高等院校精品课程系列教材·省级

JINGPIN KECHENG

信号与系统

学习指导与习题精解

程耕国　吴谨　陈华丽　编著

附赠电子教案
配有精品课程网站

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等院校精品课程系列教材

信号与系统

学习指导与习题精解

程耕国　吴　谨　陈华丽　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书作为《信号与系统》一书的配套书，采用介绍学习要点、精选例题、习题精解、自测题、考研真题、模拟题等方式，高度概括了“信号与系统”课程所涉及的基本概念、基本原理、重点难点、解题方法和技巧。

书中按照主教材章节顺序给出了每一章的学习要点、精选例题和习题精解，并给出了《信号与系统》上、下册的自测题及其参考答案；还给出了武汉科技大学“信号与系统”研究生入学考试真题、模拟题及其参考答案，而且所有的题目都给出了详细的解答过程，有利于读者检验掌握知识的程度。

本书可作为通信工程、电子信息工程、计算机科学与技术等专业本科生学习“信号与系统”课程的指导书，也可作为准备报考通信与信息系统、信号与信息处理、电路与系统等学科硕士研究生的复习用书，还可供电子类工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统学习指导与习题精解/程耕国，吴谨，陈华丽编著. —北京：机械工业出版社，2009. 5
(高等院校精品课程系列教材)
ISBN 978-7-111-27045-4

Ⅰ. 信… Ⅱ. ①程…②吴…③陈… Ⅲ. 信号系统—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. TN911. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 070640 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑：时 静 责任编辑：郝建伟 版式设计：霍永明
责任校对：陈延翔 责任印制：李 妍

北京铭成印刷有限公司印刷

2009 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 16. 5 印张 · 407 千字
0001—3000 册
标准书号：ISBN 978-7-111-27045-4
定价：27. 00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：(010)68326294
购书热线电话：(010)88379639 88379641 88379643
编辑热线电话：(010)88379753 88379739
封面无防伪标均为盗版

前　　言

“信号与系统”是理论与实践紧密结合、内容丰富、发展迅速、应用广泛的一门课程，是电子、信息、通信等专业本科生的必修课，也是相关专业研究生入学考试的科目之一。该课程的特点是理论性强、高度抽象、用到的相关基础知识多，使许多学习者感到难学、难懂、难掌握。因此，学习这门课程时应当多做练习和实验。本书正是为了帮助本科生学习该课程和准备参加研究生入学考试而编写的。使用本书，可在较短时间内达到掌握和巩固“信号与系统”课程内容的目的，是广大学生和自学者学习的好帮手。

本书是《信号与系统》一书的配套用书。本书立足实践，着眼自学，与《信号与系统》教材配合使用相得益彰。本书以基本理论为主线，对《信号与系统》一书中的学习要点进行了归纳和总结；作者根据多年的教学经验，在每一章都给出了精选例题，这些例题综合应用多个知识点，可充分考察读者应用知识的能力；同时对《信号与系统》一书中的习题进行了详细的解答，给初学者提供答案，带领读者走出不会应用知识解决问题的盲区。

书中按照主教材章节顺序给出了每一章的学习要点、精选例题和习题精解，并给出了《信号与系统》上、下册的自测题及其参考答案，还给出了武汉科技大学“信号与系统”研究生入学考试真题、模拟题及其参考答案，而且所有的题目都给出了详细的解答过程，有利于读者检验掌握知识的程度。

本书由程耕国主编和统稿，并撰写了第1章，尉宇撰写了第2章，熊凌撰写了第3、8章，陈华丽撰写了第4、9章，刘毅敏撰写了第5章，徐望明撰写了第6章，吴谨撰写了第7章，李娟撰写了第10章，盛玉霞撰写了第11章，朱磊撰写了第12章。由程耕国提供武汉科技大学2007、2008年“信号与系统”硕士研究生入学考试的真题及参考答案，陈华丽提供上、下册的自测题、考研模拟题及参考答案。

