编委会主任　王玉文

高等院校教师教育数学系列教材

数学分析选讲

主　编　刘新波

副主编　赵淑波　李立伟　徐镇红

哈爾濱工業大學出版社

高等院校教师教育数学系列教材

数学分析选讲

主　编　刘新波
副主编　赵淑波　李立伟　徐镇红

哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

本书是按照高等师范院校《数学分析选讲》教学大纲的要求编写而成的，全书共分为6章，主要内容有：极限理论，单变量微分学，单变量积分学，级数理论，多变量微分学，多变量积分学。

本书可作为高等师范院校数学专业的教材或教学参考书，也可以作为考研学生的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析选讲/刘新波主编．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009.3
（高等院校教师教育数学系列教材）
ISBN 978-7-5603-2754-9

Ⅰ.数…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.数学分析-高等学校-教材
Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第116857号

策划编辑　杜　燕
责任编辑　杜　燕
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　肇东粮食印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张20　字数395千字
版　　次　2009年3月第1版　2009年3月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2754-9
印　　数　1～2 000册
定　　价　38.00元

序

普通高中课程改革是基础教育改革的重要组成部分。随着高中数学课程改革的推进，将有越来越多的一线数学教师、数学教研员和未来的数学教师面对新的数学课程。传统的高等师范院校的数学课程通常很少顾及到高中数学的内容与方法。但是2004年启动的普通高中课程改革的实验，是在《普通高中数学课程标准(实验)》的基础上进行的。无论是高中数学必修课程还是高中数学选修课程，都有现代数学的内容、思想、方法及数学史的渗透。为了适应高中数学课程改革的需要，作为培养高中未来数学教师的高等师范院校，或综合大学的师范学院的数学与应用数学专业(师范类)，其数学课程必须适应这种改革。为此，黑龙江省高师数学会教育研究会继《高师院校数学系列教材》之后，在教学实践基础上，又组织编写了这套《高等院校教师教育数学系列教材》。

这套系列教材包括基础数学、应用数学、概率与统计、数学史、数学教育等专业的本科教材。其中有《近世代数》、《高等几何》、《数学分析选讲》、《简明数学史》、《高等代数选讲》、《解析几何》、《实变函数》、《简明数学逻辑》、《现代数学思想概论》、《简明概率与统计》、《数学建模》、《通信编码与信息安全》等。在这套系列教材中，力求将新的普通高中数学课程标准规定的选修课中现代数学内容、方法纳入相应教材的正文或附录中。这套系列教材可以作为高等院校数学教师教育的本科数学教材，其中部分教材可供教育硕士选作教材和学科教学(数学)的参考书。

由于编著者的水平有限，加之面对高中数学新课程标准编写本科数学教材是一种新的尝试，丛书中会有不妥或疏漏之处，恳切地希望广大教师和读者提出建议和批评。让我们一起携手，为建立适应高中数学新课程标准的教师教育本科数学课程标准体系作出贡献！

王玉文

2007年6月

前　言

《数学分析》是数学系各专业的一门重要基础课，这门课程的特点是：概念难懂，方法抽象，解题难以入手，思维难以展开；同时，因为它对许多后续的课程有直接的重要的影响，关系到学生整体数学素质的培养和提高，关系到整个数学系教学的成败，这使得这门课程的重要性更显突出，作为这门学科的教育工作者，我们的责任更显重大，任务更显艰巨。在教学实践中，我们发现，学生们学习教材的基本知识困难不是很大，但是，随着全球经济的一体化进程的加快，人才竞争也步入国际化，为适应竞争，大家都急需充电，提高素质，提升学历，本书旨在帮助学生从总体上把握数学分析框架，总结归纳知识体系，对教材中的考点融会贯通，给考这门课程的同学尤其是考研究生的同学以更丰富的实用的题解信息。

本书名为《数学分析选讲》，其目的是作为《数学分析》这门课的提高与补充。其主要特点是：

实用性　本书涉及北京大学，清华大学，北京师范大学，哈尔滨工业大学，复旦大学，南开大学，武汉大学，中国科学院，华东师范大学，东北师范大学等很多名牌权威高等学校及科学院的考研试题，例题和习题大部分都采用了各高等院校的考研真题，这样就帮助学生们或多或少地了解所关注学校的考题特点。

时效性　本书本着与时俱进的原则，例题和习题大部分都是2000年以后的试题，题目比较新，使学生更容易了解考研试题的动向和发展。

框架清晰　全书分为两大部分：单变量部分和多变量部分，共6章。内容包括：极限理论，一元函数微分学，一元函数积分学，级数理论，多元函数微分学，多元函数积分学。有利于学生从总体上把握学科体系。

