SHUXUE

主编 蔡小雄

全国高中数学联赛

预测卷

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

全国高中数学联赛预测卷

主　编　蔡小雄

编　委　王慧兴　王希年　李惟峰
吴国建　沈虎跃　范东晖
胡克元　孟方明　赵　洋
黄民才　谢建伟　翁利帅
魏晔翔　赵诗杰　史宏建

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

全国高中数学联赛预测卷／蔡小雄主编．—杭州：浙江大学出版社，2009．7
ISBN 978-7-308-06901-4
Ⅰ．全．．　Ⅱ．蔡．．．　Ⅲ．数学课—高中—习题　Ⅳ．G634．605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 116428 号

全国高中数学联赛预测卷
蔡小雄　主编

责任编辑　沈国明
文字编辑　吴　慧
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　富阳市育才印刷有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　19．75
字　　数　446 千
版 印 次　2009 年 7 月第 1 版　2009 年 8 月第 2 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-06901-4
定　　价　28．00 元

前　言

“奥林匹克”这一响亮的名字，曾让多少有竞争意识的人为之热血沸腾，心潮澎湃。中学生数学奥林匹克竞赛也是如此。从 1894 年匈牙利揭开现代中学生数学竞赛的序幕，一百多年来，数学竞赛吸引了世界各地无数数学爱好者积极参与。

虽然不是每位参加数学竞赛的人都有机会获得国际金牌，也不是每个人都能通过竞赛取得保送大学的资格，但是参加“奥赛”的过程中所培养起来的数学思维能力和数学素养，以及“奥赛”中渗透的现代数学前沿知识与创新的思维方式，对日常学习与生活都有重要的指导意义。正如数学前辈所言：“数学不仅具有真理，而且具有至高无上的美，人们在数学的王国里将找到真正意义上的快乐。”“数学能使你的思想正确、敏捷。有了正确、敏捷的思想，你才有可能爬上科学的大山。”

“全国高中数学联赛”（始于 1981 年）是教育部批准，由中国科协主管，中国数学会普及工作委员会主办，国内影响最大的一项中学生学科竞赛。

2009 年 1 月，中国数学会普及工作委员会在海南召开会议，对全国高中数学联赛的考查方式及考查要求作了调整，进一步加强联赛第二试的内容。

本书根据联赛改革新要求，针对全国联赛新题型，组织竞赛一线的老师和专家，精心编排了 38 份试卷，并作了详解，供学生赛前训练之用。

但由于时间匆促，难免有一些疏漏，敬请各位读者指正。

目 录

全国高中数学联赛新题型仿真试卷(一)

一 试

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 7 分,共 56 分)

1. 不等式$|x^2-2|\leqslant 2x+1$的解集为________.

2. 设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$是函数$f(x)=\frac{1}{2}+\log_2\frac{x}{1-x}$的图象上任意两点,且$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,已知点$M$的横坐标为$\frac{1}{2}$,则$M$点的纵坐标为________.

3. 三棱锥$S-ABC$的底面是正三角形,侧棱$SA=1$,A在侧面SBC内的射影是$\triangle ABC$的垂心H,则V_{S-ABC}的最大值为________.

4. 集合$S=\{1,2,3,\cdots,2009\}$的 12 元子集$T=\{a_1,a_2,\cdots,a_{12}\}$中,任意两个元素的差的绝对值都不为 1,这样的 12 元子集T的个数为________.

5. 方程$\frac{\sqrt{x}+2^x}{\sqrt{x}+2^{x+1}}+\frac{\sqrt{x}+3^x}{\sqrt{x}+3^{x+1}}+\frac{\sqrt{x}+6^x}{\sqrt{x}+6^{x+1}}=1$的解集是________.

6. 平面上的两个向量$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$满足$|\overrightarrow{OA}|=a$,$|\overrightarrow{OB}|=b$,且$a^2+b^2=4$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,若向量$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$,且$(\lambda-\frac{1}{2})^2a^2+(\mu-\frac{1}{2})^2b^2=1$,则$|\overrightarrow{OC}|$的最大值是________.

7. 设$\triangle ABC$的三个内角$\angle A,\angle B,\angle C$所对的边长分别为$a,b,c$.若$a<b<c$,且
$$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{|b^2+c^2-a^2|}{bc}\\ \frac{c}{b}=\frac{|c^2+a^2-b^2|}{ca}\\ \frac{a}{c}=\frac{|a^2+b^2-c^2|}{ab}\end{cases}$$,则$\angle A,\angle B,\angle C$的弧度数之比为________.

8. 设a,b,c是三个两两不相等的正整数.若$\{a+b,b+c,c+a\}=\{n^2,(n+1)^2,(n+2)^2\}$,则$a^2+b^2+c^2$的最小值是________.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 14 分,第 10 题、第 11 题 15 分,共 44 分)

9. 抛物线 $y^2=2px$ 的内接三角形的两边分别和抛物线 $x^2=2qy$ 相切,求证:三角形的第三边也和 $x^2=2qy$ 相切.

