高等学校教材

高等数学

下册

郭大立 主编

谢祥俊 涂道兴 徐东胜 编

高等教育出版社

高 等 学 校 教 材

高 等 数 学

下　册

郭大立　主编
谢祥俊　涂道兴　徐东胜　编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据"工科类本科数学基础课程教学基本要求"编写的,分上、下两册出版。下册包括多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、微分方程,共四章,每章均设有数学实验和数学文化专题,书末还附有习题答案与提示。

本书以面向高等教育新形势、拓宽基础和视野、培养能力和素质、促进教育现代化为目标,对教材体系和教材内容进行了优化整合,并将数学建模与应用、数值计算、数学软件、数学实验、数学文化等有机地融入教材之中。本书内容简明直观,深入浅出,富有启发性;精选典型例题和应用实例,合理设置习题,便于教学与自学。

本书可作为高等院校工科类各专业的教材,也可作为教师及工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/郭大立主编. —北京: 高等教育出版社,2009.7

ISBN 978-7-04-027232-1

Ⅰ.高… Ⅱ.郭… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第077582号

策划编辑 王 强 **责任编辑** 李华英 **封面设计** 于文燕
责任绘图 吴文信 **版式设计** 史新薇 **责任校对** 刘 莉
责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	唐山市润丰印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2009年7月第1版
印　　张	16	**印　　次**	2009年7月第1次印刷
字　　数	290 000	**定　　价**	17.60元

物料号 27232-00

目　　录

第五章　多元函数微分学 …… 1
第一节　多元函数的极限与连续性 …… 1
一、多元函数的极限 …… 1
二、多元函数的连续性 …… 3
三、有界闭区域上多元连续函数的性质 …… 4
习题 5－1 …… 5
第二节　偏导数 …… 5
一、一阶偏导数 …… 5
二、高阶偏导数 …… 9
习题 5－2 …… 11
第三节　全微分 …… 12
一、全微分的概念 …… 12
二、多元函数可微分的条件 …… 13
习题 5－3 …… 19
第四节　多元函数的求导法则 …… 19
一、多元复合函数的求导法则 …… 19
二、隐函数的求导法则 …… 24
习题 5－4 …… 27
第五节　方向导数与梯度 …… 29
一、方向导数 …… 29
二、梯度 …… 32
习题 5－5 …… 33
第六节　多元函数微分学的几何应用 …… 34
一、空间曲线的切线与法平面 …… 34
二、曲面的切平面与法线 …… 36
习题 5－6 …… 39
第七节　多元函数的极值 …… 40
一、多元函数的极值与最大值、最小值 …… 40
二、条件极值 …… 44
习题 5－7 …… 51

数学实验(五) …… 51
一、问题的描述 …… 51
二、实验内容 …… 52
三、思考与练习 …… 55
数学文化(五) …… 55
一、偏导数的起源与演变 …… 55
二、欧拉 …… 55
第六章 多元函数积分学 …… 58
第一节 二重积分 …… 58
一、二重积分的概念 …… 58
二、二重积分的性质 …… 62
三、二重积分的计算 …… 65
习题6-1 …… 72
第二节 三重积分 …… 74
一、三重积分的定义与性质 …… 74
二、三重积分的计算 …… 77
习题6-2 …… 86
第三节 曲线积分 …… 87
一、第一类曲线积分 …… 87
二、第二类曲线积分 …… 92
习题6-3 …… 96
第四节 格林公式及其应用 …… 96
一、格林公式 …… 96
二、平面上曲线积分与路径无关的条件 …… 100
习题6-4 …… 103
第五节 第一类曲面积分 …… 104
一、第一类曲面积分的定义 …… 104
二、第一类曲面积分的性质及其对称性 …… 106
三、第一类曲面积分的计算 …… 106
习题6-5 …… 109
第六节 第二类曲面积分 …… 109
一、第二类曲面积分的定义与性质 …… 109
二、第二类曲面积分的计算 …… 113
三、高斯公式 …… 115
习题6-6 …… 117