结构简洁　每节都分为三部分：基本概念和基本理论，典型例题，习题。基本概念和基本理论适合教师和学生做总结性、概括性讲解或学习；典型例题部分，力求基本题型全面，在此基础上有所拔高，难易有层次；习题部分是按

照几个有意义的主题来安排的，尽可能地把有紧密联系的题编在一起，除了和例题相呼应外，还有很多比较新颖，难度大的，适应不同层次学生的需要。另外，本书最后还给了所有习题的答案或提示，便于学生自学。

本书集知识性，资料性，方法性，应考性于一体，它不仅是考研学生的好帮手，还是理工科学生的参考资料，可以作为《数学分析》课的后继教材使用，也可以作为考研学生的选修课教材。

参与本书编写工作的有：哈尔滨师范大学数学系刘新波（前言、第4章和第6章），赵淑波（第1章），李立伟（第2章和第3章），黑龙江幼儿师范高等专科学校数理系徐镇红（第5章）。

本书在编写过程中，多次得到王玉文教授的指导和帮助，在此表示衷心的感谢！

由于编者经验不足和学识所限，本书的疏漏之处在所难免，希望广大同行和读者给与热心的批评和指正。

编　者

2008年4月

目　　录

第 1 章　极限理论

1.1　初等函数

1.1.1　基本概念与基本理论

1. 函数概念

给定两个实数集 D,M，若按照某一确定的对应法则 f，对 $\forall x\in D$，存在唯一的 $y\in M$ 与之对应，则称 f 是定义在数集 D 上的函数，记作

$$f: D\to M$$
$$x\mapsto y$$

称 D 为函数 f 的定义域，$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 为函数 f 的值域.

2. 函数的运算

四则运算、复合运算、反函数运算.

3. 特殊类型的函数

(1) 有界函数、单调函数、周期函数、奇函数和偶函数.

(2) 基本初等函数：

常量函数　$y=c,x\in(-\infty,+\infty)$.

幂函数　$y=x^{\alpha},x\in(0,+\infty)$，$\alpha$ 为常数.

指数函数　$y=a^{x},x\in(-\infty,+\infty)(a>0,a\neq1)$.

对数函数　$y=\log_{a}x$，$x\in(0,+\infty)(a>0,a\neq1)$，其中 a 为已知常数.

三角函数　正弦函数、余弦函数、正切函数与余切函数.

反三角函数　反正弦函数、反余弦函数、反正切函数与反余切函数.

(3) 初等函数　由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数.

双曲函数　双曲正弦 $\sinh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$，双曲余弦 $\cosh x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$，双曲

正切 $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$，双曲余切 $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$.

(4) 非初等函数　不是初等函数的函数.

4. 重要的非初等函数

(ⅰ) 符号函数 sgn x

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

注　$|x| = x\operatorname{sgn} x$.

(ⅱ) 取整函数 $[x]$ 和尾数函数 (x)

$[x]$ 表 x 最大整数部分，$x - 1 < [x] \leqslant x$，(x) 表 x 非负小数部分，$0 \leqslant (x) < 1$，因此有

$$x = [x] + (x)$$

(ⅲ) Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

(ⅳ) Riemann 函数(定义在 $[0,1]$)

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & x = \dfrac{p}{q} \\ 0 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q},\ x = 0,1 \end{cases}$$

其中，$p, q \in \mathbf{N}_+$，$\dfrac{p}{q}$ 为既约分数.

1.1.2　典型例题

【例 1】　设 f 定义在 $[-a,a]$ 上，证明：f 在 $[-a,a]$ 上可表示为奇函数与偶函数的和.

证　取 $G(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$，$H(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$，$\forall x \in [-a, a]$，则 $G(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = G(x)$，因而 G 是 $[-a,a]$ 上的偶函数. 同理可证 H 为 $[-a,a]$ 上的奇函数，且有表示式 $f(x) = G(x) + H(x)$.

【例 2】　设 f, g 为区间 (a,b) 上的单调递增函数.

证明：$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 为 (a,b) 上的递增函数.

证　令 $x_1 \leqslant x_2$，由 f, g 在 (a,b) 上递增，从而有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \leqslant \max\{f(x_2), g(x_2)\} = \varphi(x_2)$$

和 $$g(x_1) \leqslant g(x_2) \leqslant \max\{f(x_2), g(x_2)\} = \varphi(x_2)$$
因此，$\varphi(x_1) = \max\{f(x_1), g(x_1)\} \leqslant \varphi(x_2)$. 故 $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 为 (a, b) 上的递增函数.

