



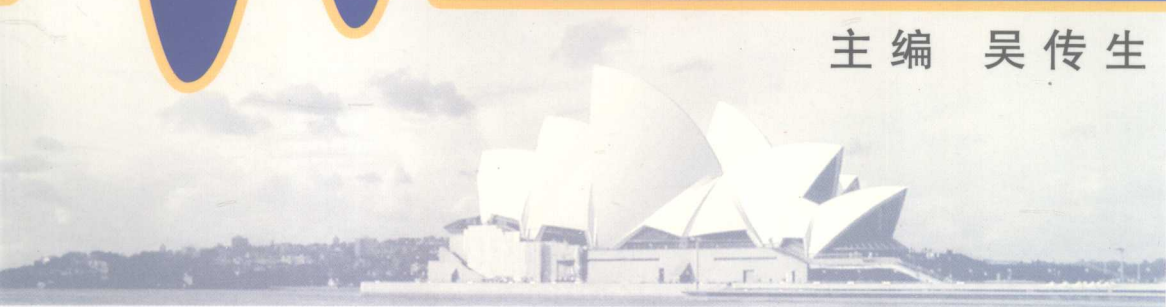
普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

经济数学 ——微积分

(第二版)

学习辅导与习题选解

主 编 吴传生



高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

经济数学——微积分 (第二版)

学习辅导与习题选解

主编 吴传生

编者 吴传生 陈盛双 何 朗 陈东红
韩 华 万 源 朱慧颖

高等教育出版社

内容提要

本书是与吴传生主编的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《经济数学——微积分》(第二版)相配套的学习辅导教材,主要面向使用该教材的教师和学生,同时也可供报考经济管理类专业研究生的学生作复习之用。

本书的内容按章编写,每章包括教学基本要求、典型方法与范例、习题选解三个部分,基本与教材同步。典型方法与范例部分是本书的重心所在,它是教师上习题课和学生自学的极好的材料。通过对内容和方法进行归纳总结,把基本理论、基本方法、解题技巧、释疑解难、数学应用等多方面的教学要求,融于典型方法与范例之中,注重对教材的内容作适当的扩展和延伸,注重数学与经济应用有机结合。习题选解部分选出了教材中一部分习题作了习题解法提要,对一些富有启发性的习题,给出了较详细的分析和解答。

本书内容丰富,思路清晰,例题典型,注重分析解题思路,揭示解题规律,引导读者思考问题,有利于培养和提高学生的学习兴趣以及分析问题和解决问题的能力。它是经济管理类专业学生学习微积分课程的一部很好的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学·微积分(第二版)学习辅导与习题选解/
吴传生主编. —北京:高等教育出版社,2009.4
ISBN 978-7-04-026483-8

I. 经… II. 吴… III. ①经济数学-高等学校-教学参
考资料②微积分-高等学校-教学参考资料 IV. F224.0
O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第041065号

策划编辑	马丽	责任编辑	崔梅萍	封面设计	张申申
责任绘图	郝林	版式设计	张岚	责任校对	杨雪莲
责任印制	朱学忠				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	河北新华印刷一厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2009年4月第1版
印 张	23	印 次	2009年4月第1次印刷
字 数	430 000	定 价	27.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 26483-00

前 言

本书是与吴传生主编的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《经济数学——微积分》(第二版)相配套的学习辅导教材,主要面向使用该教材的教师和学生,同时也可供报考经济管理类专业研究生的学生作复习之用。

近几年来,我国的高等教育已经完成了从精英教育向大众化教育的转变,教育界和社会各方面对高等教育的质量十分关注。我们编写该配套教材,主要是为了适应这种变化的形势,一方面满足广大学生学习微积分课程的需要,期望对保证和提高微积分课程的教学质量,对广大学生掌握教学基本要求起到一种辅导作用;另一方面也是为了满足不同层次的学习需要,利用辅导教材这一比较灵活的形式,对教材的内容作适当的扩展和延伸,对在大众化教育的形势下如何培养具有创新精神的优秀人才的问题作有益的探讨。

本书的内容按章编写,基本与教材的章节同步。每章包括教学基本要求、典型方法与范例、习题选解三个部分。

教学基本要求部分主要是根据教育部数学基础课程教学指导委员会制定的经济管理类本科生微积分课程的教学基本要求确定,同时也根据教学实际作了适当的修改。沿用惯例,按“理解”、“了解”或“掌握”、“会”的次序表示程度上的差异。

