随机过程

Stochastic Processes

何选森 编著

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

随机过程

Stochastic Processes

何选森 ■ 编著

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

随机过程 / 何选森编著. —北京：人民邮电出版社，
2009.9
ISBN 978-7-115-20119-5

I. 随… II. 何… III. 随机过程 IV. 0211.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第126952号

内容提要

本书共分 7 章，主要介绍了随机变量、随机过程的基本概念、随机过程的变换、白噪声与高斯随机过程、窄带随机过程、马尔可夫过程与泊松过程等理论。本书的重点是随机过程的分析与变换，其中以线性变换为主。至于非线性变换，可根据需要做一定的筛选。在内容的安排上，力求物理概念清楚，理论分析严密，并结合在电子系统中的应用，尽量联系电路以及系统中的一些实际问题，使读者能更好地理解和掌握。各章最后附有部分习题，读者通过做适量的习题，可巩固和加深理解各章的内容。

本书主要面向在校本科生，也可作为工程技术人员自学和参考用书。

随机过程

◆ 编　　著　何选森
　责任编辑　王建军
　执行编辑　李　静

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编　100061　　电子函件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：18.75
　字数：464 千字　　　2009 年 9 月第 1 版
　印数：1 – 3 000 册　　2009 年 9 月北京第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-20119-5

定价：36.00 元

读者服务热线：(010)67119329　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前　　言

随机过程（随机信号分析）是一门研究随机变化过程的特点与规律性的学科，是信号检测、估计、滤波等信号处理的理论基础，它广泛应用于通信、雷达、自动控制、图像处理、随机振动、生物医学、气象预报、地震信号处理等领域。随着科学技术的发展，特别是信息技术的发展，随机过程理论的应用将日益广泛和深入。

本书是作为电子系统和信息技术各专业本科生的教材编写的，其内容适应 36～60 学时的需要，在教学中可根据教学需要加以取舍，同时本书也可供有关工程技术人员参考。学习和阅读本书需要的数学基础为《高等数学》、《概率论》、《线性代数》，专业基础为《电路分析》、《信号与系统》等。

编写本书的主要目的是给信息与电子技术领域的初学者打好基础，以适应信号与信息统计处理的需要。全书共分 7 章。第一章概率与随机变量为复习《概率论》的内容，强调了随机变量特征函数与随机变量函数分布等内容，对于学过《概率论》的读者可略过第一章。第二章随机过程的基本概念，包括随机过程的定义和分类、随机过程的统计描述、平稳随机过程与各态历经随机过程及其特点等。第三章随机过程的线性变换，包括随机过程变换的基本概念，随机过程的均方极限、均方导数、均方积分的概念，随机过程通过线性系统的分析等。第四章白噪声与高斯随机过程，主要结合在电子系统中最常见的随机信号模型，把白噪声作为系统的输入信号分析系统输出的分布特性，对高斯随机过程的统计特性和高斯过程的线性变换进行了初步讨论。第五章窄带随机过程，包括随机过程的复过程表示、希尔伯特变换及性质、窄带随机过程的统计特性等。第六章随机过程的非线性变换，主要讨论无惰性非线性变换，包括多项式的矩函数法、直接法、特征函数法和包线法等。第七章马尔可夫过程，包括马尔可夫过程的基本概念和特点，马尔可夫链、状态连续的马尔可夫序列、马尔可夫过程的统计特性，泊松过程与维纳过程的概念等。本书的重点是随机过程的分析与变换，其中以线性变换为主。至于非线性变换，可根据需要做一定的筛选。在内容的安排上，力求物理概念清楚，理论分析严密，并结合在电子系统中的应用，尽量联系电路、系统中的一些实际问题，使读者能更好地理解和掌握。各章最后附有部分习题，读者通过做适量的习题，对巩固和加深理解各章的内容是很有必要和有益的。

本书是作者多年在为湖南大学通信工程、信息安全、计算机科学等专业本科生讲授《随机过程》课程讲义的基础上，根据教学大纲，结合教学工作体会和从事相关科研工作的经验而编写的。本书得到了人民邮电出版社的大力支持和帮助，在此表示诚挚的谢意。由于作者水平有限，书中难免有缺点和错误，欢迎广大读者对本书提出宝贵的意见和建议，对不妥之处提出批评指正。

作　者

2009 年 5 月

目　　录

第一章　概率与随机变量 …… 1
1.1　概率的基本概念 …… 1
1.2　概率的基本定理 …… 3
1.2.1　概率加法定理 …… 4
1.2.2　概率乘法定理 …… 5
1.2.3　全概率公式 …… 6
1.2.4　假设概率公式 …… 7
1.3　随机变量及其分布 …… 8
1.3.1　离散随机变量 …… 8
1.3.2　连续随机变量 …… 9
1.3.3　概率分布函数 …… 10
1.3.4　概率密度函数 …… 12
1.3.5　多维随机变量 …… 13
1.4　随机变量的数字特征 …… 17
1.4.1　数学期望、众数和中位数 …… 17
1.4.2　方差 …… 19
1.4.3　矩 …… 20
1.4.4　二维随机变量的数字特征 …… 21
1.4.5　多维随机变量的数字特征 …… 23
1.5　几种常见的概率分布 …… 24
1.5.1　高斯分布 …… 24
1.5.2　二项式分布 …… 30
1.5.3　泊松分布 …… 31
1.5.4　均匀分布 …… 32
1.5.5　瑞利分布 …… 33
1.5.6　对数高斯分布 …… 33
1.6　随机变量的函数 …… 34
1.6.1　一维随机变量函数的分布 …… 34
1.6.2　二维随机变量函数的分布 …… 36
1.6.3　随机变量函数的数字特征 …… 38
1.6.4　随机变量的特征函数 …… 40
1.7　大数定理与中心极限定理 …… 43
1.7.1　大数定律 …… 43
1.7.2　中心极限定理 …… 46