第七节　多元函数积分学的物理应用 ………………………… 118
一、质心 ………………………………………………………… 118
二、转动惯量 …………………………………………………… 121
三、功 …………………………………………………………… 123
习题 6-7 ………………………………………………………… 124
数学实验(六) …………………………………………………… 125
一、问题的描述 ………………………………………………… 125
二、实验内容 …………………………………………………… 125
三、思考与练习 ………………………………………………… 126
数学文化(六) …………………………………………………… 126
一、多元函数积分学的发展历程 ……………………………… 126
二、高斯 ………………………………………………………… 127
第七章　无穷级数 …………………………………………… 130
第一节　常数项级数的概念与性质 ………………………… 130
一、常数项级数的概念 ………………………………………… 130
二、级数的基本性质 …………………………………………… 133
习题 7-1 ………………………………………………………… 135
第二节　常数项级数敛散性的判别法 ………………………… 135
一、正项级数及其敛散性的判别法 …………………………… 136
二、交错级数及其判别法 ……………………………………… 142
三、绝对收敛与条件收敛 ……………………………………… 143
习题 7-2 ………………………………………………………… 145
第三节　幂级数 ………………………………………………… 146
一、函数项级数的一般概念 …………………………………… 146
二、幂级数及其收敛性 ………………………………………… 147
三、幂级数的运算及和函数的性质 …………………………… 153
四、函数展开成幂级数 ………………………………………… 154
习题 7-3 ………………………………………………………… 161
第四节　傅里叶级数 …………………………………………… 162
一、三角级数 …………………………………………………… 162
二、三角函数系的正交性 ……………………………………… 163
三、傅里叶级数 ………………………………………………… 164
四、正弦级数与余弦级数 ……………………………………… 169
习题 7-4 ………………………………………………………… 172
数学实验(七) …………………………………………………… 172

一、问题的描述 …… 172
二、实验内容 …… 172
三、思考与练习 …… 174
数学文化(七) …… 175
一、无穷级数的发展历程 …… 175
二、傅里叶 …… 178
第八章 微分方程 …… 180
第一节 微分方程的基本概念 …… 180
习题 8-1 …… 182
第二节 一阶微分方程的可积类型 …… 183
一、可分离变量方程 …… 183
二、可化为分离变量方程的类型 …… 186
三、一阶线性方程 …… 189
四、可化为一阶线性方程的类型 …… 193
习题 8-2 …… 195
第三节 一阶微分方程的数值解法 …… 196
一、欧拉方法 …… 197
二、预报校正法 …… 198
三、龙格-库塔法 …… 199
习题 8-3 …… 200
第四节 可降阶的高阶微分方程 …… 200
一、不显含未知函数的二阶微分方程 …… 201
二、不显含自变量的二阶微分方程 …… 203
习题 8-4 …… 206
第五节 二阶线性微分方程 …… 206
一、二阶线性微分方程解的结构 …… 206
二、二阶常系数齐次线性微分方程 …… 208
三、二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 211
习题 8-5 …… 216
第六节 微分方程的应用 …… 216
一、正规战问题 …… 217
二、人口增长预报问题 …… 221
数学实验(八) …… 224
一、利用数学软件求解微分方程 …… 224
二、油气产量和可采储量的预测问题 …… 225

数学文化(八) …………………………………………………………… 229
一、常微分方程的起源与发展 …………………………………………… 229
二、伯努利家族 …………………………………………………………… 230
习题答案与提示 ………………………………………………………… 233
参考文献 ………………………………………………………………… 245

第五章　多元函数微分学

在一元函数微分学中，我们介绍了导数与微分两个基本概念，讨论了求函数的导数与微分的方法，并介绍了导数在实际中的应用．在本章中，我们将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用．讨论中我们将以二元函数为主要对象，这是因为将一元函数微分学推广到二元函数时会产生大量新问题，这是一个质变过程，但是将二元函数微分学推广到三元函数及三元以上函数时一般不会产生实质性的变化，这仅仅是一个量变过程．本章首先把一元函数的极限和连续等基本概念推广到二元函数的情形，然后讨论多元函数的微分法，最后介绍多元函数微分学的应用．

第一节　多元函数的极限与连续性

一、多元函数的极限

在一元函数中，我们讨论了函数值在自变量某一变化过程中的变化趋势，这就是一元函数的极限问题．现在，我们需要探讨的问题是多元函数在自变量的变化过程中的变化趋势，也就是多元函数的极限问题．

与一元函数的极限概念类似，如果在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的过程中，函数 $f(x,y)$ 在点 P 处的函数值无限接近于一个确定的常数 A，那么就称常数 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限．这里 $P\to P_0$ 是指点 P 以任意方式趋近于点 P_0，也就是点 P 与点 P_0 之间的距离无限趋近于零，即

$$|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0,$$

但是 $P\neq P_0$．下面用"$\varepsilon-\delta$"语言给出二元函数在一点处的极限的定义．

定义 1　设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点．如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当点 $(x,y)\in D\cap \mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，那么就称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad 或 \quad f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0)).$$

此时，也称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的极限存在．否则，称函数 $f(x,y)$ 在点

$P_0(x_0,y_0)$处的极限不存在.

为了区别于一元函数的极限,我们把二元函数在一点处的极限称为二重极限.

