

SHUXUE

主编 蔡小雄

全国高中数学联赛

预测卷

4



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

圖書 (T) 目錄與序言

全国高中数学联赛 预测卷

· 全国高中数学联赛命题研究中心编著 ·

主 编	蔡小雄
编 委	王慧兴 王希年 李惟峰
	吴国建 沈虎跃 范东晖
	胡克元 孟方明 赵 洋
	黄民才 谢建伟 翁利帅
	魏晔翔 赵诗杰 史宏建



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

全国高中数学联赛预测卷 / 蔡小雄主编. —杭州:浙江
大学出版社, 2009. 7

ISBN 978-7-308-06901-4

I. 全... II. 蔡... III. 数学课—高中—习题 IV.
G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 116428 号

全国高中数学联赛预测卷
蔡小雄 主编

责任编辑 沈国明

文字编辑 吴慧

出版发行 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 浙江大学出版社电脑排版中心

印 刷 富阳市育才印刷有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 19.75

字 数 446 千

版 印 次 2009 年 7 月第 1 版 2009 年 8 月第 2 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-06901-4

定 价 28.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88925591

前　　言

“奥林匹克”这一响亮的名字，曾让多少有竞争意识的人为之热血沸腾，心潮澎湃。中学生数学奥林匹克竞赛也是如此。从 1894 年匈牙利揭开现代中学生数学竞赛的序幕，一百多年来，数学竞赛吸引了世界各地无数数学爱好者积极参与。

虽然不是每位参加数学竞赛的人都有机会获得国际金牌，也不是每个人都能通过竞赛取得保送大学的资格，但是参加“奥赛”的过程中所培养起来的数学思维能力和数学素养，以及“奥赛”中渗透的现代数学前沿知识与创新的思维方式，对日常学习与生活都有重要的指导意义。正如数学前辈所言：“数学不仅具有真理，而且具有至高无上的美，人们在数学的王国里将找到真正意义上的快乐。”“数学能使你的思想正确、敏捷。有了正确、敏捷的思想，你才有可能爬上科学的大山。”

“全国高中数学联赛”（始于 1981 年）是教育部批准，由中国科协主管，中国数学会普及工作委员会主办，国内影响最大的一项中学生学科竞赛。

2009 年 1 月，中国数学会普及工作委员会在海南召开会议，对全国高中数学联赛的考查方式及考查要求作了调整，进一步加强联赛第二试的内容。

本书根据联赛改革新要求，针对全国联赛新题型，组织竞赛一线的老师和专家，精心编排了 38 份试卷，并作了详解，供学生赛前训练之用。

但由于时间匆促，难免有一些疏漏，敬请各位读者指正。

(VII)	(十三)卷加真奇壁脑髓脊髓学段中高固全
(VI)	(十二)卷加真奇壁脑髓脊髓学段中高固全
(V)	(十一)卷加真奇壁脑髓脊髓学段中高固全
(IV)	(十)卷加真奇壁脑髓脊髓学段中高固全
(III)	(九)卷加真奇壁脑髓脊髓学段中高固全
(II)	(八)卷加真奇壁脑髓脊髓学段中高固全
(I)	(七)卷加真奇壁脑髓脊髓学段中高固全
(VIII)	(六)卷加真奇壁脑髓脊髓学段中高固全 (1)
(IX)	(五)卷加真奇壁脑髓脊髓学段中高固全 (5)
(X)	(四)卷加真奇壁脑髓脊髓学段中高固全 (9)
(XI)	(三)卷加真奇壁脑髓脊髓学段中高固全 (13)
(XII)	(二)卷加真奇壁脑髓脊髓学段中高固全 (17)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(一)	(21)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(二)	(25)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(三)	(29)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(四)	(33)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(五)	(37)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(六)	(41)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(七)	(45)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(八)	(49)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(九)	(53)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(十)	(57)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(十一)	(61)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(十二)	(65)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(十三)	(69)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(十四)	(73)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(十五)	(77)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(十六)	(81)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(十七)	(85)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(十八)	(89)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(十九)	(93)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(二十)	(97)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(二十一)	(101)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(二十二)	(105)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(二十三)	(109)
	全国高中数学联赛新题型仿真试卷(二十四)	(113)