【例 3】 证明：函数 $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的有界函数.

证 $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{2x e^{x^2}} = \dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{x^2}} = \dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x e^{x^2}} = 0$. 于是，取 $\varepsilon = 1$，则存在 $M > 0$，当 $|x| > M$ 时，$|f(x)| = |x^3 e^{-x^2}| < 1$.

又由于 f 在 $[-M, M]$ 上连续，因此在 $[-M, M]$ 上有界，即存在 $G_1 > 0$，使得
$$|f(x)| \leqslant G_1 \quad \forall x \in [-M, M]$$
取 $G = \max\{G_1, 1\}$，则 $|f(x)| \leqslant G, \forall x \in \mathbf{R}$. 故 f 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

【例 4】 研究 Dirichlet 函数的基本特性.

解 $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$.

(1) 单调性：不具有单调性.

对于无理数 x_1，有理数 x_2，无论 x_1, x_2 的大小关系，始终成立 $D(x_1) < D(x_2)$.

(2) 有界性：$|D(x)| \leqslant 1$，$x \in \mathbf{R}$.

(3) 周期性：任意的有理数 r 都是 $D(x)$ 的周期.

因为当 $x \in \mathbf{Q}$ 时，$x + r \in \mathbf{Q}$，当 $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ 时，$x + r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$，于是 $D(x + r) = D(x)$，故 $D(x)$ 没有最小正周期. 取点 $x_0 \in \mathbf{Q}$，同上面讨论，可证无理数不是 $D(x)$ 的周期.

(4) 奇偶性：$D(x)$ 为偶函数. 因为 $D(-x) = D(x)$，$\forall x \in \mathbf{R}$.

习　　题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$，求 $f\{f[f(x)]\}$ 的表达式.

2. 设 f，g 为区间 (a, b) 上单调递增函数，证明：$\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 为 (a, b) 上的递增函数.

3. 证明：(1) $\max\{f(x),\ g(x)\} = \dfrac{1}{2}\{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\}$；

(2) $\min\{f(x),\ g(x)\} = \dfrac{1}{2}\{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\}$.

4. 把下列定义在正半轴上的函数延拓到整个实轴上去，分别使它们成为奇函数和偶函数.

(1) $y = x^2$;

(2) $y = \sin x$.

5. 设 $f(x) = x - [x]$, 讨论它的单调性, 有界性, 周期性.

6. 设函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 在区间 $[0,2]$ 上, $f(x) = x(x^2-4)$, 若对任意的 x 都满足 $f(x) = kf(x+2)$, 其中 k 为常数.

(1) 写出 f 在 $[-2,0)$ 上的表达式;

(2) 问 k 为何值时, f 在 $x = 0$ 处可导.

7. 设 (a,b) 上的连续函数 f 处处有右导数 f'_+, 求证: $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$, 有 $\inf\limits_{x \in (x_1,x_2)} f'_+(x) \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \sup\limits_{x \in (x_1,x_2)} f'_+(x)$. (哈尔滨师范大学, 2000 年)

8. 讨论非初等函数: 符号函数 $\operatorname{sgn} x$、取整函数 $[x]$、Dirichlet 函数、Riemann 函数的单调性, 周期性, 奇偶性, 有界性, 连续性, 可导性, 可积性.

1.2　数列极限

1.2.1　基本概念与基本理论

1. 基本概念

定义 1　(数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义)

设 $\{a_n\}$ 为数列, a 为一确定实数, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, $\forall n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

定义 1′　任给 $\varepsilon > 0$, 若 $U(a,\varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项至多只有有限个, 则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于极限 a.

若数列 $\{a_n\}$ 以零为极限, 则称 $\{a_n\}$ 为当 $n \to \infty$ 时的无穷小量.

若数列 $\{a_n\}$ 没有极限, 则称 $\{a_n\}$ 发散.

定义 2　设 $\{a_n\}$ 为数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall G > 0$, $\exists N > 0$, $\forall n > N$ 时, 有 $|a_n| > G$.

定义 3　设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 将极限 $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{n>k}\{a_n\} = M$, $\lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{n>k}\{a_n\} = m$ 分别称为数列 $\{a_n\}$ 的上、下极限, 并分别记作 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, 即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n>k}\{a_n\} = \inf_{k\geqslant 1} \sup_{n>k}\{a_n\} = M$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n>k}\{a_n\} = \sup_{k\geqslant 1} \inf_{n>k}\{a_n\} = m$$

注 1 上极限与下极限的关系 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

注 2 一个有界数列,其极限不一定存在,但其上极限与下极限均存在,此恰是引进数列的上极限与下极限的意义所在.