由于作者水平有限，书中难免有疏漏和差错，恳请读者不吝赐教。

编　者

目　录

第 1 章　信号及信号的时域分析

1.1　学习要点

本章在时域范围内讨论信号的分类和信号的基本运算。通过本章的学习，读者应该了解信号的各种分类、定义及相关波形；了解各类常用信号及其性质，掌握几种奇异信号的性质及运算法则；了解和掌握信号的基本运算方法，深刻理解卷积及其性质，以及输入、输出信号与系统之间的物理关系，为后面的学习打下牢固的基础。

1. 信号的分类

（1）连续信号与离散信号

一个信号，如果在连续时间范围内(除有限个间断点外)有定义，就称该信号在此区间内为连续时间信号，简称连续信号；仅在离散时间点上有定义的信号称为离散时间信号，简称离散信号。

（2）确定信号与随机信号

确定信号是指能够以确定的时间函数表示的信号，即给定某一时间值，就能得到一个确定的信号值；随机信号是指信号是时间的随机函数，即给定某一时间值，其函数值并不确定。

（3）周期信号与非周期信号

对于连续信号 $f(t)$，若存在 $T>0$，使得 $f(t+rT)=f(t)$，r 为整数，则称 $f(t)$ 为周期信号；对于离散信号 $f(n)$，若存在大于零的整数 N，使得 $f(n+rN)=f(n)$，r 为整数，则称 $f(n)$ 为周期信号。不满足周期信号定义的信号称为非周期信号。

1）几个周期信号相加而成的信号的周期问题

几个周期信号相加，所产生的信号可能是周期信号，也可能是非周期信号，这主要取决于几个周期信号的周期之间是否存在最小公倍数 T_0。以周期分别为 T_1、T_2(角频率分别为 Ω_1、Ω_2)的两个信号相加产生的信号 $f(t)$ 为例，如果 $\frac{\Omega_1}{\Omega_2}=\frac{T_2}{T_1}=\frac{n_1}{n_2}=$ 有理数，n_1、n_2 均为整数，则 $f(t)$ 为周期信号，其周期

$$T_0=n_1T_1=n_2T_2=n_1\frac{2\pi}{\Omega_1}=n_2\frac{2\pi}{\Omega_2} \tag{1-1}$$

2）离散正(余)弦信号的周期问题

时域连续的正(余)弦信号一定是周期信号，但时域离散的正(余)弦信号不一定是周期信号，要求周期 N 为正整数。例如：$\sin\frac{2}{5}\pi n$ 为周期信号，因为周期 N 为 5；$\sin\frac{2}{5}n$ 为非周期信号，因为 5π 不是整数。

（4）能量信号与功率信号

归一化能量为有限值，归一化功率为零的信号为能量信号，即满足 $0<W<\infty$，$P=0$；

归一化功率为有限值，归一化能量为无限大的信号为功率信号，即满足 $W\to\infty$，$0<P<\infty$。一般，周期信号为功率信号。

（5）实信号与复信号

在各时刻 t(或 n)上的信号幅值为实数的信号为实信号；信号幅值为复数的信号为复信号。

2. 常用连续信号及其性质

（1）单位阶跃信号

单位阶跃信号用 $u(t)$ 表示，定义为

$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{1-2}$$

（2）单位冲激信号

单位冲激信号用 $\delta(t)$ 表示，其狄拉克(Dirac)定义为

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\\ \delta(t)=0,\ t\neq 0\end{cases} \tag{1-3}$$

冲激信号具有如下性质：

1）筛选性

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t) \tag{1-4}$$

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0) \tag{1-5}$$

2）取样性

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0) \tag{1-6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0) \tag{1-7}$$