10. 设 $\frac{1}{2}<a_1<\frac{2}{3}$,$a_{n+1}=a_n(2-a_{n+1})$,$n=1,2,3,\cdots$,求证:$n+\frac{1}{2}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<n+2$.

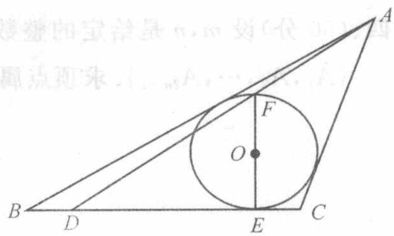
11. 试确定,是否存在 2009 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2009}$,满足:

(1) $|a_i|<1, i=1,2,\cdots,2009$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{2009}|a_i|-\left|\sum\limits_{i=1}^{2009}a_i\right|=2008$.

二 试

一、(50 分)如图,$\triangle ABC$ 中,$AB>BC>CA$,$AB=6$,$\angle C-\angle B=90^\circ$,圆 O 为$\triangle ABC$ 的内切圆,E 是 BC 边上的切点,EF 为圆 O 的直径.射线 AF 交 BC 边于点 D.若 DE 等于$\triangle ABC$ 外接圆的半径,求边 BC,AC 的长.



第一题图

二、(50 分)求所有的素数对(p,q),使得 $pq\mid 5^p+5^q$.

三、(50 分)已知集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的不同子集，满足下列条件：

(ⅰ)$i \notin A_i$ 且 $\mathrm{Card}(A_i) \geqslant 3, i=1,2,\cdots,n$；

(ⅱ)$i \in A_j$ 的充要条件是 $j \notin A_i$($i \neq j$，且 $i,j=1,2,\cdots,n$).

试回答下列问题：

(1)求 $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i)$ ；

(2)求 n 的最小值.

四、(50 分)设 m,n 是给定的整数，$4<m<n$，$A_1A_2\cdots A_{2n+1}$ 是一个正 $2n+1$ 边形，$P=\{A_1,A_2,\cdots,A_{2n+1}\}$. 求顶点属于 P 且恰有两个内角是锐角的凸 m 边形的个数.

全国高中数学联赛新题型仿真试卷(二)

一 试

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 7 分,共 56 分)

1. 已知非零实数 x,y 满足 $(3x+y)^5+x^5+4x+y=0$,则 $\frac{x}{y}=$ ________.

2. 正方形 $ABCD$ 和正方形 $ABEF$ 所在平面成 120° 的角,M,N 分别是对角线 AC,BF 上的点,且 $AM=FN$. 若 $AB=1$,则 MN 的最大值为________.

3. 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的右焦点为 F,右准线为 l,$P_1,P_2,\cdots,P_{24}$ 为 24 个依逆时针顺序排列在椭圆上的点,其中,P_1 是椭圆的右顶点,且 $\angle P_1FP_2=\angle P_2FP_3=\cdots=\angle P_{23}FP_{24}=\angle P_{24}FP_1$,则这 24 个点到 l 的距离的倒数和为________.

4. $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\sin 3x$ 的最大值为________.

5. 已知三个正实数 a,b,c 满足 $a\leqslant b+c\leqslant 2a$,$b\leqslant a+c\leqslant 2b$,则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围为________.

6. 若实数 x 满足 $\left[x+\frac{19}{100}\right]+\left[x+\frac{20}{100}\right]+\cdots+\left[x+\frac{91}{100}\right]=546$,则 $[100x]$ 的值为________.

7. 若 $f(x)=x^6-2\sqrt{2006}\,x^5-x^4+x^3-2\sqrt{2007}\,x^2+2x-\sqrt{2006}$,则 $f(\sqrt{2006}+\sqrt{2007})=$________.

8. 设 $0<\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$,且 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$,则 $\min\left\{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right\}$ 的取值范围为________.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 14 分,第 10 题、第 11 题 15 分,共 44 分)

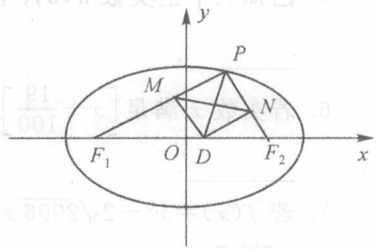
9. 文娱队的每位队员唱歌、跳舞至少会一项. 已知会唱歌的有 2 人,会跳舞有 5 人,现从文娱队中选 2 人,设 ξ 为选出的人中既会唱歌又会跳舞的人数,且 $P(\xi>0)=\frac{7}{10}$,计算 $E\xi$.

10. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\dfrac{3}{2}$，且$a_n=\dfrac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}(n\geqslant 2, n\in \mathbf{N}_+)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)对一切正整数n，不等式$a_1a_2a_3\cdots a_n<\lambda\cdot n!$恒成立，试求正整数$\lambda$的最小值.

11. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$. 如图，$F_1,F_2$为其左、右焦点，$P$为椭圆$C$上任一点(非长轴端点)，$PD$为焦点$\triangle F_1PF_2$的$\angle F_1PF_2$的平分线. 过$D$分别作$PF_1,PF_2$的垂线，$M,N$为垂足. 试求：$\dfrac{S_{\triangle DMN}}{S_{\triangle PF_1F_2}}$的最大值.



第11题图

二 试

一、(50 分)设$\triangle ABC$内接于单位圆$\odot O$,且圆心O在$\triangle ABC$的内部.若点O在边BC,CA,AB上的射影分别为点D,E,F,求$OD+OE+OF$的最大值.

二、(50 分)已知x,y,z是正实数,证明$\dfrac{xy}{x^2+y^2+2z^2}+\dfrac{yz}{2x^2+y^2+z^2}+\dfrac{zx}{x^2+2y^2+z^2}\leqslant\dfrac{3}{4}$.

三、(50 分)设 $M=\{1,2,\cdots,65\}$,$A\subseteq M$ 为子集. 若 $|A|=33$,且存在 $x,y\in A$,$x<y$,$x\mid y$,则称 A 为"好集". 求最大的 $a\in M$,使含 a 的任意 33 元子集为好集.

四、(50 分)将正$\triangle ABC$ 的各边四等分,过每个分点分别作另外两边的平行线,称$\triangle ABC$ 的边及这些平行线所交出的 15 个点为格点,在这 15 个格点中任取 n 个格点,一定存在三个格点能构成一个等腰三角形(包括正三角形),求 n 的最小值.

全国高中数学联赛新题型仿真试卷(三)

一 试

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 7 分,共 56 分)

1. 已知实数 a、b、c 满足 $abc=1$,则 $2a-\frac{1}{b}$、$2b-\frac{1}{c}$、$2c-\frac{1}{a}$ 这三个数中,大于 1 的数的个数最多为________.

2. 从 $1,2,3,\cdots,14$ 中按从小到大的顺序取出 a_1,a_2,a_3,使得同时满足 $a_2-a_1\geqslant 3$,$a_3-a_2\geqslant 3$,那么所有符合上述要求的不同取值方法种数为________.

3. 已知圆 $M:2x^2+2y^2-8x-8y-1=0$,直线 $l:x+y-9=0$,过 l 上一点 A 作 $\triangle ABC$,使 $\angle BAC=\frac{\pi}{4}$,边 AB 过圆心 M,且 B,C 在圆 M 上,则点 A 纵坐标的取值范围是________.

4. 设 H 为锐角三角形 ABC 的垂心,已知 $\angle A=60°$,$BC=3$,则 $AH=$________.

5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x-2}=$________.

6. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,则 $[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 2009]=$________.

7. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,$|\boldsymbol{c}|=5$,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=3$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=4$,则对任意实数 t,$z=|\boldsymbol{c}-t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最小值为________.

8. 定义数列 $\{a_n\}$:$a_n=n^3+4$,$n\in\mathbf{N}_+$,令 $d_n=(a_n,a_{n+1})$,即 d_n 为 a_n 与 a_{n+1} 的最大公约数,则 d_n 的最大值为________.

二、解答题(本大题共 3 小题,第 9 题 14 分,第 10 题、第 11 题 15 分,共 44 分)

9. 已知抛物线 $4y=x^2$ 上的点 P(非原点)处切线与 x 轴、y 轴分别交于 Q、R 两点,F 为焦点.若抛物线上的点 Q 满足 $\overrightarrow{PF}=\mu\overrightarrow{FQ}$,求 $\triangle QPR$ 面积的最小值,并写出此时切线 PR 的方程.

10. 已知函数 $f(x)$ 满足下列条件：①函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$；②对于任意 $x\in[0,1]$，$f(x)\geqslant 0$，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$；③对于满足条件 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，$x_1+x_2\leqslant 1$ 的任意两个数 x_1、x_2 有 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$，证明：对于任意的 $0\leqslant x\leqslant 1$ 有 $f(x)\leqslant 2x$.

11. 已知 a、b、c 为正实数，且满足 $a+b+c=1$. 求证：$\dfrac{a-bc}{a+bc}+\dfrac{b-ca}{b+ca}+\dfrac{c-ab}{c+ab}\leqslant\dfrac{3}{2}$.

二 试

一、(50 分)若 x、y 是自然数,解方程:$x^2-2xy+y^2+5x+5y=1500$.

二、(50 分)圆 O 是△ABC 的内切圆,D、E、F 是 BC、CA、AB 上的切点,DD',EE',FF' 都是圆 O 的直径.求证:AD',BE',CF' 三线共点.