规定:若数列$\{a_n\}$无上界,则定义$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = +\infty$;

若数列$\{a_n\}$无下界,则定义$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = -\infty$.

注3 上下极限与极限的关系 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = a$,其中 a 为有限数,或 $+\infty$,或 $-\infty$.

2. 收敛数列的性质

(1) 存在性 数列极限存在性的三个定理:单调有界定理、迫敛性定理(两边夹定理)、柯西收敛准则(完备性定理).

(2) 唯一性.

(3) 有界性.

(4) 保号性.

(5) 不等式性.

(6) 四则运算法则.

(7) 绝对值性.

(8) 子列定理 数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow\{a_n\}$的任何非平凡子列都收敛.

注 1 数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$的奇子列$\{a_{2k-1}\}$、偶子列$\{a_{2k}\}$均收敛,且收敛于同一个数.

注 2 数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$的奇子列$\{a_{2k-1}\}$、偶子列$\{a_{2k}\}$和$\{a_{3k}\}$都收敛.

(9) 开平方性 设 $a_n \geqslant 0$,若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

(10) 黎曼引理 设函数 f 在区间$[a,b]$上可积且绝对可积,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0,\ \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0$$

(北京理工大学,2005 年)

3. 常用的几个重要极限

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = \mathrm{e}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1(a>0)$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$;

$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=1$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin n=0$;

$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$;

$\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0(|q|<1)$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n^\alpha}=0(\alpha\geqslant 1)$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

4. **Stolz 定理**

Stolz 第一定理 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\{b_n\}$递减且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=l$，其中$l$为有限数，或$+\infty$，或$-\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=l$.

Stolz 第二定理 设$\{a_n\}$为任一数列，$\{b_n\}$递增且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=l$，其中$l$为有限数，或$+\infty$，或$-\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=l$.

1.2.2 典型例题

【例 1】 (1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

(2) 已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n}=\sqrt[3]{a}$.（哈尔滨工业大学,2002 年;武汉大学,2001 年）

(1) 证法一 $\varepsilon-N$定义

当$n>1$时，$\sqrt[n]{n}>1$，记$\sqrt[n]{n}=1+a_n(a_n>0)$，则$n=(1+a_n)^n\geqslant\dfrac{n(n-1)}{2}a_n^2$，$0\leqslant a_n\leqslant\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$，于是，对$\forall\varepsilon>0$，取$N=1+\dfrac{2}{\varepsilon^2}$，$\forall n>N$时，有$|\sqrt[n]{n}-1|=a_n\leqslant\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}<\varepsilon$.

证法二 迫敛性定理

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}=(\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}<\frac{2}{\sqrt{n}}+1\to 1$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

证法三　单调有界定理

当 $n \geqslant 3$ 时，数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 是单调递降的. 事实上 $\sqrt[n+1]{n+1} \leqslant \sqrt[n]{n} \Leftrightarrow (n+1)^n \leqslant n^{n+1} \Leftrightarrow (1+\frac{1}{n})^n \leqslant n$，$(n \geqslant 3)$. 又 $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$，故 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 是下有界的. 因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \geqslant 1$. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = a$，因 $\sqrt[2n]{2n} = \sqrt[n]{2^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{n^{\frac{1}{n}}}$，则 $a = 1 \cdot \sqrt{a} \Rightarrow a = 1$.

证法四　利用已知重要结论

利用结论：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$a_n > 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

取 $a_1 = 1, a_n = \frac{n}{n-1}(n \geqslant 2)$，则 $a_n \to 1$，又 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n-1} = n$，故

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \to 1$$

由上结论还可推出：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = b\ (b_n > 0)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = b \tag{$*$}$$

事实上，取 $a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}}$，$n \geqslant 2$，$a_1 = b_1$，则 $a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} \to b$，又 $a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \cdots \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} = b_n$，故

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \to b$$

(2) 证　当 $a = 0$ 时，$\forall \varepsilon > 0$，因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，则 $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n| < \varepsilon^3$，从而 $|\sqrt[3]{x_n} - 0| < \varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n} = 0 = \sqrt[3]{a}$$

当 $a \neq 0$ 时，$\forall \varepsilon > 0$，因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \frac{3}{4}(\sqrt[3]{a})^2\varepsilon$，从而

$$|\sqrt[3]{x_n} - \sqrt[3]{a}| = \frac{|x_n - a|}{(\sqrt[3]{x_n})^2 + \sqrt[3]{x_n}\sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2} =$$

$$\frac{|x_n - a|}{(\sqrt[3]{x_n} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{a})^2 + \frac{3}{4}(\sqrt[3]{a})^2} \leqslant$$