全国高中数学联赛新题型仿真试卷(三十).....	(117)
全国高中数学联赛新题型仿真试卷(三十一).....	(121)
全国高中数学联赛新题型仿真试卷(三十二).....	(125)
全国高中数学联赛新题型仿真试卷(三十三).....	(129)
全国高中数学联赛新题型仿真试卷(三十四).....	(133)
(1) 全国高中数学联赛新题型仿真试卷(三十五).....	(137)
(2) 全国高中数学联赛新题型仿真试卷(三十六).....	(141)
(3) 全国高中数学联赛新题型仿真试卷(三十七).....	(145)
(4) 全国高中数学联赛新题型仿真试卷(三十八).....	(149)
(5) 参考答案.....	(153)
(1) (一)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(六)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(2) (二)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(3) (三)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(八)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(4) (四)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(六)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(5) (五)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(6) (六)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(二十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(7) (七)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(二十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(8) (八)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(三十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(9) (九)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(四十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(10) (十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(五十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(11) (十一)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(六十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(12) (十二)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(七十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(13) (十三)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(八十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(14) (十四)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(九十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(15) (十五)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(二十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(16) (十六)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(三十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(17) (十七)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(四十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(18) (十八)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(五十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(19) (十九)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(六十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(20) (二十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(七十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(21) (廿一)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(八十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(22) (廿二)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(九十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(23) (廿三)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(二十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(24) (廿四)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(三十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(25) (廿五)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(四十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(26) (廿六)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(五十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(27) (廿七)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(六十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(28) (廿八)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(七十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(29) (廿九)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(八十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....
(30) (三十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....	(九十)卷五真题模拟赛第十一届中高圆全.....

全国高中数学联赛新题型仿真试卷(一)

一试

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 7 分,共 56 分)

1. 不等式 $|x^2 - 2| \leq 2x + 1$ 的解集为 _____.

2. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{2} + \log_2 \frac{x}{1-x}$ 的图象上任意两点,且 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$,已知点 M 的横坐标为 $\frac{1}{2}$,则 M 点的纵坐标为 _____.

3. 三棱锥 $S-ABC$ 的底面是正三角形,侧棱 $SA=1$, A 在侧面 SBC 内的射影是 $\triangle ABC$ 的垂心 H ,则 V_{S-ABC} 的最大值为 _____.

4. 集合 $S=\{1, 2, 3, \dots, 2009\}$ 的 12 元子集 $T=\{a_1, a_2, \dots, a_{12}\}$ 中,任意两个元素的差的绝对值都不为 1,这样的 12 元子集 T 的个数为 _____.

5. 方程 $\frac{\sqrt{x}+2^x}{\sqrt{x}+2^{x+1}} + \frac{\sqrt{x}+3^x}{\sqrt{x}+3^{x+1}} + \frac{\sqrt{x}+6^x}{\sqrt{x}+6^{x+1}} = 1$ 的解集是 _____.

6. 平面上的两个向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 满足 $|\overrightarrow{OA}|=a, |\overrightarrow{OB}|=b$,且 $a^2+b^2=4, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=0$,若向量 $\overrightarrow{OC}=\lambda \overrightarrow{OA}+\mu \overrightarrow{OB} (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$,且 $(\lambda-\frac{1}{2})^2 a^2 + (\mu-\frac{1}{2})^2 b^2=1$,则 $|\overrightarrow{OC}|$ 的最大值是 _____.