典型方法与范例部分是本书的重心所在,它是教师上习题课和学生自学的极好的辅导材料。其特色是:对内容和方法进行归纳总结,力图把基本理论、基本方法、解题技巧、释疑解难、数学应用等多方面的教学要求,融于典型方法与范例之中。范例具有典型性、示范性,有助于读者举一反三;范例的选取注重数学与实际应用(尤其是经济应用)相结合,注重对教材的内容作适当的扩展和延伸。有些扩展内容用*号标明。范例中注重分析解题思路,揭示解题规律,引导读者思考问题,培养读者的理性思维能力以及分析问题和解决问题的能力。大多数例题加以分析和评注,以开拓思路。

习题选解部分选出了教材中一部分习题作了习题解法提要,每章的总习题是为了学有余力的学生和准备报考研究生的学生的需要而编写的,它们大多数是一些富有启发性的习题,书中给出了较详细的分析和解答。需要指出的是,我们希望读者认真学习课程的基本内容,先自行思考,自己解题,再与题解进行对照、比较,达到对问题的更深刻和更透彻的理解的目的。如果不动脑筋独立思考,不亲自动手做题,而是照抄,那是绝对无益的。

本书由吴传生主编,参加第一版编写的有:吴传生,陈盛双,何朗,陈东红,韩华,万源,朱慧颖。第二版的修订工作主要由吴传生完成。

本书在编写过程中,参考了众多的国内外教材;高等教育出版社的领导和编辑们对本书的编审和出版给予了热情支持和帮助,尤其是李艳馥、马丽和崔梅萍等老师在本书的编辑和出版过程中付出了大量心血。在此一并致谢!

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正!

编 者

2008.12

目 录

第一章 函数	1
I. 教学基本要求	1
II. 典型方法与范例	1
一、求抽象函数的表达式	1
二、讨论函数的基本性态	3
三、函数关系的建立	4
III. 习题选解	6
习题 1-2 映射与函数	6
习题 1-3 复合函数与反函数 初等函数	8
习题 1-4 函数关系的建立	10
习题 1-5 经济学中的常用函数	12
总习题一	15
第二章 极限与连续	18
I. 教学基本要求	18
II. 典型方法与范例	18
一、求极限的基本方法	18
二、无穷小的比较	22
三、求分段函数的极限	22
四、含参数的函数的极限	23
五、极限的定义及其应用	24
六、连续性的判定	25
七、求函数的连续区间、间断点、判别间断点的类型	26
八、利用函数的连续性定参数	27
九、利用函数的连续性求极限	28
十、闭区间上连续函数的性质的简单应用	28
III. 习题选解	29
习题 2-1 数列的极限	29
习题 2-2 函数极限	30
习题 2-3 无穷小与无穷大	32
习题 2-4 极限运算法则	33

习题 2-5 极限存在准则 两个重要极限 连续复利	35
习题 2-6 无穷小的比较	38
习题 2-7 函数的连续性	39
习题 2-8 闭区间上连续函数的性质	41
总习题二	42
第三章 导数、微分、边际与弹性	47
I. 教学基本要求	47
II. 典型方法与范例	47
一、导数的概念	47
二、导数与微分的计算	53
三、边际、弹性及简单的经济应用	58
III. 习题选解	61
习题 3-1 导数概念	61
习题 3-2 求导法则与基本初等函数求导公式	64
习题 3-3 高阶导数	67
习题 3-4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	70
习题 3-5 函数的微分	73
习题 3-6 边际与弹性	76
总习题三	80
第四章 中值定理及导数的应用	85
I. 教学基本要求	85
II. 典型方法与范例	85
一、中值定理	85
二、洛必达法则与泰勒公式	92
三、导数的应用	98
III. 习题选解	106
习题 4-1 中值定理	106
习题 4-2 洛必达法则	108
习题 4-3 导数的应用	109
习题 4-4 函数的最大值和最小值及其在经济中的应用	115
习题 4-5 泰勒公式	117
总习题四	119
第五章 不定积分	123
I. 教学基本要求	123
II. 典型方法与范例	123

