轉軸中心綫距离为$l=8.5$毫米。当汽輪机轉速增加10%时，銷子克服彈簧力向外移动，

到离开其正常位置x＝4.5毫米。于是，销子一端碰着横桿B而使活动勾C松脱，与勾子相連的横桿組即发生作用而將安全机构的汽閥关閉。求彈簧应有的剛度C(即使彈簧变形1厘米所需的力)。

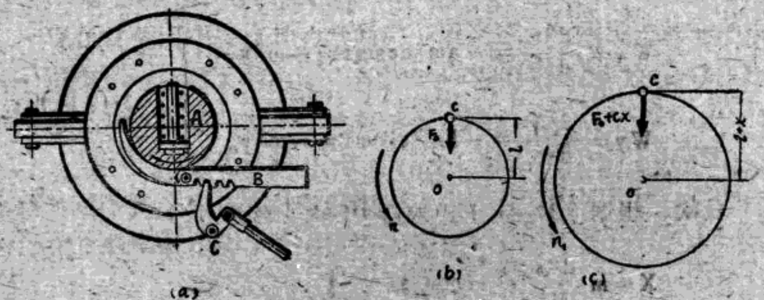

图17－3

〔解〕当汽輪机以正常轉速运行时，梢子重心C作半徑为l的元周运动。設这时彈簧的压力为F_0，則由（17—5）第二式有

$$F_0=ml\omega^2。\qquad (1)$$

又在汽輪机以超出正常值10％的轉速运行时，梢子重心作半徑为（l＋x）的元周运动，这时，彈簧的变形再增加了x，因而彈簧压力已变成（F_0+cx）。同样有

$$F_0+cx=m(l+x)\omega_1^2。\qquad (2)$$

(2)式減去(1)式並两边除以x，得到

$$C=m\frac{(l+x)\omega_1^2-l\omega^2}{x},\qquad (3)$$

式中 $m=\dfrac{Q}{g}$,

$$\omega=\frac{n\pi}{30},\quad n_1=1.1\left(\frac{n\pi}{30}\right)。$$

数值代入后

$$C=\frac{0.225}{981}\left(\frac{1500\times\pi}{3\sigma}\right)^2\frac{(085+0.45)1.1^2-0.85}{0.45}=$$

$$=9.09\text{公斤/厘米。}$$

安全开关中的弹簧就应按此刚度設計。

17—2. 动力学第二类問題:

动力学第二類問題与第一類問題相反: 已知作用力, 求质点的运动。此时問題就成为求解微分方程式。

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=\Sigma X,\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=\Sigma Y,\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=\Sigma Z。\end{aligned}\right\}\qquad(17-7)$$

根据給定力的性质, 可以有下述各种情况:

第一、作用力是常量。例如, 质点在地面附近运动时(如砲弹的运动)所受的重力, 在定值均匀电場中运动的电子所受的电場力。

第二、作用力与时間有关。例如, 在均匀但随時間而变化的电場中运动的电子所受的电場力; 交流电通过电磁鉄線圈时对軟鉄棒的吸引力; 使物体发生振动的周期性力或周期性冲击等。

第三、作用力与动点的速度有关。例如, 物体在流体中运动时所受的阻力。实驗証明: 在速度很小, 或物体很小而流体黏性較大的情况下, 阻力近于与速度的一次方成正比。

$$R=\mu v。$$

在速度相当大, 或物体很大而流体黏性很小的情况下, 阻力近于与速度二次方成正比。

$R = \mu v^2$。

对速度近于音速的运动物体，关系式就更为複杂。

第四、作用力与动点的位置有关。例如，质点运动范围很大时（如人造卫星、宇宙火箭、洲际导彈的飞行等）所受的地心引力与质点至地心的距离的平方成反比；质点所受彈性体因变形而产生的彈性力与离开未变形位置的距离成正比，

$F = cr$,

其中r是动点M对于未变形平衡位置的位置矢，c是表示每单位变形所引起的彈性力，称为**彈性刚度**。

一般說来，质点所受之力既可以有不变的力，也可以有随時間、速度、位置而变化的力。因此解第二類問題往往引起很大的、有时甚至是尙未解决的数学困难。

在求解（17—7）的三个二阶微分方程式时，將出現六个積分常量。在具体問題中，为了求得确定的解答，必须知道运动的起始条件：即在某一瞬时（通常是在运动开始时，一般取作t＝o）动点的位置和速度

$$\left.\begin{array}{lll} x = x_o, & y = y_o, & z = z_o; \\ \dot{x} = v_{ox}, & \dot{y} = v_{oy}, & \dot{z} = v_{oz} \end{array}\right\} \quad (17—8)$$

