高等学校教材

概率论及数理统计

第4版　上册

中山大学　邓集贤　杨维权　司徒荣　邓永录　编著

高等教育出版社

高等学校教材

概率论及数理统计

上册

第4版

中山大学

邓集贤　杨维权　司徒荣　邓永录　编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论及数理统计. 上册/邓集贤等编著. —4版.
—北京:高等教育出版社,2009.7
ISBN 978-7-04-026629-0

Ⅰ. 概… Ⅱ. 邓… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材
②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 083471 号

策划编辑 李 蕊 责任编辑 崔梅萍 封面设计 刘晓翔
责任绘图 尹 莉 版式设计 王 莹 责任校对 胡晓琪
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	河北新华印刷一厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版 次	1980年3月第1版
开 本	850×1168 1/32		2009年7月第4版
印 张	12.25	印 次	2009年7月第1次印刷
字 数	310 000	定 价	17.40元

物料号 26629-00

内 容 简 介

本书是在中山大学统计科学系梁之舜等五人编著的《概率论及数理统计》(第三版)的基础上修订而成的,具有适应面广、便于自学的特点。本次修订删除了第五章的内容,其他各章保留原有的特点、结构和基本内容,进行了适当的修改和补充,习题也作了更新修订,使本书更适应当前的教学。全书共十二章,仍分上、下两册出版。

本书可作为综合性大学、师范院校及其他院校的数学类专业教材,也可作为其他有关专业的教材或教学参考书。

第四版说明

本书《概率论及数理统计》(上、下册)作为全国高等院校中概率统计课程的通用教材,高等教育出版社于1980年出版(1988年第二版,2005年第三版)。根据当前高等院校教学的具体情况和需要,我们对本书重新修订,作为第四版继续出版发行。本书编者讨论了第四版修订的基本原则,确定本书原有的内容、结构与特点基本保持不变,对某些章节(内容与习题)作了适当的调整、修改与补充。

概率论及数理统计是研究随机现象统计规律性及其应用的一门数学学科,它像所有其他数学学科一样有基本概念和逻辑推理的严谨性,更有应用的广泛性。我们在编写中既重视各种概念、定义、定理、公式的严谨叙述和推理,也注重对理论的直观背景的解析和实际应用的示例。

学习本书只要求微积分与高等代数的基础知识,对于偏难的有关内容,采用星号“*”或指出参考书目。本书(上、下册)共设十二章,第一章至第九章可作为概率统计课程的基本内容。不同专业可按其教学计划的要求,从本书(上、下册)中选讲有关章节内容。

本书第一、四、五、十一各章由邓集贤编写;第二、三各章由司徒荣编写;第六、七、八、九、十各章由杨维权编写;第十二章由邓永录编写。编者非常感谢多年来采用本书的广大读者的厚爱和对本书作过指导与帮助的专家学者,衷心感谢高等教育出版社的大力支持和李蕊同志的具体帮助。本书(上、下册)再版后,可能还会有许多不妥之处,恳请读者及专家批评指正。

编　者

2009年2月于广州中山大学

目　录

第一章 随机事件和概率

§1.1 随机事件的直观意义及其运算

一、必然现象与随机现象

在自然界里，在生产实践和科学试验中，人们观察到的现象大体可归结为两种类型. 一类是可事前预言的，即在准确地重复某些条件下，它的结果总是肯定的，或是根据它过去的状态，在相同条件下完全可以预言将来的发展. 我们把这一类型的现象称之为确定性现象或必然现象. 例如重物在高处总是垂直落到地面；在标准大气压(1.013×10^5 Pa)下，水在 100 ℃时会沸腾；水稻的生长从播种到收割，总是经过发芽、育秧、长叶、吐穗、扬花、结实这几个阶段；在射击时(假设空气阻力等可以忽略)弹道完全由射击的初始条件(如炮弹的初速度、发射角和弹道参数等)决定. 早期的科学就是研究这一类现象的规律性，所应用的数学工具如数学分析、几何、代数、微分方程等是大家所熟悉的. 但人们逐渐还发现另一类型的现象，它是事前不可预言的，即在相同条件下重复进行试验，每次结果未必相同；或是知道它过去的状况，在相同条件下，未来的发展事前却不能完全肯定. 这一类型的现象我们称之为偶然性现象或随机现象. 如抛掷一个质地均匀的对称的硬币，结果可能是正面向上，或背面向上；新生的婴儿可能是男或是女；在相同海况与气象条件下，某定点海面的浪高时起时伏；当空气阻力等不能忽略时，弹道不能根据初始条件完全确定，可能向不同方向作程度不同的偏移，事前不能肯定. 类似的例子还可以举出许多来.