3）尺度变换

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{1-8}$$

$$\delta'(at)=\frac{1}{|a|}\frac{1}{a}\delta'(t) \tag{1-9}$$

以及 $\delta(at)$ 的 n 阶导数为

$$\delta^{(n)}(at)=\frac{1}{|a|}\frac{1}{a^n}\delta^{(n)}(t) \tag{1-10}$$

4）奇偶性

利用式(1-10)分析 $\delta(t)$ 的奇偶性是比较方便的。令 $a=-1$，得

$$\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\delta^{(n)}(t) \tag{1-11}$$

n 为偶数时，有

$$\delta^{(n)}(-t)=\delta^{(n)}(t),\ n=0,2,4,\cdots \tag{1-12}$$

n 为奇数时，有

$$\delta^{(n)}(-t)=-\delta^{(n)}(t),\ n=1,3,5,\cdots \tag{1-13}$$

这样，得到：

$$\delta(-t)=\delta(t) \tag{1-14}$$

$$\delta'(-t)=-\delta'(t) \tag{1-15}$$

即$\delta(t)$是偶函数，而$\delta'(t)$是奇函数。

5）$\delta(t)$与$u(t)$互为微分与积分的关系：

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-16}$$

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) \tag{1-17}$$

6）复合函数形式的冲激信号

对于形如$\delta[f(t)]$的冲激信号，若$f(t)=0$有m个互不相等的实根（如果$f(t)=0$有重根，$\delta[f(t)]$没有意义），则有

$$\delta[f(t)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i) \tag{1-18}$$

（3）单位冲激偶函数

1）单位冲激偶函数的定义

单位冲激偶函数可通过对矩形脉冲求一阶导数再取极限引出其定义。脉宽为τ、幅度为$\frac{1}{\tau}$的矩形脉冲为$f(t)=\frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$，其导数为$f'(t)=\frac{1}{\tau}\left[\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$，波形如图1-1所示。

可见，$f'(t)$是一正一负两个强度均为$\frac{1}{\tau}$的冲激信号。$\lim\limits_{\tau\to 0}f'(t)=\delta'(t)$称为单位冲激偶函数。

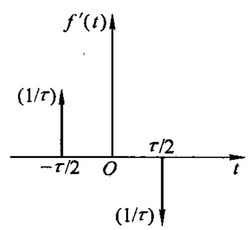

图1-1　对矩形脉冲求导的波形

2）单位冲激偶函数的性质

① 因为$\delta'(t)$是奇函数，所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\mathrm{d}t=0 \tag{1-19}$$

②
$$\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau=\delta(t) \tag{1-20}$$

③
$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t) \tag{1-21}$$

推广，有

$$f(t)\delta'(t-t_0)=f(t_0)\delta'(t-t_0)-f'(t_0)\delta(t-t_0) \tag{1-22}$$

④
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t)\mathrm{d}t=-f'(0) \tag{1-23}$$

推广，有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta^{(n)}(t)\mathrm{d}t=(-1)^n f^{(n)}(0) \tag{1-24}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t-t_0)\mathrm{d}t=-f'(t_0) \tag{1-25}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta^{(n)}(t-t_0)\mathrm{d}t=(-1)^n f^{(n)}(t_0) \tag{1-26}$$

（4）斜坡信号

单位斜坡信号用$r(t)$表示，其定义为

$$r(t)=tu(t)=\begin{cases}t, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0\end{cases} \tag{1-27}$$

$r(t)$ 与 $u(t)$ 之间的关系为：

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-28}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)=u(t) \tag{1-29}$$

(5) 符号函数 $\mathrm{sgn}(t)$

符号函数用 $\mathrm{sgn}(t)$ 表示，其定义为

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases} \tag{1-30}$$

(6) 取样信号

取样信号用 $Sa(t)$ 表示，其定义为

$$Sa(t)=\frac{\sin t}{t},\quad -\infty<t<\infty \tag{1-31}$$

取样信号具有如下性质：

1) $$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1 \tag{1-32}$$

2) $$Sa(k\pi)=0,\ k=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots \tag{1-33}$$

3) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\pi \tag{1-34}$$

3. 常用离散信号及其性质

(1) 单位序列 $\delta(n)$

单位序列用 $\delta(n)$ 表示，其定义为

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \tag{1-35}$$

单位序列具有如下性质：

1) $$f(n)\delta(n)=f(0)\delta(n) \tag{1-36}$$

2) $$f(n)\delta(n-n_0)=f(n_0)\delta(n-n_0) \tag{1-37}$$

(2) 单位阶跃序列 $u(n)$

单位阶跃序列用 $u(n)$ 表示，其定义为

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases} \tag{1-38}$$

若将 $u(n)$ 移位 n_0，得

$$u(n-n_0)=\begin{cases}1, & n\geqslant n_0\\ 0, & n<n_0\end{cases} \tag{1-39}$$

单位阶跃序列与单位序列之间的关系：

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{1-40}$$

$$u(n) = \sum_{j=-\infty}^{n} \delta(j) \tag{1-41}$$

或者

$$u(n) = \sum_{j=-\infty}^{n} \delta(j) = \sum_{i=\infty}^{0} \delta(n-i) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(n-i) \tag{1-42}$$

4. 连续信号的基本运算

（1）信号的相加和相乘

信号的运算从数学意义上来说，就是将信号经过一定的数学运算转变为另一信号。两个信号相加，其和信号在任意时刻的信号值等于两信号在该时刻的信号值之和

$$f(\cdot) = f_1(\cdot) + f_2(\cdot) \tag{1-43}$$

两个信号相乘，其积信号在任意时刻的信号值等于两信号在该时刻的信号值之积

$$f(\cdot) = f_1(\cdot) f_2(\cdot) \tag{1-44}$$

（2）信号的平移

将信号沿时间轴作平移，得到一个新的信号。对于连续信号$f(t)$，若有常数$t_0>0$，信号$f(t-t_0)$是将原信号沿正t轴平移t_0时间，而$f(t+t_0)$是将原信号沿负t轴平移t_0时间。

（3）信号的尺度变换与反转

将信号$f(t)$的横坐标的尺寸展宽或压缩称为信号的尺度变换。可用变量at(a为非零常数)替代原信号$f(t)$的自变量t，得到信号$f(at)$。

如果a为正数，当$a>1$时，$f(at)$是将$f(t)$以原点为基准，横轴压缩到原来的$\frac{1}{a}$倍；当$0<a<1$时，$f(at)$是将$f(t)$横轴展宽至原来的$\frac{1}{a}$倍。

