Xianxing Daishu Dianxing Tixing Jingcui

线性代数典型题型精粹

本书结合线性代数的知识点，对所选题经反复推敲，认真归类，筛选出各类典型题，并详细解答与题型配套的相关例题近300道，所选的每道题都力求使读者能够举一反三、触类旁通.

在题目编排上分类清楚、条理分明、查阅方便，是一本以典型题型题解为中心的比较全面、系统、实用的工具书，可供各类大专院校的学生学习和考研的同学系统复习线性代数时使用，也可供数学教师在备课和进修时参考.

李相朋　董敏　何金开　编著

罕见的试题

经典的解析

简单的结构

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

线性代数典型题型精粹

李相朋　董　敏　何金开　编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

线性代数典型题型精粹/李相朋　董　敏　何金开　编著. —武汉:华中科技大学出版社,2009年9月
ISBN 978-7-5609-5513-1

Ⅰ.线…　Ⅱ.①李…　②董…　③何…　Ⅲ.线性代数-高等学校-习题
Ⅳ.O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第111092号

线性代数典型题型精粹　　李相朋　董　敏　何金开　编著

策划编辑:王新华
责任编辑:王汉江　　封面设计:范翠璇
责任校对:汪世红　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:华中科技大学惠友文印中心
印　刷:湖北新华印务有限公司

开本:710mm×1000mm　1/16　印张:10.25　字数:198 000
版次:2009年9月第1版　印次:2009年9月第1次印刷　定价:18.00元
ISBN 978-7-5609-5513-1/O·493

内 容 简 介

本书结合线性代数的知识点，对所选题经反复推敲，认真归类，筛选出各类典型题，并详细解答与题型配套的相关例题近300道，所选的每道题都力求使读者能够举一反三、触类旁通.在题目编排上分类清楚、条理分明、查阅方便，是一本以典型题型题解为中心的比较全面、系统、实用的工具书，可供各类大专院校的学生学习和考研的同学系统复习线性代数时使用，也可供数学教师在备课和进修时参考.

前　　言

线性代数是大学工科、经济学、管理学等学科各专业学生的一门必修的基础课程，也是硕士研究生入学考试的一门必考课程。为帮助读者对线性代数中的知识点融会贯通，提高读者解题应试能力，作者查阅了国内外各种优秀教材、习题集、历年来的考研题、数学竞赛题及部分重点高校的考试题，结合自己多年的教学实践编写了这本《线性代数典型题型精粹》.本题解全面概括了线性代数课程的全部内容，具有如下特点.

1. 罕见的试题

本书所列的例题中很多题目是各院校的内部资料。如北京大学、清华大学、华中科技大学、武汉大学和南京大学等名牌高校的考研试题.

2. 经典的解析

本书依据作者多年高校教学经验的积累，对各种试题作了双向归纳。一是对试题的题型作了归纳；另一是对试题的解法作了归纳.筛选出各类较强典型题型，并对每种题型的解法作了总结与分析，可使读者能由此及彼、举一反三、触类旁通.

3. 简单的结构

全书共分 6 章，所选题型全面概括了线性代数课程的全部内容，每章都有“概念、定理与公式”和“题型分析”两节，知识点杂合的综合题按与题型关联度来归类。对于线性代数课程学习者（特别是准备考研的学生）来说，是一本很好的提高自己综合能力的复习资料.

本书集知识性、方法性、应考性于一体，是各类大专院校的学生学习和系统复习线性代数时的参考书，同时也可供数学教师在备课和进修时参考.

由于编者水平所限，难免出现错误，恳请读者批评指正.

编　者

2009 年 5 月

目　　录

第1章 行 列 式

1.1 概念、定理与公式

1. 二阶、三阶行列式(对角线法则)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ ;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

2. 排列及其逆序数

n 个不同的元素排成一列,称为这 n 个元素的全排列.

特别地,自然数 $1,2,\cdots,n$ 按一定次序排成一列,称为 n 元排列,记为 $p_1p_2\cdots p_n$. $1,2,\cdots,n$ 称为自然排列.

在一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,若一个大的数排在一个小的数前面,则称这两个数构成一个逆序. 一个排列逆序个数的总和称为这个排列的逆序数,记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇(偶)数的排列称为奇(偶)排列.