初时人们把这种现象称为“偶然现象”是指它是“不正常的”、“出乎意料的”或者是“原因不明的”，甚至对于迅雷、疾风、陨石、

地震等认为是天降的灾难.

是不是这些偶然现象都没有什么规律性可循呢？事实上并非如此.人们通过长期的反复观察和实践,逐渐发现所谓不可预言,只是对一次或少数几次观察或实践而言,当在相同条件下进行大量观察时,偶然现象都呈现某种规律,因而也是可以预言的.例如根据各个国家各个时期的人口统计资料,新生婴儿中男婴和女婴的比例大约总是1:1.据传,在我国古代很早的时候就已经知道了这样一种结果,即新生男女婴比例大约1:1.在2000年全国第五次人口普查时,由中国国家统计局公布的数据中,新生男、女婴的比例为1.17:1.瑞典自1871至1900年共30年的统计数据中,新生男、女婴分别为135.9671万人和128.5086万人,两者的比例为1.07:1.又如人的高度虽然各不相同,但经过大量的统计,如果在一定的范围内把人的高度按所占的比例画出“直方图”,就可以近似地连成一条和钟的纵剖面一样的曲线;定点海面在一段时间内的浪高,也可以画出类似的曲线,如图1.1.1,还有更简单的例子(大家可以立刻检验的),均匀的硬币抛掷多次,正面和背面出现的次数比例总是近似1:1,而且大体上抛掷次数足够多,便足够接近这个比例.历史上蒲丰掷过4 040次,得到2 048次正面(正面出现的比率是0.506 9).皮尔逊掷了24 000次,得到12 012次正面(正面出现的比率为0.500 5).

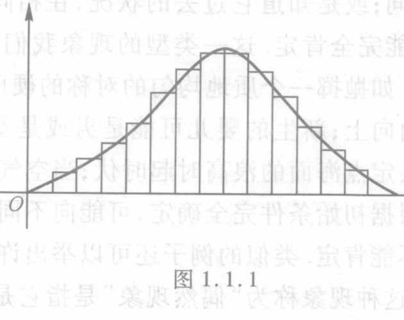

图1.1.1

从上面的叙述中我们看到，自然界中存在着具有如下特性的现象：在一定的条件组实现时，有多种可能的结果发生，事前人们不能预言将出现哪种结果，但大量重复观察时，所得的结果却呈现某种规律，称为随机现象的统计规律性.

正如恩格斯所说："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律."（《马克思恩格斯选集》中译本第四卷243页）.

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

根据马克思、恩格斯的论述，必然性与偶然性是对立统一的概念，偶然性不能理解为"碰巧的"，（为了避免这种误解，人们往往把它称为"随机性"）它蕴含内在必然性的规律；反过来，被断定为必然的东西，是由纯粹的偶然性构成的.

例 1.1.1 研究气体的性质知道，由于气体是由数目众多的分子构成，这些分子以很快的速度进行剧烈的运动，在运动的过程中相互碰撞而改变其动量和方向，因而每个分子的运动是随机现象. 而大量的分子运动呈现出的总体现象——温度、压强却满足玻意耳定律.

曾经有人认为，之所以会出现事前不可预言的偶然现象，是因为我们对一个现象出现的原因还缺乏全面足够的知识，认为随着科学的发展和人类认识的深化，总有一天将不再存在不可预言的随机现象.

诚然，增加条件组的条件来减少随机性是可能的. 例如，人的高度按不同的年龄、地区、性别是有差异的，若限定在同一地区，在一定年龄范围内选取同性别的人来测量高度，可能会得到比一般任意选取时有较均匀的结果，但随机因素的影响总是不可避免的. 很多现象初始条件的稍微改变，其产生的后果却差别很大. 在实际中即使人们有可能把条件组的条件绝对控制到每次都一样，但影响的因素还是大量的，且互相作用错综复杂. 例如在例 1.1.1 关于

气体分子运动的例子中,即使我们把 1 cm^3 气体的 2.683×10^{18} 个分子的运动方程和初始条件都列出来,且不说我们要求出这组联立方程的解也是很困难的,更应注意这里在建立方程和确定初始条件时已是忽略了许多次要的,但往往是随机的因素.

因此,偶然性现象是客观存在的,那种否认偶然现象的想法,是“力图用根本否认偶然性的办法来对付偶然性”(恩格斯《自然辩证法》中译本196页).

二、随机试验与事件

为了叙述方便,我们把对某种自然现象作一次观察或进行一次科学试验,统称为一个试验.如果这个试验“在相同条件下可以重复进行”,而且每次试验的结果事前不可预言,但却呈现前面所述的统计规律性,我们就称它为一个随机试验.

下面,我们所说的试验都是指随机试验.