信号的反转是将信号$f(t)$中的自变量t换为$-t$，即将信号绕纵轴作180°反转。把原信号$f(t)$在t时刻的值变换为$-t$时刻的值。

（4）信号的导数和积分

信号的导数定义为

$$y(t) = \frac{\mathrm{d}[f(t)]}{\mathrm{d}t} \tag{1-45}$$

信号的积分定义为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1-46}$$

（5）信号的时域分解

1）信号的奇偶分解

信号的偶分量用$f_e(t)$表示，其定义为

$$f_e(t) = f_e(-t) \tag{1-47}$$

信号的奇分量用$f_o(t)$表示，其定义为

$$f_o(t) = -f_o(-t) \tag{1-48}$$

任意一个信号都可以表示成奇分量和偶分量之和

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t) \tag{1-49}$$

则有：

$$f_e(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)] \tag{1-50}$$

$$f_o(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)] \tag{1-51}$$

信号及信号的奇分量和偶分量如图 1-2 所示。

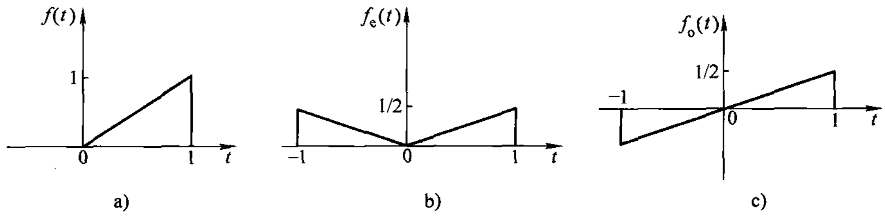

图 1-2　信号及信号的奇、偶分量

2）信号的脉冲分解

任意一个连续信号都可以用脉冲信号相叠加来近似表示，如图 1-3a 所示。

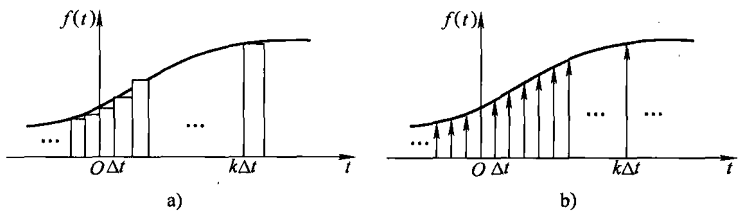

图 1-3　信号$f(t)$分解成窄脉冲

每个矩形脉冲可以表示为

$$f_k(t)=f(k\Delta t)\{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]\}$$

则

$$f(t)\approx\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k\Delta t)\frac{[u(t-k\Delta t)-u(t-k\Delta t-\Delta t)]}{\Delta t}\Delta t$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，$k\Delta t\to\tau$，$\Delta t\to \mathrm{d}\tau$，则

$$\frac{u(t-k\Delta t)-u(t-k\Delta t-\Delta t)}{\Delta t}\to\delta(t-\tau)$$

所以

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-52}$$

在时域中，任意信号可以分解为无限多个冲激信号相叠加，如图 1-3b 所示。式(1-52)的积分称为卷积积分。

（6）信号的卷积积分

1）卷积积分的定义

一般而言，两个信号$f_1(t)$、$f_2(t)$的卷积积分定义为

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-53}$$

简称卷积，记作$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$。

2）卷积积分的代数性质

① 交换律

设有$f_1(t)$和$f_2(t)$两个信号，则

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t) \tag{1-54}$$

② 分配律

设有$f_1(t)$、$f_2(t)$和$f_3(t)$三个信号，则

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t) \tag{1-55}$$

③ 结合律

设有$f_1(t)$、$f_2(t)$和$f_3(t)$三个信号，则

$$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t) \tag{1-56}$$

3）卷积积分的微积分性质

① 卷积积分后的微分性质

两个信号卷积积分后的导数等于两信号之一的导数与另一信号的卷积积分，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}*f_2(t) \tag{1-57}$$

② 卷积积分后的积分性质

如果$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$，则

$$f^{(i)}(t)=f_1^{(j)}(t)*f_2^{(i-j)}(t) \tag{1-58}$$

式中，当i或j取正整数时表示导数的阶数，取负整数时表示重积分的次数。

4）卷积的平移性质

两个信号平移后的卷积积分，等于两个信号卷积积分后平移，其平移量为两个信号分别平移量的和。

如果 $$f_1(t)*f_2(t)=f(t)$$

则有 $$f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=f(t-t_1-t_2) \tag{1-59}$$