7. 设 $\triangle ABC$ 的三个内角 $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的边长分别为 a, b, c . 若 $a < b < c$,且

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{|b^2 + c^2 - a^2|}{bc} \\ \frac{c}{b} = \frac{|c^2 + a^2 - b^2|}{ca} \\ \frac{a}{c} = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{ab} \end{cases}, \text{则 } \angle A, \angle B, \angle C \text{ 的弧度数之比为 } \text{_____}.$$

8. 设 a, b, c 是三个两两不相等的正整数. 若 $\{a+b, b+c, c+a\} = \{n^2, (n+1)^2, (n+2)^2\}$, 则 $a^2 + b^2 + c^2$ 的最小值是 _____.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 14 分,第 10 题、第 11 题 15 分,共 44 分)

9. 抛物线 $y^2 = 2px$ 的内接三角形的两边分别和抛物线 $x^2 = 2qy$ 相切, 求证: 三角形的第三边也和 $x^2 = 2qy$ 相切.

解 一

(代数法) 令 ΔABC 为抛物线 $y^2 = 2px$ 的内接三角形, 则 A, B, C 在抛物线上, 且 A, B 在抛物线的同一侧, C 在抛物线的另一侧. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 则 $y_1^2 = 2px_1, y_2^2 = 2px_2, y_3^2 = 2qx_3$.

由 $y_1^2 = 2px_1, y_2^2 = 2px_2$, 得 $\frac{y_1}{x_1} = \sqrt{\frac{2p}{x_1}}, \frac{y_2}{x_2} = \sqrt{\frac{2p}{x_2}}$. 由 $y_3^2 = 2qx_3$, 得 $\frac{y_3}{x_3} = \sqrt{\frac{2q}{x_3}}$.

设 M 为直线 AB 上一点, 且 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_3}{x_3}$, 则 M 在抛物线 $x^2 = 2qy$ 上.

设 D, E, F 分别为 AB, BC, CA 与抛物线 $x^2 = 2qy$ 的切点, 则 D, E, F 在抛物线上.

10. 设 $\frac{1}{2} < a_1 < \frac{2}{3}, a_{n+1} = a_n(2 - a_{n+1}), n = 1, 2, 3, \dots$, 求证: $n + \frac{1}{2} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < n + 2$.

解 一

由 $a_{n+1} = a_n(2 - a_{n+1})$, 得 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n}$, 且 $a_1 = \frac{1}{3}$.

设 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 则 $b_1 = 3, b_{n+1} = 2 + b_n$, 且 $b_n > 0$.

由 $b_{n+1} = 2 + b_n$, 得 $b_{n+1} - b_n = 2$, 且 $b_1 = 3$.

故 $b_n = 3 + 2(n - 1) = 2n + 1$, 且 $b_n > 0$.

由 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 得 $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{2n + 1}$, 且 $a_n > 0$.

由 $a_n = \frac{1}{2n + 1}$, 得 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n + 1}$.

由 $\frac{1}{2n + 1} < \frac{1}{2n - 1}$, 得 $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n + 1} < \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n - 1} = \frac{n}{2n - 1} < \frac{n}{2n} = \frac{n}{2}$.

由 $\frac{1}{2n + 1} > \frac{1}{2n + 3}$, 得 $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n + 1} > \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n + 3} = \frac{n}{2n + 3} > \frac{n}{2n + 2} = \frac{n}{2(n + 1)}$.

11. 试确定, 是否存在 2009 个实数 $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$, 满足: $\sum_{i=1}^{2009} a_i = 2008$, 且

$$(1) |a_i| < 1, i=1, 2, \dots, 2009;$$

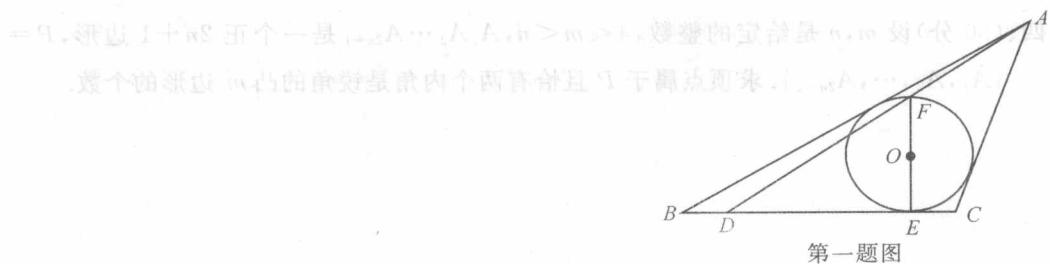
$$(2) \sum_{i=1}^{2009} |a_i| - \left| \sum_{i=1}^{2009} a_i \right| = 2008.$$