进行一个试验总有一个观察的目的,试验中会观察到有多种不同的可能结果.例如抛掷一个质地均匀的硬币,我们的目的是要观察它哪一面朝上,这里只有两种不同的结果:“正面”或“背面”,至于硬币落在桌面上哪一个位置,朝哪个方向滚动等不在目的之列,我们不算作结果.

试验的每一个可能结果称为随机事件,简称为事件,我们用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

例 1.1.2 在 $0,1,2,\cdots,9$ 十个数字中任意选取一个,可能有十种不同的结果:“取得一个数是0”,…,“取得一个数是9”.但还有其他可能结果:“取得一个是奇数”,“取得一个是大于4的数”,“取得一个数是3的倍数”,等等.

我们把不可能再分的事件称为基本事件.例如在例1.1.2中,“取得一个数是0”,“取得一个数是1”,…,“取得一个数是9”都是基本事件.由若干基本事件组合而成的事件称为复合事件.例如“取得一个数为3的倍数”是一个复合事件,它由“取得一个数是3”,“取得一个数是6”,“取得一个数是9”三个基本事件组合

而成.

一个事件是否称为基本事件是相对于试验的目的来说的. 例如量度人的身高(单位: m), 一般说, 区间(0,4)中的任一实数, 都可以是一个基本事件, 这时, 基本事件有无穷个; 但如果量度高度是为了了解乘车是否需要买全票、半票或免票, 这时就只有三个基本事件了.

三、事件的关系与运算

进行一个试验, 有这样或那样的事件发生, 它们各有不同的特性, 彼此之间又有一定的联系. 下面我们引进事件之间的一些重要关系和运算, 这将有利于今后对事件和它的概率的叙述和研究.

1. 在一定条件组下必然发生的事件称为必然事件. 在一定条件组下必然不发生的事件称为不可能事件. 必然事件用符号 Ω 表示, 不可能事件用符号 $\varnothing$ 表示. 把必然事件和不可能事件也算作随机事件, 这对我们讨论问题是方便的.

例如, 就目前世界上人的高度来说"人的高度小于 4 m"是必然事件, 而"人的高度大于 4 m"则是不可能事件.

2. 如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生, 则称事件 A 与 B 互不相容. 例如必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 是互不相容的, 又例如在例 1.1.2 中"取得一个数是 0"和"取得一个数是 1"是互不相容的.

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的任意两个事件是互不相容的, 则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容.

3. 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 则称事件 A 含于事件 B, 或称事件 B 包含事件 A, 有人称为 A 是 B 的特款. 并记为 $A \subset B$. 如例 1.1.2 中, 令 A 表示"取得一数为 4 的倍数", B 表示"取得一数为偶然", 则 $A \subset B$. 又如对任一事件 A, 有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

$A \subset B$ 的一个等价说法是, 如果事件 B 不发生则事件 A 必然不发生.

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B 相等(或等价), 记为 $A = B$. 如

在例 1.1.2 中，令 A 表示“取得一数为 2”，用 B 表示“由方程 $x-1=1$ 确定的数”，则有 $A=B$.

4. 如 C 表示“事件 A 与 B 中至少有一个发生”这一事件，称它为 A 与 B 的和（或并），记为 $C=A\cup B$. 如在例1.1.2 中，令 A 表示“取出一数为偶数”①，B 表示“取得一数大于 5”，则 $C=A\cup B$ 表示“取得一数或者大于 5，或者是偶数”，即等价于“取出一数为 0，2，4，6，7，8，9 中之一数”.

5. 如 D 表示“事件 A 与 B 同时发生”这一事件，称它为 A 与 B 的积（或交），记为 $D=A\cap B$. 用上例，则 D 表示“取得一数为 6 或 8”.

由事件积的定义，立即得到：

（1）对任一事件 A，有 $A\cap\Omega=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；

（2）若 A_1，A_2 互不相容，则 $A_1\cap A_2=\varnothing$.

6. 如 E 表示“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件，则称 E 为 A 与 B 之差，记为 $E=A-B$. 用前例，$E=A-B$ 表示“取得一个数为 0，2，4 中之一数”.

由二事件之差的定义立即得到：对任意事件 A 有

$$A-A=\varnothing;\ A-\varnothing=A;$$
$$A-\Omega=\varnothing.$$

7. Ω 与 A 之差 $\Omega-A$ 这一事件称为 A 的逆事件，记为 $\bar{A}$，它表示“A 不发生”这一事件. 在例 1.1.2 中，令 A 表示“取出一数为偶数”，$\bar{A}$ 表示“取出一数为奇数”.

事件的和与事件的积都可以推广到有穷多个事件，即

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生”这一事件.

---

① 为方便起见，以后均把数 0 算作偶数.

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i$ 表示“$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 同时发生”这一事件.