一、直接积分法	123
二、换元积分法	124
三、分部积分法	127
四、综合举例	130
III. 习题选解	131
习题 5-1 不定积分的概念、性质	131
习题 5-2 换元积分法	133
习题 5-3 分部积分法	139
习题 5-4 有理函数的积分	143
总习题五	146
第六章 定积分及其应用	154
I. 教学基本要求	154
II. 典型方法与范例	154
一、利用定积分的定义求某些数列的极限及计算简单的定积分	154
二、积分中值定理的应用	155
三、积分上限函数及其应用	156
四、定积分计算的基本方法	159
五、定积分的换元法	161
六、定积分的分部积分法	162
七、特殊函数的定积分	162
八、反常积分的计算	163
九、定积分的应用	164
III. 习题选解	169
习题 6-1 定积分的概念	169
习题 6-2 定积分的性质	171
习题 6-3 微积分的基本公式	173
习题 6-4 定积分的换元积分法	175
习题 6-5 定积分的分部积分法	177
习题 6-6 反常积分	179
习题 6-7 定积分的几何应用	181
习题 6-8 定积分的经济应用	185
总习题六	186
第七章 向量代数与空间解析几何	193
I. 教学基本要求	193
II. 典型方法与范例	193

一、求曲面方程的方法	193
二、空间曲线	196
三、空间立体	197
* 四、向量的概念及运算	198
* 五、求平面方程的方法	200
* 六、求直线方程的方法	202
* 七、求距离的方法	203
III. 习题选解	205
习题 7-2 柱面与旋转曲面	205
习题 7-3 空间曲线及其在坐标面上的投影	206
习题 7-4 二次曲面	206
* 习题 7-5 向量及其线性运算	206
* 习题 7-6 数量积 向量积	207
* 习题 7-7 平面与直线	208
总习题七	210
第八章 多元函数微分学	217
I. 教学基本要求	217
II. 典型方法与范例	217
一、偏导数及高阶偏导数的计算	217
二、全微分的计算及应用	218
三、复合函数求偏导数	220
四、隐函数求偏导数	222
五、变量代换	225
六、多元函数微分学的经济应用	226
III. 习题选解	229
习题 8-1 多元函数的基本概念	229
习题 8-2 偏导数及其在经济分析中的应用	230
习题 8-3 全微分及其应用	231
习题 8-4 多元复合函数的求导法则	232
习题 8-5 隐函数的求导公式	233
习题 8-6 多元函数的极值及其应用	234
总习题八	239
第九章 二重积分	244
I. 教学基本要求	244
II. 典型方法与范例	244

一、利用性质计算或估计二重积分的值	244
二、利用直角坐标计算二重积分	245
三、利用极坐标计算二重积分	250
四、反常二重积分	252
五、二重积分的应用	254
六、有关二重积分的证明	256
III. 习题选解	257
习题 9-1 二重积分的概念和性质	257
习题 9-2 二重积分的计算	259
总习题九	271
第十章 微分方程与差分方程	276
I. 教学基本要求	276
II. 典型方法与范例	276
一、微分方程的基本概念	276
二、一阶微分方程求解	277
三、一阶微分方程的经济应用举例	280
四、可降阶的高阶微分方程	283
五、二阶线性微分方程	285
六、差分方程的求解	288
七、差分方程的应用	292
III. 习题选解	296
习题 10-1 微分方程的基本概念	296
习题 10-2 一阶微分方程	296
习题 10-3 一阶微分方程在经济学中的综合应用	300
习题 10-4 可降阶的微分方程	304
习题 10-5 二阶常系数线性微分方程	307
习题 10-6 差分方程的概念 常系数线性差分方程解的结构	311
习题 10-7 一阶常系数线性差分方程	313
习题 10-8 二阶常系数线性差分方程	314
习题 10-9 差分方程的简单经济应用	316
总习题十	318
第十一章 无穷级数	326
I. 教学基本要求	326
II. 典型方法与范例	326
一、判别级数敛散性的一般方法	326

二、正项级数审敛法	328
三、任意项级数敛散性的判别	329
四、幂级数收敛半径与收敛域的求法	332
五、幂级数在收敛区间内和函数的求法	335
六、函数展开为幂级数	337
III. 习题选解	340
习题 11-1 常数项级数的概念和性质	340
习题 11-2 正项级数及其审敛法	342
习题 11-3 任意项级数的绝对收敛与条件收敛	344
习题 11-4 泰勒级数与幂级数	346
习题 11-5 函数的幂级数展开式的应用	351
总习题十一	352

第一章

函 数



I. 教学基本要求

1. 理解函数概念,掌握函数的表示法;
2. 理解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;
3. 理解复合函数和分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念;
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念;
5. 会建立简单应用问题中的函数关系;
6. 了解经济学中的常用函数.