: (A) 由题意得

直小量的求(2)

二 试

一、(50 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB > BC > CA$, $AB = 6$, $\angle C - \angle B = 90^\circ$, 圆 O 为 $\triangle ABC$ 的内切圆, E 是 BC 边上的切点, EF 为圆 O 的直径. 射线 AF 交 BC 边于点 D . 若 DE 等于 $\triangle ABC$ 外接圆的半径, 求边 BC , AC 的长.



第一题图

二、(50 分) 求所有的素数对 (p, q) , 使得 $pq \mid 5^p + 5^q$.

三、(50分)已知集合 A_1, A_2, \dots, A_n 是集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的不同子集, 满足下列条件:

(i) $i \notin A_i$ 且 $\text{Card}(A_i) \geq 3, i=1, 2, \dots, n;$

(ii) $i \in A_j$ 的充要条件是 $j \notin A_i (i \neq j)$, 且 $i, j=1, 2, \dots, n$.

试回答下列问题:

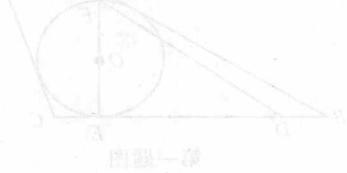
(1) 求 $\sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i);$

(2) 求 n 的最小值.

第二

如图, $\triangle ABC$ 为锐角三角形, O 为圆心, $OA = OB = OC$, 中位线 DE 与圆相交于 G, H . 一圆内切于 $\triangle ABC$, 圆心 O' 在 BC 上, 点 D 在圆上, 直线 OD 与圆相交于 M, N , 圆周角 $\angle BAC = 60^\circ$, 圆周角 $\angle BOC = 120^\circ$, 圆周角 $\angle BOC' = 60^\circ$, 圆周角 $\angle BOC'' = 120^\circ$.

四、(50分)设 m, n 是给定的整数, $4 < m < n$, $A_1 A_2 \dots A_{2n+1}$ 是一个正 $2n+1$ 边形, $P = \{A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}\}$. 求顶点属于 P 且恰有两个内角是锐角的凸 m 边形的个数.



全国高中数学联赛新题型仿真试卷(二)

一 试

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 7 分,共 56 分)

1. 已知非零实数 x, y 满足 $(3x+y)^5 + x^5 + 4x + y = 0$, 则 $\frac{x}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 正方形 $ABCD$ 和正方形 $ABEF$ 所在平面成 120° 的角, M, N 分别是对角线 AC, BF 上的点, 且 $AM = FN$. 若 $AB = 1$, 则 MN 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的右焦点为 F , 右准线为 l , P_1, P_2, \dots, P_{24} 为 24 个依逆时针顺序排列在椭圆上的点, 其中, P_1 是椭圆的右顶点, 且 $\angle P_1 F P_2 = \angle P_2 F P_3 = \dots = \angle P_{23} F P_{24} = \angle P_{24} F P_1$, 则这 24 个点到 l 的距离的倒数和为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. $y = \sin(\frac{\pi}{3} + x) - \sin 3x$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知三个正实数 a, b, c 满足 $a \leqslant b+c \leqslant 2a, b \leqslant a+c \leqslant 2b$, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6. 若实数 x 满足 $\left[x + \frac{19}{100}\right] + \left[x + \frac{20}{100}\right] + \dots + \left[x + \frac{91}{100}\right] = 546$, 则 $[100x]$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. 若 $f(x) = x^6 - 2\sqrt{2006}x^5 - x^4 + x^3 - 2\sqrt{2007}x^2 + 2x - \sqrt{2006}$, 则 $f(\sqrt{2006} + \sqrt{2007}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设 $0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, 且 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, 则 $\min\left\{\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}\right\}$ 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