3. n 阶行列式的定义

$$D = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$= \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中,$p_1p_2\cdots p_n$ 为一个 n 元排列;$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为其逆序数.

4. 行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D^T = D$.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

性质 3 如果行列式有两行(列)完全相同或对应成比例,则此行列式等于零.

性质 4 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘以此

行列式.

性质 5 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 6 如果行列式中某一行(列)的所有元素全为零,则此行列式等于零.

性质 7 如果行列式的某一行(列)的元素都是两数之和(例如第 i 行的元素都是两数之和),则此行列式等于两个行列式之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 8 把行列式的第 j 行(列)元素的 k 倍加到第 i 行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

5. 行列式按行(列)展开

设 A_{ij} 为 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式,则

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} D, & k=i, \\ 0, & k\neq i; \end{cases}$$

或

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases} D, & l=j, \\ 0, & l\neq j. \end{cases}$$

6. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

7. 拉普拉斯展开定理

在 n 阶行列式 D 中任意取定 k 行(列)($1\leqslant k\leqslant n-1$),则由这 k 行(列)所组成的所有 k 阶子式分别与其对应代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

特别地,记 $|\boldsymbol{A}|=\det(a_{ij})_{m\times m}$, $|\boldsymbol{B}|=\det(b_{ij})_{n\times n}$,则

$$D=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

$$D=\begin{vmatrix} * & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & * \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

8. 克莱姆法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D = \det(b_{ij}) \neq 0$，则方程组有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D}(j = 1,2,\cdots,n),$$

其中 $D_j = (j = 1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列换成常数列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所得到的行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注 (1) 按法则的形式求解方程组. 当 $n \geqslant 3$ 时计算量太大，没有实用价值，因此只有 $n < 3$ 时才用法则求解 n 元线性方程组，而 $n \geqslant 3$ 时法则的重要意义在理论上，实际可行的求解方法详见第 4 章——初等变换法.

(2) 法则的改进. 事实上，系数行列式不等于零是方程组有唯一解的充分必要条件.

(3) $D \neq 0$ 是齐次线性方程组有唯一零解的充分必要条件.

1.2 题型分析

1. 与行列式的概念和性质相关的计算问题

题型一 在用行列式表示的多项式 $f(x)$ 中，关于 x 的各次幂的系数及最高次数的确定

提示 解这类题型通常直接利用行列式的定义，或利用行列式的性质将行列式化为更易于求解问题的形式，或两者兼而有之.

例 1 已知多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 的最高次数为________.

分析 此题直接用定义展开较复杂，由于行列式各元素都是 x 的一次式，故可利用性质 8 将其中两行(列)中的 x 消去，从而简化问题.

解 将第 1 行的 -1 倍分别加到第 2,3 行，再按第 1 行展开，则

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{32}-a_{12} & a_{33}-a_{13} \end{vmatrix}(a_{11}+x)$$

$$-\begin{vmatrix} a_{21}-a_{11} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}-a_{11} & a_{33}-a_{13} \end{vmatrix}(a_{12}+x)+\begin{vmatrix} a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} \end{vmatrix}(a_{13}+x)$$

可见 $f(x)$ 的最高次数为 1.

例 2　已知多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$，则 x^4 的系数为________，x^3 的系数为________.

分析　此题行列式中各元素已是比较简单的形式，因此直接利用定义考察即可.

解　利用行列式的定义，仅当主对角线上的 4 个元素相乘才能得到 x^4，因此 x^4 系数是 $2\times 1^3=2$；仅当 $a_{12}(=x)$，$a_{21}(=1)$，$a_{33}(=x)$，$a_{44}(=x)$ 相乘才能得到 x^3，其符号为 $(-1)^{\tau(2134)}=-1$，从而 x^3 的系数为 -1.

例 3　已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 & 2 \\ 1 & 2x+2 & 7 & 5 \\ 3x+1 & 3 & 3x+3 & 8 \\ 4x+1 & 8 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 的最高次数为________，其系数为________.

分析　此题直接利用定义相当复杂，故可考虑先利用性质 7 化简行列式后再分析求解.