类似于定义1,可以给出二元以上函数在一点处的极限的定义.

例1 设$f(x,y)=(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$,证明:$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

证 显然,$f(x,y)$的定义域为$D=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,点$O(0,0)$为$D$的聚点.因为

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant x^2+y^2,$$

所以对于任意给定的正数ε,取$\delta=\sqrt{\varepsilon}$,当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta,$$

即点$(x,y)\in D\cap\mathring{U}(O,\delta)$时,都有

$$|f(x,y)-0|\leqslant x^2+y^2<\delta^2=\varepsilon$$

成立.即证得$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

根据定义,二元函数$f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的二重极限存在,是指当动点$P(x,y)$以任何方式趋近于定点$P_0(x_0,y_0)$时,函数$f(x,y)$在点P处的函数值都无限接近于同一个确定的常数.由此可见,如果动点$P(x,y)$以某种特殊方式,例如沿某条定直线或某条定曲线无限趋近于定点$P_0(x_0,y_0)$,即使此时函数$f(x,y)$在点P处的函数值无限接近于某个确定的常数,我们也不能断定二元函数$f(x,y)$在$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的二重极限存在.但是,如果动点$P(x,y)$以不同的方式趋近于定点$P_0(x_0,y_0)$时,函数$f(x,y)$在点P处的函数值无限接近于不同的常数,那么我们就可断定函数$f(x,y)$在$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的二重极限一定不存在.下面通过例题具体说明这种判定二重极限不存在的方法.

例2 设$f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y^2}$,证明:$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在.

证 因为当动点(x,y)在沿直线$y=0$无限趋近于定点$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}f(x,0)=\lim_{x\to0}0=0;$$

而当动点(x,y)在沿曲线$x=y^3-y^2$无限趋近于定点$(0,0)$时,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^3-y^2}}f(x,y)=\lim_{y\to0}f(y^3-y^2,y)=\lim_{y\to0}\frac{y^4-y^3}{y^3}=-1,$$

所以根据二元函数在一点处的极限的定义知,$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在.

一元函数极限的性质、运算法则以及极限存在准则等都可直接推广到二元函数. 这里不再详细讨论.

例 3 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin xy}{(3^x+2y)\ln(1+2x)}$.

解 根据极限的四则运算法则和重要极限公式,得

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin xy}{(3^x+2y)\ln(1+2x)}\\&=\frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{y}{3^x+2y}\cdot\frac{\sin xy}{xy}\cdot\frac{2x}{\ln(1+2x)}\\&=\frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{y}{3^x+2y}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin xy}{xy}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{2x}{\ln(1+2x)}=\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

例 4 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2-\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2\ln(1+x^2+y^2)}$.

解 令 $t=x^2+y^2$,得

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2-\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2\ln(1+x^2+y^2)}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\sin t}{t^2\ln(1+t)}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

例 5 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}(1+xy)^{\frac{y}{x}}$.

解 根据一元函数的重要极限公式,得

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}(1+xy)^{\frac{y}{x}}=\lim_{(x,y)\to(0,2)}(1+xy)^{\frac{1}{xy}\cdot y^2}=\mathrm{e}^4.$$

上面例题说明,多元函数的极限问题有时可转化为一元函数的极限问题处理. 一元函数中利用极限的四则运算法则、两个重要极限、夹逼准则、无穷小量的性质等求极限的各种方法和一些重要结论,均可在求多元函数的极限时使用,但使用时一定要非常慎重. 特别注意,不能直接使用洛必达法则求多元函数的极限.

二、多元函数的连续性

定义 2 设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点,且 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

那么称二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续. 此时,点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为二元函数 $f(x,y)$ 的连续点.

如果二元函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处不连续，那么就称点$P_0(x_0,y_0)$为函数$f(x,y)$的不连续点或间断点.

如果二元函数$f(x,y)$在区域D内的每一点处都连续，那么就称二元函数$f(x,y)$在区域D内连续，或称二元函数$f(x,y)$是D内的连续函数.此时，二元函数$f(x,y)$的图形是一张连续曲面.

类似于定义2，可以给出二元以上函数在一点处连续的定义，且上述有关术语也都可类似地推广到二元以上函数的情形.

根据多元函数的极限运算法则，可以证明：多元连续函数的和、差、积、商（分母不等于零）仍是连续函数，多元连续函数的复合函数仍是连续函数.

与一元初等函数类似，由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算得到的，并可用一个式子表示的多元函数称为多元初等函数.例如

$$\sqrt{x^2+y},\quad \frac{x-y}{1+y^3},\quad \sin(x+e^y-z^3)$$

等都是多元初等函数.