II. 典型方法与范例

一、求抽象函数的表达式

例 1 (1) 设 $f(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x, 0 < x < 1$, 求 $f(x)$.

(2) 设 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x} (x \neq 0, a^2 \neq b^2)$, 求 $f(x)$.

解 (1)
$$f(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x},$$

令 $\sin^2 x = t$, 则 $0 < t < \sin^2 1$,

$$f(t) = 1 - 2t + \frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t} - 2t,$$

即 $f(x) = \frac{1}{1-x} - 2x, 0 < x < \sin^2 1$.

(2) 令 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$af\left(\frac{1}{t}\right) + bf(t) = ct.$$

①

令 $x = t$, 则

$$af(t) + bf\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{c}{t}. \quad (2)$$

由①, ②解得

$$f(t) = \frac{c}{b^2 - a^2} \left(bt - \frac{a}{t} \right),$$

故

$$f(x) = \frac{c}{b^2 - a^2} \left(bx - \frac{a}{x} \right).$$

例 2 $f(\ln|x|) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $\varphi(x)$ 的定义域为 $x < 0$, 且 $f[\varphi(x)] = e^x$, 求 $\varphi(x)$.

分析 由 $f(\ln|x|) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ 可求出 $f(x)$ 的表达式, 再由方程 $f[\varphi(x)] = e^x$ 可求出 $\varphi(x)$.

解 令 $u = \ln|x|$, $x^2 = e^{2u}$, 因此

$$f(u) = \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1}.$$

由于 $f[\varphi(x)] = e^x$, 从而得到关于 $\varphi(x)$ 的方程

$$\frac{e^{2\varphi(x)} - 1}{e^{2\varphi(x)} + 1} = e^x,$$

令 $t = e^{\varphi(x)}$, 得到方程

$$\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = e^x,$$

由此可求得 $t^2 = \frac{e^x + 1}{1 - e^x}$, 因为 $x < 0$, 且由 $t = e^{\varphi(x)} > 0$ 可得

$$e^{2\varphi(x)} = \frac{e^x + 1}{1 - e^x}, x < 0,$$

两边取对数得 $\varphi(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{e^x + 1}{1 - e^x}, x < 0$.

例 3 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, $\varphi(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

分析 对于分段函数的复合要注意自变量的变化范围, 弄清在不同分段内的复合过程.

解 (i) 当 $x < 0$ 时, $\varphi(x) = x$, 则

$$f[\varphi(x)] = f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) = \frac{1}{2}(x - x) = 0;$$

(ii) 当 $x \geq 0$ 时, $\varphi(x) = x^2$, 则

$$f[\varphi(x)] = f(x^2) = \frac{1}{2}(x^2 + x^2) = x^2.$$

故

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

二、讨论函数的基本性态

例 4 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

分析 本题只需利用单调性的定义和函数奇偶性的定义即可得证.

证 对于任意的 $x_1, x_2 \in (-l, 0)$, 设 $x_1 < x_2$, 则 $0 < -x_2 < -x_1 < l$. 因为 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 而 $0 < -x_2 < -x_1 < l$, 所以 $f(-x_2) < f(-x_1)$. 而 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内为奇函数, 所以 $-f(x_2) < -f(x_1)$, 有 $f(x_2) > f(x_1)$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 故 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内单调增加.

例 5 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, $f(1) = a$, 且对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 有

$$f(x+2) - f(x) = f(2).$$

(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$;

(2) 问 a 取何值时, $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

分析 (1) 充分利用恒等式 $f(x+2) - f(x) = f(2)$ 对于任意 x 都成立的条件, 分别取 $x = -1, 1, 3$, 再利用 $f(x)$ 是奇函数即可求得 $f(2)$ 及 $f(5)$.

(2) 利用(1)中的结果, 再根据周期函数的定义可求出 a 值.