5）与冲激信号或阶跃信号的卷积积分

信号$f(t)$与单位冲激信号$\delta(t)$卷积积分的结果是信号$f(t)$本身，即

$$f(t)*\delta(t)=f(t) \tag{1-60}$$

利用卷积的平移性质，有

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0) \tag{1-61}$$

利用卷积的微积分特性，可以得到以下结论。

对于冲激偶$\delta'(t)$，有

$$f(t)*\delta'(t)=f'(t) \tag{1-62}$$

推广到一般情况，可得

$$f(t)*\delta^{(k)}(t)=f^{(k)}(t) \tag{1-63}$$

$$f(t)*\delta^{(k)}(t-t_0)=f^{(k)}(t-t_0) \tag{1-64}$$

对于单位阶跃信号$u(t)$，有

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-65}$$

对于两个因果信号，有

$$f_1(t)u(t)*f_2(t)u(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-66}$$

表 1-1 列出了常用的卷积积分性质，以供查阅。

表 1-1　常用的卷积积分性质

序号	性　质	公　式
1	交换律	$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$
2	分配律	$f(t)=f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$
3	结合律	$f(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$
4	微分性质	$f'(t)=f_1'(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2'(t)$
5	积分性质	$f^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)$
6	微积分性质	$f(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2'(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)$
7	平移性质	$f_1(t-a)*f_2(t-b)=f(t-a-b)$
8	与冲激信号	$f(t)=f(t)*\delta(t)$，$f^{(k)}(t)=f(t)*\delta^{(k)}(t)$
9	与阶跃信号	$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$, $f_1(t)\varepsilon(t)*u(t)=\int_0^t f_1(\tau)\mathrm{d}\tau$
10	持续时间	$f(t)$的开始时间 $=f_1(t)$的开始时间 $+f_2(t)$的开始时间 $f(t)$的结束时间 $=f_1(t)$的结束时间 $+f_2(t)$的结束时间 $f(t)$的持续时间 $=f_1(t)$的持续时间 $+f_2(t)$的持续时间
11	面积性质	$f(t)$的面积 $=f_1(t)$和$f_2(t)$面积的乘积

5. 离散信号的基本运算

（1）序列相加

$$f(n)=f_1(n)+f_2(n) \tag{1-67}$$

（2）序列相乘

$$f(n)=f_1(n)f_2(n) \tag{1-68}$$

（3）序列$f(n)$的平移$f(n-n_0)$

当$n_0>0$，信号$f(n-n_0)$是将$f(n)$序列沿正n轴平移n_0个单位，称为$f(n)$的延迟序列；$f(n+n_0)$是将$f(n)$序列沿负n轴平移n_0个单位，称为$f(n)$的超前序列。

（4）序列$f(n)$的尺度变换$f(mn)$

当$|m|>1$时，$f(mn)$是$f(n)$序列每隔m点取一点形成的，相当于时间轴n压缩了m倍，简称抽取；当$|m|<1$时，$f(mn)$是$f(n)$序列每两点之间插入m个0，相当于时间轴n扩展了m倍，简称插值；当$m=-1$时，$f(-n)$是将$f(n)$序列绕纵轴作180°反转，称为$f(n)$的反转序列。

（5）序列差分

一阶前向差分　$$\Delta f(n)=f(n+1)-f(n) \tag{1-69}$$

二阶前向差分　$$\Delta^2 f(n)=\Delta[\Delta f(n)]=\Delta f(n+1)-\Delta f(n)=f(n+2)-2f(n+1)+f(n) \tag{1-70}$$

一阶后向差分　$$\nabla f(n)=f(n)-f(n-1) \tag{1-71}$$

二阶后向差分　$$\nabla^2 f(n)=\nabla[\nabla f(n)]=\nabla f(n)-\nabla f(n-1)=f(n)-2f(n-1)+f(n-2) \tag{1-72}$$

（6）序列求和

$$f(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i) \tag{1-73}$$

几个典型的累加和：

1）
$$\sum_{i=-\infty}^{n} \delta(i) = u(n) \tag{1-74}$$

2）
$$\sum_{i=-\infty}^{n} u(i) = (n+1)u(n) \tag{1-75}$$

3）
$$\sum_{i=-\infty}^{n} iu(i) = \frac{1}{2}n(n+1)u(n) \tag{1-76}$$

4）
$$\sum_{i=-\infty}^{n} a^i u(i) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n),\ a \neq 1 \tag{1-77}$$

（7）序列的时域分解

1）序列的脉冲分解

任意离散序列 $f(n)$ 可用单位序列及其移位序列表示，即

$$\begin{aligned} f(n) &= \cdots + f(-2)\delta(n+2) + f(-1)\delta(n+1) + f(0)\delta(n) \\ &\quad + f(1)\delta(n-1) + \cdots + f(i)\delta(n-i) + \cdots \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)\delta(n-i) \end{aligned} \tag{1-78}$$