根据上面指出的连续函数的和、差、积、商的连续性，以及连续函数的复合函数的连续性，再由一元基本初等函数的连续性，我们进一步得到结论：一切多元初等函数在其定义区域内都是连续的.所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

上述结论为求多元初等函数的极限提供了方便，这是因为要求多元初等函数在其定义区域内一点处的极限，只要求它在这点的函数值即可.例如

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^x+e^y}{\cos x-\tan y}=\frac{e^0+e^0}{\cos 0-\tan 0}=2.$$

三、有界闭区域上多元连续函数的性质

有界闭区域上的多元连续函数和在闭区间上的一元连续函数一样，具有如下两个性质.

性质1（最大值与最小值存在定理） 有界闭区域上的多元连续函数有最大值和最小值.

性质2（介值定理） 有界闭区域上的多元连续函数必能取得介于该函数的最大值与最小值之间的任何值.

例如，二元函数$f(x,y)=2x+y$在有界闭区域

$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,2x+y\leqslant 1\}$$

上的最大值为1，最小值为0.而三元函数

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+(z-2)^2$$

在有界闭区域

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$$

上的最大值为9,最小值为1.

习题 5－1

1. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{xy+ye^x}{x^2+y^2}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{5-e^{xy}}-2}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy\sin(xy)}{x^4+4y^2}$;　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

2. 证明:极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x\sin x+y\sin y}{x^2+y^2}$存在.

3. 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+2y}{x+y}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y}{x^2+y}$.

第二节 偏 导 数

一、一阶偏导数

在一元函数微分学中,我们将一元函数的导数定义为函数增量与自变量增量的比值的极限,它刻画了函数对于自变量的变化率.对于多元函数来说,因为函数的自变量的个数增加了,所以函数关系变得复杂了.研究多元函数的方法之一是将多元函数一元化,也就是说仍然可以考虑多元函数对某一个自变量的变化率,即在其中一个自变量发生变化,而其余自变量都保持不变的情形下,考虑多元函数对该自变量的变化率.例如,由物理学知道,一定量理想气体的压强 P、体积 V 和热力学温度 T 三者之间的关系为

$$P=\frac{RT}{V}\quad(R\text{ 为常量}).$$

根据上述关系式,当温度不变(等温过程)时,压强 P 关于体积 V 的变化率就是

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V}=-\frac{RT}{V^2}.$$

当然,我们还可得到在等温条件下体积 V 关于压强 P 的变化率,也可得到在等压条件下温度 T 关于体积 V 的变化率,等等.

多元函数对某个自变量的变化率就是本节将介绍的偏导数.一般地,我们有如下定义.

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义,当自变量 y 取

固定值 y_0，而 x 在点 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，那么就称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为

$$f_x(x_0,y_0),\quad z_x(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{或}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

此时，也称 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数存在. 否则，称 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数不存在.

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记为

$$f_y(x_0,y_0),\quad z_y(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{或}\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

偏导数的定义可以取不同的形式，常见的还有

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}.$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x 和 y 的函数，且称它为函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导函数，记为

$$z_x,\quad f_x(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial x}\text{或}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

类似地，如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 y 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x 和 y 的函数，且称它为函数 $z=f(x,y)$ 对 y 的偏导函数，记为

$$z_y,\quad f_y(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}\text{或}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

偏导函数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 也可记为 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$. 后面介绍的高阶导数也有类似记号.

显然，如果函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 和对 y 的偏导数都存在，且 $(x_0,y_0)\in D$，那么 $f_x(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值，而 $f_y(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值.

今后在不至于混淆的时候，把偏导函数简称为偏导数.

上面介绍的偏导数的概念可以直接推广到二元以上的多元函数，例如，三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}.$$

类似地可以定义 $u=f(x,y,z)$ 对 y 或 z 的偏导数.

下面讨论求多元函数的偏导数的方法.

如果函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数存在,令 $\varphi(x)=f(x,y_0)$,那么

$$\begin{aligned}f_x(x_0,y_0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}=\varphi'(x_0).\end{aligned}$$

这说明函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数就是一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 x_0 处的导数.

一般地,多元函数的偏导数实质上就是该多元函数对某一个自变量的导数,此时将该多元函数中其余的自变量暂时视为常量.这说明求多元函数的偏导数并不需要引入新方法,一元函数的各种求导法则和公式均可适用于求多元函数的偏导数.

综上所述,如果函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 和对 y 的偏导数都存在,那么求函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的偏导函数的方法是:求 $f_x(x,y)$ 时,只需把函数 $f(x,y)$ 中的 y 暂时看成常量而对 x 求导数;求 $f_y(x,y)$ 时,只需把函数 $f(x,y)$ 中的 x 暂时看成常量而对 y 求导数.