解

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & x+2 & x+3 & 2 \\ 0 & 2x+2 & 7 & 5 \\ 3x & 3 & 3x+3 & 8 \\ 4x & 8 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x+2 & x+3 & 2 \\ 1 & 2x+2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 3x+3 & 8 \\ 1 & 8 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x & x & x+3 & 2 \\ 0 & 2x & 7 & 5 \\ 3x & 0 & 3x+3 & 8 \\ 4x & 0 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 2 & x+3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 5 \\ 3x & 3 & 3x+3 & 8 \\ 4x & 8 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}1 & x+2 & x+3 & 2\\0 & x & 4-x & 3\\0 & 1-x & 2x & 6\\0 & 6-x & -x-2 & 4x+2\end{vmatrix}$$

$$=x^2\begin{vmatrix}1 & 1 & x+3 & 2\\0 & 2 & 7 & 5\\3 & 0 & 3x+3 & 8\\4 & 0 & 1 & 4x+4\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}1 & 2 & x+3 & 2\\0 & 2 & 7 & 5\\3 & 3 & 3x+3 & 8\\4 & 8 & 1 & 4x+4\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}x & 4-x & 3\\1-x & 2x & 6\\6-x & -x-2 & 4x+2\end{vmatrix}$$

$$=x^2\begin{vmatrix}1 & 1 & x & 2\\0 & 2 & 0 & 5\\3 & 0 & 3x & 8\\4 & 0 & 0 & 4x+4\end{vmatrix}+x^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 3 & 2\\0 & 2 & 7 & 5\\3 & 0 & 3 & 8\\4 & 0 & 1 & 4x+4\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}1 & 2 & x & 2\\0 & 2 & 0 & 5\\3 & 3 & 3x & 8\\4 & 8 & 0 & 4x+4\end{vmatrix}$$

$$+x\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\0 & 2 & 7 & 5\\3 & 3 & 3 & 8\\4 & 8 & 1 & 4x+4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & 4 & 3\\-x & 0 & 6\\-x & -2 & 4x+2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & -x & 3\\-x & 2x & 6\\-x & -x & 4x+2\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}0 & 4 & 3\\1 & 0 & 6\\6 & -2 & 4x+2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -x & 3\\1 & 2x & 6\\6 & -x & 4x+2\end{vmatrix}$$

$$=x^3\left[(-4)\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 0 & 5\\0 & 3 & 8\end{vmatrix}+(4x+4)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & 0\\3 & 0 & 3\end{vmatrix}\right]+x^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 3 & 2\\0 & 2 & 7 & 5\\3 & 0 & 3 & 8\\4 & 0 & 1 & 4x+4\end{vmatrix}$$

$$+x^2\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\0 & 2 & 0 & 5\\3 & 3 & 3 & 8\\4 & 8 & 0 & 4x+4\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\0 & 2 & 7 & 5\\3 & 3 & 3 & 8\\4 & 8 & 1 & 4x+4\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\-1 & 0 & 6\\-1 & -2 & 4x+2\end{vmatrix}$$

$$+x^2\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\-1 & 2 & 6\\-1 & -1 & 4x+2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 4 & 3\\1 & 0 & 6\\6 & -2 & 4x+2\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}0 & -1 & 3\\1 & 2 & 6\\6 & -1 & 4x+2\end{vmatrix}.$$

经观察，$f(x)$的最高次数不可能超过4，显然含有 x^4 的系数为0，从而 $f(x)$的最高次数为3，且含有 x^3 的项的系数分别计算为76，36，0，4. 故 $f(x)$的最高次数为3，其系

数为 116.

例 4　设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$，求方程 $f(x)=0$ 的根的个数.

分析　求 $f(x)=0$ 的根的个数，也就是要求 $f(x)$ 的最高次数，为此应先对 $f(x)$ 做恒等变形.

解

$$f(x)\xlongequal[i=2,3,4]{c_i-c_1}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}\xlongequal{c_4+c_2}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}.$$

因此可知，$f(x)$ 最高次数为 2，即为二次多项式，故 $f(x)=0$ 有两个根.

题型二　抽象行列式的计算

提示　解此类题型通常要利用行列式的性质或重要公式，建立抽象行列式与已知行列式之间的关系，利用已知求未知.