可见，任意离散序列在时域可表示为 $\delta(n-i)$ 的线性组合。

2）序列的奇偶分解

对于无限长序列，用 $f_e(n)$ 表示共轭对称序列，有

$$f_e(n) = f_e^*(-n) \tag{1-79}$$

用 $f_o(n)$ 表示共轭反对称序列，有

$$f_o(n) = -f_o^*(-n) \tag{1-80}$$

一般序列都可用共轭对称序列和共轭反对称序列之和表示，即

$$f(n) = f_e(n) + f_o(n) \tag{1-81}$$

所以：

$$f_e(n) = \frac{1}{2}[f(n) + f^*(-n)] \tag{1-82}$$

$$f_o(n) = \frac{1}{2}[f(n) - f^*(-n)] \tag{1-83}$$

对于有限长序列，用 $f_{ep}(n)$ 表示有限长共轭对称序列，有

$$f_{ep}(n) = f_{ep}^*(N-n),\ 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{1-84}$$

用 $f_{op}(n)$ 表示有限长共轭反对称序列，有

$$f_{op}(n) = -f_{op}^*(N-n),\ 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{1-85}$$

任何有限长序列都可用共轭对称序列和共轭反对称序列之和表示，即

$$f(n) = f_{ep}(n) + f_{op}(n),\ 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{1-86}$$

所以：

$$f_{ep}(n) = \frac{1}{2}[f(n) + f^*(N-n)] \tag{1-87}$$

$$f_{op}(n)=\frac{1}{2}[f(n)-f^*(N-n)] \tag{1-88}$$

各序列如图 1-4 所示。

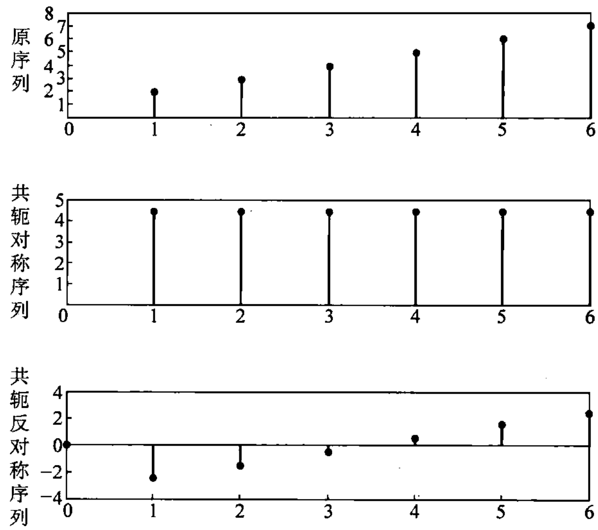

图 1-4　有限长序列及其共轭对称、共轭反对称序列

（8）卷积和

1）卷积和的定义

一般而言，两个序列$f_1(n)$与$f_2(n)$的卷积和定义为

$$f(n)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}f_1(i)f_2(n-i)=f_1(n)*f_2(n) \tag{1-89}$$