如果函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 和对 y 的偏导数都存在,且 $(x_0,y_0)\in D$,那么求函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数的常用方法是:

$$f_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f_x(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}};$$

$$f_y(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}=f_y(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

例 1 设 $f(x,y)=x^2\cos y+\mathrm{e}^{xy}$,求 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},f_x(0,2\pi),f_y(1,\pi)$.

解 根据一元函数的求导法则和公式,得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\cos y+y\mathrm{e}^{xy},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-x^2\sin y+x\mathrm{e}^{xy},$$

$$f_x(0,2\pi)=2\pi,\quad f_y(1,\pi)=\mathrm{e}^{\pi}.$$

例 2 设 $z=\frac{x\cos(y-1)-(y-1)\cos x}{1+\sin x+\sin(y-1)}$,求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}$.

解 因为

$$f(x,1)=\frac{x}{1+\sin x},\quad f(0,y)=\frac{1-y}{1+\sin(y-1)},$$

所以根据一元函数的求导法则和公式,得

$$\frac{\mathrm{d}f(x,1)}{\mathrm{d}x}=\frac{1+\sin x-x\cos x}{(1+\sin x)^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}f(0,y)}{\mathrm{d}y}=\frac{-[1+\sin(y-1)]-(1-y)\cos(y-1)}{[1+\sin(y-1)]^2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,1)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=1,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=\left.\frac{\mathrm{d}f(0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=1}=-1.$$

例 3　已知一定量的理想气体的压强 P、体积 V 和热力学温度 T 满足方程 $PV=RT$(R 为常量),求证:

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证　根据 $P=\frac{RT}{V}$和偏导数的计算公式,得

$$\frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2};$$

根据 $V=\frac{RT}{P}$和偏导数的计算公式,得

$$\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{P};$$

根据 $T=\frac{PV}{R}$和偏导数的计算公式,得

$$\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{V}{R}.$$

于是

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{P}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{PV}=-1.$$

从上面的关系式可以看出,偏导数的记号是一个整体的记号,而不能看作分子与分母之商,否则所证关系式的右端是 1 而不是 -1. 对一元函数来说,导数可看作是函数的微分与自变量的微分之商,这是多元函数与一元函数的一个重要区别.

设 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$为曲面 $z=f(x,y)$上的一点,过点 M_0 作平面 $y=y_0$,且平面 $y=y_0$ 截曲面 $z=f(x,y)$得一条曲线 L. 因为平面 $y=y_0$ 上的曲线 L 的方程为 $z=f(x,y_0)$,所以根据一元函数导数的几何意义可知,函数 $z=f(x,y_0)$在点 x_0 处的导数

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

就是曲线 L 上点 M_0 处的切线对 x 轴的斜率，即函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是曲线

$$\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=y_0 \end{cases}$$

上点 M_0 处的切线对 x 轴的斜率，如图 5－1 所示. 同样，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 是曲线

$$\begin{cases} z=f(x,y), \\ x=x_0 \end{cases}$$

上点 M_0 处的切线对 y 轴的斜率.

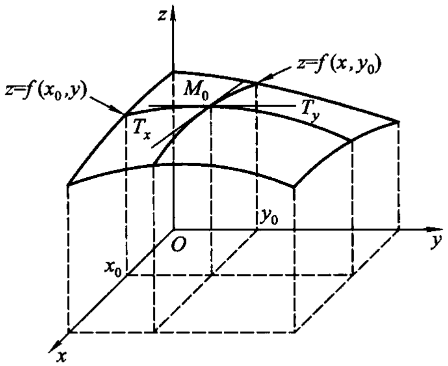

图 5－1

我们知道，如果某个一元函数在某点处可导，那么该函数在该点处一定连续. 但是，对于多元函数来说，即使某个多元函数在某点的偏导数都存在，也不能保证该多元函数在该点处连续，这是一元函数与多元函数在连续性与偏导数存在之间的一个显著区别. 例如，二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x+y^2=0 \end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处各偏导数都存在，但是函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

事实上，根据偏导数的定义，得

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0.$$

而根据第一节的例 2，二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的极限不存在，从而该函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

二、高阶偏导数

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点 (x,y) 处对 x 和 y 的偏导数都存在，那么偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 都是 x 和 y 的函数，即前面所谓的偏导函数. 如果函数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 和 y 的偏导数也都存在，那么称函数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 对 x 和 y 的偏导数为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的二阶偏导数. 按照对变量求偏导数次序的不同有下列四个二阶偏