解 (1) 在 $f(x+2) - f(x) = f(2)$ (*)

中, 令 $x = -1$, 则 $f(1) - f(-1) = f(2)$, 而 $f(x)$ 为奇函数, 故

$$f(2) = f(1) - [-f(1)] = 2f(1) = 2a.$$

在 (*) 中, 令 $x = 1$, 则 $f(3) - f(1) = f(2)$, 故

$$f(3) = f(1) + f(2) = 3f(1) = 3a.$$

在 (*) 中, 令 $x = 3$, 则 $f(5) - f(3) = f(2)$, 故

$$f(5) = f(3) + f(2) = 3a + 2a = 5a.$$

(2) 令 $f(2) = 0$, 即 $2a = 0, a = 0$ 时 $f(x+2) = f(x)$, 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都成立. 故当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

例 6 求函数 $y = \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}$ 的值域, 并说明它是否为有界函数.

分析 由 $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$, 利用 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 可得

$$x^2 + 2x + 2 \geq 2(x+1).$$

解 因为 $\left| \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2} \right| = \frac{2|x+1|}{(x+1)^2+1} \leq 1$,

所以

$$-\frac{3}{2} \leq \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2},$$

故 $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 为所给函数的值域, 由此知 $y = \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}$ 为有界函数.

三、函数关系的建立

例 7 按照银行规定,某种外币一年期存款的年利率为 4.2%,半年期存款的年利率为 4.0%,每笔存款到期后,银行自动将其转存为同样期限的存款,设将总数为 A 单位货币的该种外币存入银行,两年后取出,问存何种期限的存款能有较多的收益,多多少?

分析 这是一个固定存款利滚利问题,即复利问题,只需弄清这笔存款经历了多少个存款周期即可.

解 (i) 设货币存一年期,则一年后货币总数为 $A(1+4.2\%)$,
两年后货币总数:

$$A(1+4.2\%)(1+4.2\%) = A(1+4.2\%)^2 = 1.085\,764A.$$

(ii) 设货币存半年期,则半年期存款利率为 2.0%,

半年后货币总数: $A(1+2.0\%)$,

一年后货币总数: $A(1+2.0\%)(1+2.0\%) = A(1+2.0\%)^2$,

一年半后货币总数: $A(1+2.0\%)^2(1+2.0\%) = A(1+2.0\%)^3$,

两年后货币总数:

$$A(1+2.0\%)^3(1+2.0\%) = A(1+2.0\%)^4 = 1.082\,432A,$$

比较(i),(ii)知货币存一年期有较多收益,多 0.003 332A.

例 8 某厂生产的手掌游戏机每台可卖 110 元,固定成本为 7 500 元,可变成本为每台 60 元.

(1) 要卖多少台手手机,厂家才可保本(收回投资);

(2) 卖掉 100 台的话,厂家赢利或亏损了多少?

(3) 要获得 1 250 元利润,需要卖多少台?

分析 总成本 = 固定成本 + 可变成本,

总收益 = 总产量 $\times$ 价格,

总利润 = 总收益 - 总成本.

解 (1) 设厂家生产的台数为 x ,则总成本 $C(x) = 7\,500 + 60x$,总收益 $R(x) = 110x$,令 $R(x) = C(x)$, $110x = 7\,500 + 60x$,解得 $x = 150$,故要卖 150 台,厂家才可保本.

(2) $C(100) = 7\,500 + 60 \times 100 = 13\,500$, $R(100) = 11\,000$,

$$C(100) - R(100) = 2\,500.$$

故卖掉 100 台的话,厂家亏损 2 500 元.

(3) $L(x) = R(x) - C(x) = 110x - 7\,500 - 60x = 50x - 7\,500$,

令 $L(x) = 1\,250$,则 $50x - 7\,500 = 1\,250$,解得 $x = 175$.故要获得 1 250 元利润,需卖 175 台.

例 9 收音机每台售价为 90 元,成本为 60 元,厂方为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过 100 台以上的,每多订购 100 台售价就降低 1 元,(即每多订购 1 台就降价 0.01 元)但最低价为每台 75 元:

(1) 将每台的实际售价 P 表示为订购量 x 的函数;

(2) 将厂方所获的利润 L 表示成订购量 x 的函数;

(3) 某一商行订购了 1 000 台,厂方可获利润多少?

分析 因销售价格按不同的订购量而定,故销售收入、销售利润与订购量是分段函数的关系.

解 (1) (i) 当 $0 \leq x < 100$ 时, $P = 90$.

(ii) 当 $x \geq 100$ 时,由题意, P 是 x 的一次函数.