如果$f_1(n)$与$f_2(n)$均为因果序列，则有

$$f_1(n)*f_2(n)=\sum_{i=0}^{n}f_1(i)f_2(n-i) \tag{1-90}$$

2）卷积和的性质

① 离散信号的卷积和运算服从交换律、结合律和分配律，即

$$f_1(n)*f_2(n)=f_2(n)*f_1(n) \tag{1-91}$$

$$f_1(n)*[f_2(n)*f_3(n)]=[f_1(n)*f_2(n)]*f_3(n) \tag{1-92}$$

$$f_1(n)*[f_2(n)+f_3(n)]=f_1(n)*f_2(n)+f_1(n)*f_3(n) \tag{1-93}$$

② 任一序列$f(n)$与单位序列$\delta(n)$的卷积和等于序列$f(n)$本身，即

$$f(n)*\delta(n)=\delta(n)*f(n)=f(n) \tag{1-94}$$

$$f(n)*\delta(n-n_1)=f(n-n_1) \tag{1-95}$$

③ 若$f(n)=f_1(n)*f_2(n)$，则

$$f_1(n-n_1)*f_2(n-n_2)=f(n-n_1-n_2) \tag{1-96}$$

1.2　精选例题

例 1-1　画出下列信号波形。

(1) $f(t)=\int_0^t \delta(\cos\pi\tau)\mathrm{d}\tau$

(2) $f(n)=nu(n)-4\sum_{k=1}^{\infty}u(n-4k)$

解:

(1) $f(t)=\int_0^t \delta(\cos\pi\tau)\mathrm{d}\tau$

$$=\int_0^t[\delta(\tau-0.5)+\delta(\tau-1.5)+\delta(\tau-2.5)+\cdots]\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t\delta(\tau-0.5)\mathrm{d}\tau+\int_0^t\delta(\tau-1.5)\mathrm{d}\tau+\int_0^t\delta(\tau-2.5)\mathrm{d}\tau+\cdots$$

$$=u(t-0.5)+u(t-1.5)+u(t-2.5)+\cdots$$

波形如图 1-5a 所示。

(2) $f(n)=nu(n)-4\sum_{k=1}^{\infty}u(n-4k)$

$$=nu(n)-4u(n-4)-4u(n-8)-4u(n-12)-\cdots$$

波形如图 1-5b 所示。

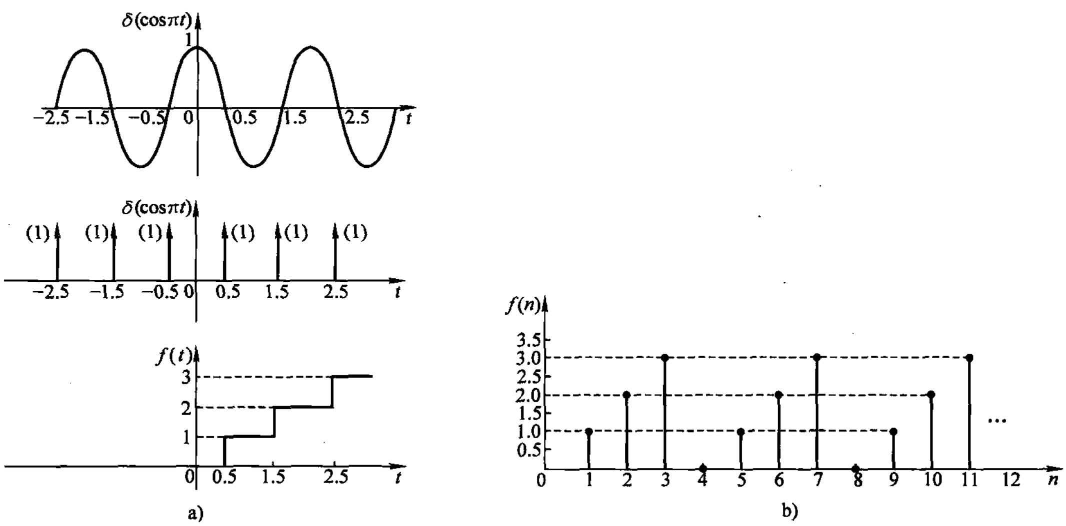

图 1-5 例 1-1 解图

例 1-2 判断下列信号是否为周期信号？若是周期信号，则确定其周期 T。

(1) $f_1(t)=1+3\sin(\pi t)+\sin(2\pi t)$

(2) $f_2(t)=\cos(2\pi t)-\cos(5t)$

(3) $f_3(n)=2\sin\left(\frac{3}{4}n+\frac{\pi}{6}\right)$

解:

(1) $\frac{n_1}{n_2}=\frac{\Omega_1}{\Omega_2}=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$