我们有时需要考虑可列无穷多个事件,需要把事件的和与积推广到可列无穷多个的情形,即考虑

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ 与 } B=\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i,$$

记号 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示“可列无穷多个事件 A_i 中至少有一个发生”,而 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ 表示“可列无穷多个事件 B_i 同时发生”.

为了说明这一需要,现举一例:一人进行股票投资,直到成功赚得一百万元为止,若 A 表示投资成功,A_i 表示直到第 i 次才成功,则显然有

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

为方便起见用 $\bigcup\limits_{i}$ 和 $\bigcap\limits_{i}$ 表示有穷或可列无穷个事件的和与积.

可以验证一般事件的运算满足如下关系:

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3) 分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

分配律可以推广到有穷或可列无穷的情形,即

$$A\cap\left(\bigcup_{i} A_i\right)=\bigcup_{i}(A\cap A_i),$$

$$A\cup\left(\bigcap_{i} A_i\right)=\bigcap_{i}(A\cup A_i);$$

(4) $A-B=A\cap\overline{B}$;

(5) 对有穷个或可列无穷个 A_i,恒有

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A}_i, \quad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A}_i.$$

四、用集合与几何图形表示事件，样本空间

对于事件及其运算，如果应用点集的概念和几何图示法，则较直观而易于理解.

联系于每一随机试验的每一基本事件，用一个只包含一个元素 ω 的单点集 $\{\omega\}$ 表示，由若干基本事件组成的复合事件，则用包含若干个元素的集合表示，由所有基本事件对应的全部元素组成的集合. 给它一个特殊的名称，称为样本空间. 由于任一随机试验的结果必然出现全部基本事件之一，这样，样本空间作为一个事件是必然事件. 样本空间仍以 Ω 表示. 我们称样本空间中的每一个元素为样本点. 这样一来，集合论的知识（参阅附录Ⅱ）就可以用来解释事件和事件的运算.

我们把它们的术语对照列表（表 1.1.1）如下.

表 1.1.1

符　号	集　合　论	概　率　论
Ω	空　间	样本空间；必然事件
$\varnothing$	空　集	不可能事件
$\omega \in \Omega$	Ω 中的点（或称元素）	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A \subset \Omega$	Ω 的子集 A	事件 A
$A \subset B$	集合 A 包含在集合 B 中	事件 A 含于事件 B
$A = B$	集合 A 与 B 相等（或等价）	事件 A 与 B 相等（或等价）
$A \cup B$	集合 A 与 B 之和（或并）	事件 A 与 B 至少有一个发生（事件 A 与 B 之和或并）
$A \cap B$	集合 A 与 B 之交	事件 A 与 B 同时发生（事件 A 与 B 之积或交）

续表

符　号	集　合　论	概　率　论
$\overline{A}$	集合 A 之余集	事件 A 的逆事件
$A-B$	集合 A 与 B 之差	事件 A 发生而事件 B 不发生(事件 A 与 B 之差)
$A\cap B=\varnothing$	集合 A 与 B 没有公共元素	事件 A 与 B 互不相容

如果以平面上的某一矩形表示样本空间,矩形内的每一点表示样本点,则事件的运算可通过平面上的几何图形表示. 如果用两个小圆形表示事件 A 和 B,如图 1.1.2 所示,阴影部分表示事件 A 与 B 的各种关系及运算.

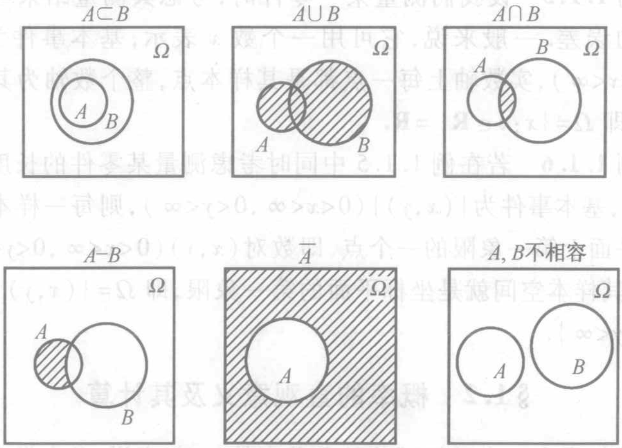

图 1.1.2 （$A\cup B,A\cap B,A-B,\overline{A}$ 分别为图中阴影部分）

上面说过样本空间是由所有代表基本事件的样本点构成,而基本事件则直接联系于每个随机试验,下面举一些例子说明:

如在例 1.1.2 中样本点是 $\omega_1=0,\omega_2=1,\cdots,\omega_{10}=9$;

基本事件为 $\{\omega_i\}(i=1,2,\cdots,10)$;