设 $P(x) = ax + b$, 当 $x = 100$ 时, $P = 90$, 当 $x = 200$ 时, $P = 89$, 故

$$\begin{cases} 90 = 100a + b, \\ 89 = 200a + b, \end{cases}$$

解得 $a = -0.01$, $b = 91$, 故 $P(x) = 91 - 0.01x$. 但 $P \geq 75$, 故 $91 - 0.01x \geq 75$, 即 $x \leq 1\,600$. 故当 $100 \leq x \leq 1\,600$ 时,

$$P(x) = 91 - 0.01x.$$

(iii) 当 $x > 1\,600$ 时, $P = 75$, 故

$$P = \begin{cases} 90, & 0 \leq x < 100, \\ 91 - 0.01x, & 100 \leq x \leq 1\,600, \\ 75, & x > 1\,600. \end{cases}$$

(2) (i) 当 $0 \leq x < 100$ 时, $P = 90$, 收益 $R(x) = xP(x) = 90x$, 成本 $C(x) = 60x$, 故利润

$$L(x) = R(x) - C(x) = 90x - 60x = 30x.$$

(ii) 当 $100 \leq x \leq 1\,600$ 时, $P(x) = 91 - 0.01x$, 收益 $R(x) = (91 - 0.01x)x$, 成本 $C(x) = 60x$, 故利润

$$L(x) = R(x) - C(x) = (91 - 0.01x)x - 60x = (31 - 0.01x)x.$$

(iii) 当 $x > 1\,600$ 时, $P = 75$, 收益 $R(x) = 75x$, 成本 $C(x) = 60x$, 故利润

$$L(x) = R(x) - C(x) = 75x - 60x = 15x.$$

故利润

$$L = \begin{cases} 30x, & 0 \leq x < 100, \\ (31 - 0.01x)x, & 100 \leq x \leq 1\,600, \\ 15x, & x > 1\,600. \end{cases}$$

(3) 当 $x = 1\,000$ 时,

$$L = (31 - 0.01 \times 1\,000) \times 1\,000 = 21\,000,$$

故厂方可获 21 000 元的利润.

例 10 (1) 已知鸡蛋的收购价为每千克 5 元时, 每月能收购 5 000 kg; 若收购价每千克提高 0.1 元, 则每月收购量可增加 500 kg. 求鸡蛋的线性供给函数.

(2) 已知鸡蛋的销售价为每千克 8 元时, 每月能销售 5 000 kg; 若销售价每千克降低 0.5 元, 则每月销售量可增加 800 kg. 求鸡蛋的线性需求函数.

(3) 求鸡蛋的均衡价格 P_e 和均衡数量 Q_e .

解 (1) 设鸡蛋的线性供给函数为

$$Q_s = -c + dP,$$

其中 Q_s 为收购量(即供给量), P 为收购价格. 由题设有

$$\begin{cases} 5\,000 = -c + 5d, \\ (5\,000 + 500) = -c + (5 + 0.1)d, \end{cases}$$

由此解得 $d = 5\,000$, $c = 20\,000$. 于是, 所求鸡蛋的线性供给函数为

$$Q_s = -20\,000 + 5\,000P.$$

(2) 设鸡蛋的线性需求函数为

$$Q_d = a - bP,$$

其中 Q_d 为需求量, P 为销售价格. 由题设有

$$\begin{cases} 5\,000 = a - 8b, \\ (5\,000 + 800) = a - (8 - 0.5)b, \end{cases}$$

由此解得 $b = 1\,000$, $a = 13\,000$. 于是, 所求鸡蛋的线性需求函数为

$$Q_d = 13\,000 - 1\,000P.$$

(3) 由供需均衡条件 $Q_d = Q_s$, 有

$$13\,000 - 1\,000P = -20\,000 + 5\,000P,$$

由此解得均衡价格为

$$P_e = \frac{33}{6} = 5.5 (\text{元/千克}),$$

相应的均衡数量为

$$Q_e = 7\,500 (\text{kg}).$$

总结 要解决实际问题, 首先要根据实际问题建立各种变量之间的函数关系式, 在建立函数关系式时, 要理解题意, 设出自变量和因变量, 从问题中找出变量间的关系, 这种关系用解析式或方程表示出来, 就是所要建立的函数关系式, 其方法与中学数学课程中所学的方法类似.



III. 习题选解

习题 1-2 映射与函数

1. 下面对应关系是否为映射? $X = \{\text{平面上一切三角形}\}$, $Y = \{\text{平面上全}$