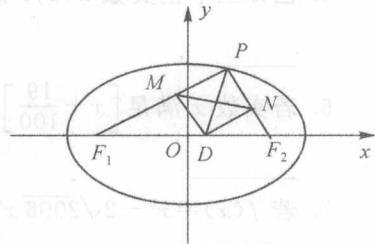
二、解答题(本大题共 3 小题, 第 9 题 14 分, 第 10 题、第 11 题 15 分, 共 44 分)

9. 文娱队的每位队员唱歌、跳舞至少会一项. 已知会唱歌的有 2 人, 会跳舞有 5 人, 现从文娱队中选 2 人, 设 ξ 为选出的人中既会唱歌又会跳舞的人数, 且 $P(\xi > 0) = \frac{7}{10}$, 计算 $E\xi$.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \frac{3}{2}$, 且 $a_n = \frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1} + n - 1}$ ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}_+$).

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 对一切正整数 n , 不等式 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n < \lambda \cdot n!$ 恒成立, 试求正整数 λ 的最小值.

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$. 如图, F_1, F_2 为其左、右焦点, P 为椭圆 C 上任一点(非长轴端点), PD 为焦点 $\triangle F_1PF_2$ 的 $\angle F_1PF_2$ 的平分线. 过 D 分别作 PF_1, PF_2 的垂线, M, N 为垂足. 试求: $\frac{S_{\triangle DMN}}{S_{\triangle PEF}}$ 的最大值.



第 11 题图

二 试

- 一、(50分)设 $\triangle ABC$ 内接于单位圆 $\odot O$,且圆心 O 在 $\triangle ABC$ 的内部.若点 O 在边 BC , CA , AB 上的射影分别为点 D,E,F ,求 $OD+OE+OF$ 的最大值.

- 二、(50分)已知 x,y,z 是正实数,证明 $\frac{xy}{x^2+y^2+2z^2}+\frac{yz}{2x^2+y^2+z^2}+\frac{zx}{x^2+2y^2+z^2}\leq\frac{3}{4}$.

三、(50分)设 $M = \{1, 2, \dots, 65\}$, $A \subseteq M$ 为子集. 若 $|A| = 33$, 且存在 $x, y \in A$, $x < y$, $x \mid y$, 则称 A 为“好集”. 求最大的 $a \in M$, 使含 a 的任意 33 元子集为好集.

四、(50分)将正 $\triangle ABC$ 的各边四等分, 过每个分点分别作另外两边的平行线, 称 $\triangle ABC$ 的边及这些平行线所交出的 15 个点为格点, 在这 15 个格点中任取 n 个格点, 一定存在三个格点能构成一个等腰三角形(包括正三角形), 求 n 的最小值.

全国高中数学联赛新题型仿真试卷(三)

一 试

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 7 分,共 56 分)

1. 已知实数 a, b, c 满足 $abc=1$, 则 $2a-\frac{1}{b}, 2b-\frac{1}{c}, 2c-\frac{1}{a}$ 这三个数中, 大于 1 的数的个数最多为_____.
2. 从 $1, 2, 3, \dots, 14$ 中按从小到大的顺序取出 a_1, a_2, a_3 , 使得同时满足 $a_2-a_1 \geq 3$, $a_3-a_2 \geq 3$, 那么所有符合上述要求的不同取值方法种数为_____.
3. 已知圆 $M: 2x^2+2y^2-8x-8y-1=0$, 直线 $l: x+y-9=0$, 过 l 上一点 A 作 $\triangle ABC$, 使 $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$, 边 AB 过圆心 M , 且 B, C 在圆 M 上, 则点 A 纵坐标的取值范围是_____.
4. 设 H 为锐角三角形 ABC 的垂心, 已知 $\angle A=60^\circ, BC=3$, 则 $AH=$ _____.
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x-2} =$ _____.
6. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $[\log_2 1] + [\log_2 2] + [\log_2 3] + \dots + [\log_2 2009] =$ _____.
7. 已知平面向量 a, b, c 满足 $|a|=|b|=1, |c|=5$, 且 $a \cdot c=3, b \cdot c=4$, 则对任意实数 $t, z=|c-ta-b|$ 的最小值为_____.
8. 定义数列 $\{a_n\}: a_n=n^3+4, n \in \mathbb{N}_+$, 令 $d_n=(a_n, a_{n+1})$, 即 d_n 为 a_n 与 a_{n+1} 的最大公约数, 则 d_n 的最大值为_____.