例 5　设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)$，则

$$|\boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_2+3\boldsymbol{A}_1,4\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,3\boldsymbol{A}_2|=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

分析　无法计算各分量，可以利用性质 7 将其转化为 $|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|$ 的关系式求解.

解　$|\boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_2+3\boldsymbol{A}_1,4\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,3\boldsymbol{A}_2|$

$$=|\boldsymbol{A}_3,4\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,3\boldsymbol{A}_2|+|-2\boldsymbol{A}_2,4\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,3\boldsymbol{A}_2|+|3\boldsymbol{A}_1,4\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,3\boldsymbol{A}_2|$$

$$=|\boldsymbol{A}_3,4\boldsymbol{A}_2,3\boldsymbol{A}_2|+|\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_3,3\boldsymbol{A}_2|+|-2\boldsymbol{A}_2,4\boldsymbol{A}_2,3\boldsymbol{A}_2|$$

$$+|-2\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,3\boldsymbol{A}_2|+|3\boldsymbol{A}_1,4\boldsymbol{A}_2,3\boldsymbol{A}_2|+|3\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_3,3\boldsymbol{A}_2|$$

$$=|3\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_3,3\boldsymbol{A}_2|=-3^2|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|=-9\times|\boldsymbol{A}|=-27.$$

例 6　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为四阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=1$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 维列向量，计算 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|$.

分析　利用性质 7 建立 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|$ 与 $|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{B}|$ 之间的关系即可.

解　$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},3\boldsymbol{\gamma}_2,3\boldsymbol{\gamma}_3,3\boldsymbol{\gamma}_4|=|\boldsymbol{\alpha},3\boldsymbol{\gamma}_2,3\boldsymbol{\gamma}_3,3\boldsymbol{\gamma}_4|+|2\boldsymbol{\beta},3\boldsymbol{\gamma}_2,3\boldsymbol{\gamma}_3,3\boldsymbol{\gamma}_4|$

$$=3^3|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|+2\times3^3|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|=27|\boldsymbol{A}|+54|\boldsymbol{B}|=108.$$

例 7　设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{3}$，则 $\left|\left(\dfrac{1}{7}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-12\boldsymbol{A}^*\right|=\_\_\_\_\_\_\_\_$.

分析　只需利用重要公式，将 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^*$ 转化为与 $\boldsymbol{A}$ 有关的形式.

解 因$\left(\frac{1}{7}A\right)^{-1}=7A^{-1}$，$12A^{*}=12|A|A^{-1}=4A^{-1}$，故

$$\left|\left(\frac{1}{7}A\right)^{-1}-12A^{*}\right|=|7A^{-1}-4A^{-1}|=|3A^{-1}|=3^3|A^{-1}|=3^3\frac{1}{|A|}=81.$$

例8 设A为三阶正交矩阵即$AA^{\mathrm{T}}=E$，$|A|<0$，B是三阶方阵，$|B-A|=4$，则$|E-AB^{\mathrm{T}}|=$________.

解 由条件$AA^{\mathrm{T}}=E$，$|A|=\pm1$，而$|A|<0$，所以$|A|=-1$，从而

$$\begin{aligned}|E-AB^{\mathrm{T}}|&=|AA^{\mathrm{T}}-AB^{\mathrm{T}}|=|A||(A-B)^{\mathrm{T}}|=|A||A-B|\\&=|A||-(B-A)|=|A|\cdot(-1)^3|(B-A)|=4.\end{aligned}$$

题型三 有关代数余子式的计算问题

提示 解此类题型通常有两种方法，一种是直接计算，另一种是利用它与行列式之间的关系(行列式按行或列展开的行式)计算.

例9 设$D=\begin{vmatrix}3&-5&2\\1&1&0\\-1&3&1\end{vmatrix}$，求$A_{11}+A_{12}+A_{13}$及$M_{11}+M_{21}+M_{31}$.

分析 直接计算烦琐，利用行列式展开构造一行列式D使其等于$A_{11}+A_{12}+A_{13}$即可，后者类似.