以下我們就几种簡单情况举例說明运动微分方程式的積分方法。

（1）力为常量之例

【例17—3】质点M在眞空中以与水平成α_o角的初速度V_o射出。求此质点在重力作用下的运动。

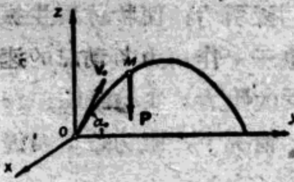

图17－4

【解】取质点的起始位置O为坐标原点，水平面为oxy平面，並

使速度矢V_o在oyz平面内（图17—4）。这样显然有

$$\Sigma X = 0, \ \Sigma Y = 0, \ \Sigma Z = -p = -mg; \qquad (1)$$

并且在开始（t＝o）时的位置与速度为：

$$\left.\begin{aligned} x_o &= o, \\ y_o &= o, \\ z_o &= o, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \dot{x}_o &= o, \\ \dot{y}_o &= v_o\cos\alpha_o, \\ \dot{z}_o &= v_o\sin\alpha_o \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

于是，质点的运动微分方程式为：

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= o, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= o, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -mg, \end{aligned}\right\} \text{或} \quad \left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= o, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= o, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g。 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

将上式积分一次得：

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Vx = C_1, \\ \frac{dy}{dt} &= Vy = C_2, \\ \frac{dz}{dt} &= V_z = -gt + C_3 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

将起始条件（2）代入，得：

$$C_1 = O, \ C_2 = V_o\cos\alpha_o, \ C_3 = V_o\sin\alpha_o。 \qquad (5)$$

因而有：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=Vx=0,\\ \frac{dy}{dt}&=Vy=v_0\cos\alpha_0,\\ \frac{dz}{dt}&=Vz=v_0\sin\alpha_0-gt.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

将上式再積分一次，得到:

$$\left.\begin{aligned}X&=C_4,\\ y&=v_0t\cos\alpha_0+C_5,\\ z&=v_0t\sin\alpha_0-\frac{1}{2}gt^2+C_6.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

再将起始条件(2)代入，得到:

$$C_4=0,\quad C_5=0,\quad C_6=0。\qquad(8)$$

所以得到运动方程式为

$$\left.\begin{aligned}x&=o,\\ y&=v_0t\cos\alpha_0,\\ z&=v_0t\sin\alpha_0-\frac{1}{2}gt^2\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

由第一式可以知道質点在oyz平面内运动。由第二、三式中消去时間t，便得到其軌跡方程（拋物綫）:

$$z=y\,tg\alpha_0-\frac{gy^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}\ 。\qquad(10)$$

若令$z=o$，則可得到其水平射程为

$$L=(y)_{z=o}=\frac{V_0^2}{g}\sin2\alpha_0\ 。\qquad(11)$$

实际上，速度不大的抛射体都可按此計算，例如轮料由皮带输送机抛出后的运动，球磨机内鋼球脫离筒壁后的运动。但是速度很大时，空气阻力就不能略去不計，例如砲彈的运动就是如此，构成了彈道学的研究內容。

（2）**力为时間函数之例**

〔例17—4〕重 $Q=9$ 吨的吊籠自矿井中提升时，用测力計测得鋼絲繩中的張力近似地按如下規律变化：

$$P=10.8+0.05t,$$

式中 P 以吨計，t 以秒計。設运动阻力 R 为吊籠重量的10％。求吊籠自靜止开始运动至速度达 $v=6.4$ 米/秒所需时間及經过距离。

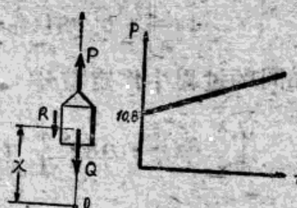

图17－5

〔解〕吊籠在运动时共受到三个力：鋼絲繩拉力 P，重力 Q 和阻力 R。取开始运动的位置为原点，坐标軸方向向上，則有初始条件：

$$t=0\text{时},\quad x_0=0,\quad v_0=0。\qquad (1)$$

运动微分方程为

$$m\frac{dv}{dt}=\Sigma F=P-Q-R,\qquad (2)$$

即
$$\frac{9}{9.81}\frac{dv}{dt}=10.8+0.05t-1.1\times 9=$$
$$=0.9+0.05t,$$

或者
$$\frac{dv}{dt}=0.981+0.0545t。\qquad (3)$$

将上式分离变量得到