二、解答题(本大题共 3 小题, 第 9 题 14 分, 第 10 题、第 11 题 15 分, 共 44 分)

9. 已知抛物线 $4y=x^2$ 上的点 P (非原点)处切线与 x 轴、 y 轴分别交于 Q, R 两点, F 为焦点. 若抛物线上的点 Q 满足 $\overrightarrow{PF}=\mu \overrightarrow{FQ}$, 求 $\triangle QPR$ 面积的最小值, 并写出此时切线 PR 的方程.

10. 已知函数 $f(x)$ 满足下列条件: ① 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$; ② 对于任意 $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq 0$, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$; ③ 对于满足条件 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1$ 的任意两个数 x_1, x_2 有 $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$, 证明: 对于任意的 $0 \leq x \leq 1$ 有 $f(x) \leq 2x$.

解一

由题意知, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非减, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 由 $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$ 知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是凸的.

设 $x \in [0, 1]$, 则存在 $a, b \in [0, 1]$, 使得 $x = a + b$, 其中 $a < b$, 且 a, b 是整数. 由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是凸的, 故有 $f(x) \leq f(a) + f(b)$.

又因为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是凸的, 所以 $f(a), f(b)$ 分别介于 $[0, 1]$ 之间. 令 $t = a$, 则 $t \in [0, 1]$, 且 $t + b \in [0, 1]$. 由 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是凸的, 且 $0 = t + (1-t)$ 时, $0 = f(t) + f(1-t)$. 因此 $f(t) \leq f(1-t)$, 即 $f(t) \leq 1-t$. 于是 $f(a) \leq f(t) \leq 1-t$, 即 $f(a) \leq 1-a$. 同理可得 $f(b) \leq 1-b$.

11. 已知 a, b, c 为正实数, 且满足 $a+b+c=1$. 求证: $\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$.

由题意知, $a, b, c \in (0, 1)$, 且 $a+b+c=1$. 令 $x = a/b, y = b/c, z = c/a$, 则 $x, y, z \in (0, 1)$. 由 $a+b+c=1$, 得 $x+y+z=1$. 由 $x, y, z \in (0, 1)$, 得 $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, 即 $xyz \leq \frac{1}{27}$. 由 $a, b, c \in (0, 1)$, 得 $a^2b^2c^2 \leq \frac{1}{27}$. 由 $a, b, c \in (0, 1)$, 得 $a^2b^2c^2 \leq \frac{1}{27}$.

由题意知, $a, b, c \in (0, 1)$, 且 $a+b+c=1$. 令 $x = a/b, y = b/c, z = c/a$, 则 $x, y, z \in (0, 1)$. 由 $a, b, c \in (0, 1)$, 得 $a^2b^2c^2 \leq \frac{1}{27}$. 由 $a, b, c \in (0, 1)$, 得 $a^2b^2c^2 \leq \frac{1}{27}$.

二试

一、(50分)若 x, y 是自然数,解方程: $x^2 - 2xy + y^2 + 5x + 5y = 1500$.

二、(50分)圆 O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, D, E, F 是 BC, CA, AB 上的切点, DD', EE', FF' 都是圆 O 的直径. 求证: AD', BE', CF' 三线共点.