解 设$D'=\det(a'_{ij})=a'_{11}A_{11}+a'_{12}A_{12}+a'_{13}A_{13}=A_{11}+A_{12}+A_{13}$，从而$D'$即为用1,1,1替代$D$的第1行所得的行列式，即

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\-1&3&1\end{vmatrix}=4.$$

类似地，$M_{11}+M_{21}+M_{31}=A_{11}-A_{21}+A_{31}=\begin{vmatrix}1&-5&1\\-1&1&0\\1&3&1\end{vmatrix}=-12$(即为1,−1,1替代$D$的第1列所得的行列式).

例10 已知$D_5=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=27$，求$A_{41}+A_{42}+A_{43}$及$A_{44}+A_{45}$.

分析 此题是关于某一行部分元素的代数余子式之和的问题，不能直接利用例9的方法将行列式的该行用(1,1,1,1,1)替换求新行列式. 可考虑分别用(1,1,1,0,0)和(0,0,0,1,1)替换求新行列式，但计算两个五阶行列式，计算量较大. 故可以利用展开定理通过一些技巧来计算.

解　由于
$$D_5=a_{41}A_{41}+a_{42}A_{42}+a_{43}A_{43}+a_{44}A_{44}+a_{45}A_{45}$$
$$=(A_{41}+A_{42}+A_{43})+2(A_{44}+A_{45})=27,$$
又
$$a_{21}A_{41}+a_{22}A_{42}+a_{23}A_{43}+a_{24}A_{44}+a_{25}A_{45}$$
$$=2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+(A_{44}+A_{45})=0,$$
故
$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9,\quad A_{44}+A_{45}=18.$$

2. 与行列式性质有关的证明问题

题型一　"行列式的整除"问题

提示　此类题型即是证明行列式有公因子 k,常用的方法是证明行列式某行(列)各元素有公因子 k,通常利用行列式的性质 8 对行列式进行变换.

例 11　设 $D=\begin{vmatrix}1&7&0&3\\3&1&5&9\\0&9&7&5\\10&9&5&9\end{vmatrix}$,已知 1 703,3 159,975,10 959 都能被 13 整除,不计算行列式,证明 D 能被 13 整除.

解　$D\xlongequal{c_4+1\,000c_1+100c_2+10c_3}\begin{vmatrix}1&7&0&1703\\3&1&5&3159\\0&9&7&975\\10&9&5&10959\end{vmatrix}=13\begin{vmatrix}1&7&0&131\\3&1&5&243\\0&9&7&75\\10&9&5&843\end{vmatrix}.$

因上式右端行列式为一整数,故 D 能被 13 整除.

题型二　证明抽象行列式等于零

提示　解此类题型通常有下面这些方法:

(1) 证明 $D=-D$ 或 $D=kD$,从而 $D=0$;

(2) 利用性质(3)或性质(6);

(3) 反证法;

(4) 证明齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,从而 $|\boldsymbol{A}|=0$(在后面章节中介绍);

(5) 证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于其阶数 n,从而 $|\boldsymbol{A}|=0$(在后面章节中介绍);

(6) 证明 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为 0(在后面章节中介绍).

例 12　证明:奇数阶反对称行列式为零.

分析　反对称行列式为 $D=\det(a_{ij})_{n\times n}$,满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,因此可考虑证明 $D=-D$,进而证明 $D=0$.

证　$D=\det(a_{ij})_{n\times n}$是反对称行列式,所以 $a_{ii}=-a_{ii}\Rightarrow a_{ii}=0$,从而

$$D=\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\-a_{12}&0&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\-a_{13}&-a_{23}&0&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{1n}&-a_{2n}&-a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{转置}}\begin{vmatrix}0&-a_{12}&-a_{13}&\cdots&-a_{1n}\\a_{12}&0&-a_{23}&\cdots&-a_{2n}\\a_{13}&a_{23}&0&\cdots&-a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各行提取公因子}-1}(-1)^n\begin{vmatrix}0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0\end{vmatrix}=(-1)^nD.$$

由 n 为奇数$\Rightarrow D=-D\Rightarrow D=0$.

例 13 证明 $D=\begin{vmatrix}a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2\\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2\end{vmatrix}=0$.

分析 从行列式的形式分析,应考虑将 D 变形,利用性质证明.

证 $D\xlongequal[i=2,3,4]{c_i-c_1}\begin{vmatrix}a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9\\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9\\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9\\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9\end{vmatrix}\xlongequal[c_4-3c_2]{c_3-2c_2}\begin{vmatrix}a^2 & 2a+1 & 2 & 6\\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6\\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6\\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6\end{vmatrix}=0$

(第 3,4 列成比例).

3. 行列式的计算

提示 行列式的计算的基本方法和技巧就是"化零"和"降阶". 常采用下面这些方法计算行列式:

(1) 定义法;

(2) 利用行列式性质化为三角形行列式;

(3) 加边法;

(4) 各行(列)加到某一行(列)上,再利用行列式的性质化简;

(5) 逐行(列)相加减;

(6) 按某一行(列)展开;

(7) 按拉普拉斯展开定理展开;

(8) 递推法;

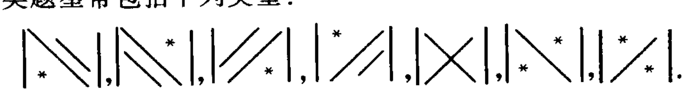
(9) 数学归纳法;

(10) 利用范德蒙行列式.

因为所有行列式均可利用性质化为三角形行列式,所以下面主要讨论各种特殊形式的行列式的计算问题.

题型一 求非零元素(主要)在一条或两条对角线上的行列式

提示 此类题型常包括下列类型:



一般有三种方法:①定义法;②按某一行(列)展开;③利用拉普拉斯展开定理展开.

例 14 计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

分析 此题位于不同行、不同列的元素均只有一个非零,因此用行列式的定义计算最简便,当然也可逐步利用展开定理来计算.

解 1 由定义法得

$$D=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 1)}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1=(-1)^{1+2+\cdots+(n-1)}\prod_{i=1}^{n}a_i=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

解 2 按展开定理(先按第 1 行展开),得

$$D=(-1)^{1+n}a_1\begin{vmatrix} & & a_2 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_n & & \end{vmatrix}_{n-1}=(-1)^{1+n}a_1(-1)^{1+(n-1)}a_2\begin{vmatrix} & & a_3 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_n & & \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$=\cdots=(-1)^{(n+1)+n+\cdots+2}a_1a_2\cdots a_n=(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

例 15 计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

分析 同上.

解 1 由定义法得

$$D=(-1)^{\tau(23\cdots(n-1)1)}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n=(-1)^{(n-1)}\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

解 2 按展开定理(按第 1 列展开,降阶称为一个对角行列式),得

$$D=(-1)^{1+n}a_n\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \end{vmatrix}=(-1)^{1+n}a_na_1\cdots a_{n-1}=(-1)^{1+n}\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

例 16 计算 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

分析 D_n 第 1 列除第 1 行元素和第 n 行元素外，其余元素均为零，且第 1 行、第 1 列元素的余子式为一上三角行列式，第 n 行、第 1 列元素的余子式为一下三角行列式. 因此按第 1 列展开计算较简便.

解 按第 1 列展开，得

$$D_n = a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n+1} + b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= a \cdot a^{n-1} + (-1)^{n+1} b \cdot b^{n-1} = a^n + (-1)^{n+1} b^n .$$

例 17 计算 $D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$.

分析 D_n 除最后一行外，其余行均只有两个非零元素，但此题若直接展开，得到的 $n-1$ 阶行列式计算仍十分困难. 为此，可先由行列式性质将某行或某列（除一个元素外）均化为零，再按行（列）展开. 当然，若将 D_n 按第 1 列展开，将产生一个与 D_n 形式完全相同的 $n-1$ 阶行列式，因此，此题也可利用递推法计算.

解 1 依次将第 i 列 $(i = 2,3,\cdots,n)$ 的 x^{i-1} 倍加到第 1 列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ x^n + \sum\limits_{n=0}^{n-1} a_{n-k}x^k & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix},$$

再按第 1 列展开，得

$$D_n = (-1)^{n+1}\left(x^n + \sum_{n=0}^{n-1} a_{n-k}x^k\right)\begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (-1)^{n+1}\left(x^n + \sum_{n=0}^{n-1} a_{n-k}x^k\right)(-1)^{n-1} = x^n + \sum_{n=0}^{n-1} a_{n-k}x^k .$$