习题一 …… 47

第二章 随机过程的基本概念 …… 49
2.1 随机过程的概念和定义 …… 49
2.1.1 随机过程的定义 …… 49
2.1.2 随机过程的分类 …… 52
2.2 随机过程的统计特性 …… 57
2.2.1 随机过程的概率分布 …… 57
2.2.2 随机过程的示性函数 …… 59
2.2.3 随机过程的特征函数 …… 64
2.2.4 母函数 …… 65
2.3 平稳随机过程 …… 70
2.3.1 平稳随机过程概念与定义 …… 71
2.3.2 平稳随机过程相关函数的性质 …… 74
2.3.3 平稳随机过程的相关系数和相关时间 …… 75
2.4 各态历经过程 …… 76
2.4.1 各态历经过程的概念和定义 …… 76
2.4.2 各态历经性条件 …… 78
2.5 随机过程的联合分布与互相关函数 …… 81
2.5.1 联合分布函数和联合概率密度 …… 82
2.5.2 互相关函数及性质 …… 82
2.6 随机过程的功率谱密度 …… 86
2.6.1 功率谱密度的概念 …… 86
2.6.2 功率谱密度与相关函数的关系 …… 89
2.6.3 各态历经过程的功率谱密度 …… 91
2.6.4 两个随机过程的互功率谱密度 …… 92
2.6.5 非平稳随机过程的功率谱密度 …… 93
习题二 …… 96

第三章 随机过程的线性变换 …… 102
3.1 变换的基本概念及基本定理 …… 102
3.1.1 变换的基本概念 …… 102
3.1.2 线性变换的基本定理 …… 104
3.2 随机过程的微分和积分 …… 105
3.2.1 随机过程的极限 …… 105
3.2.2 随机过程的连续性 …… 106
3.2.3 随机过程的微分 …… 108
3.2.4 随机过程的积分 …… 111
3.3 随机微分方程 …… 115
3.3.1 输出的数学期望 …… 116

3.3.2　输出与输入的互相关函数 …… 116
3.3.3　输出的自相关函数 …… 117
3.4　随机过程通过线性系统的分析 …… 120
3.4.1　冲激响应法 …… 120
3.4.2　频谱法 …… 122
3.4.3　物理可实现系统的平稳性讨论 …… 123
3.5　随机序列的线性变换 …… 127
3.5.1　随机过程采样定理 …… 127
3.5.2　随机序列的示性函数 …… 128
3.5.3　随机序列的各态历经性 …… 131
3.5.4　随机序列的线性变换 …… 132
习题三 …… 135

第四章　白噪声与高斯随机过程 …… 137
4.1　白噪声 …… 137
4.1.1　白噪声的概念 …… 137
4.1.2　白噪声通过线性系统的功率谱和相关函数 …… 139
4.1.3　线性系统的噪声等效通能带 …… 139
4.1.4　白噪声通过低通系统 …… 141
4.1.5　白噪声通过带通系统 …… 144
4.1.6　白噪声通过高斯网络 …… 147
4.2　高斯随机过程 …… 148
4.2.1　一般高斯随机过程的分布特性 …… 148
4.2.2　平稳高斯过程的分布特性 …… 150
4.3　高斯随机过程的线性变换 …… 153
4.3.1　高斯过程通过线性系统 …… 153
4.3.2　随机过程的高斯化 …… 155
4.4　常用时间序列模型 …… 157
4.4.1　自回归模型 …… 157
4.4.2　滑动平均模型 …… 164
4.4.3　自回归滑动平均模型 …… 165
习题四 …… 168

第五章　窄带随机过程 …… 173
5.1　确知信号的复信号表示 …… 173
5.1.1　窄带确知信号的复信号表示 …… 173
5.1.2　任意实信号的复信号表示 …… 175
5.2　希尔伯特变换 …… 177
5.2.1　希尔伯特变换定义 …… 177
5.2.2　希尔伯特变换的性质 …… 178

5.3 复随机过程 …… 182
5.3.1 复随机变量及其统计特性 …… 182
5.3.2 随机过程的复过程表示 …… 183
5.4 窄带随机过程的统计特性 …… 184
5.4.1 窄带随机过程的准正弦振荡表示 …… 185
5.4.2 窄带随机过程的统计特性 …… 186
5.4.3 窄带随机过程的复过程表示 …… 190
5.5 窄带高斯随机过程的包络和相位的分布 …… 191
5.5.1 窄带高斯噪声包络和相位的分布 …… 191
5.5.2 窄带高斯噪声加正弦信号的包络和相位的分布 …… 194
5.5.3 窄带高斯过程包络平方的分布 …… 196
5.6 χ^2 分布及非中心 χ^2 分布 …… 197
5.6.1 χ^2 分布 …… 197
5.6.2 非中心 χ^2 分布 …… 199
习题五 …… 201

第六章 随机过程的非线性变换 …… 204
6.1 多项式变换的矩函数法 …… 204
6.2 非线性变换的直接法 …… 206
6.2.1 矩函数的一般表示法 …… 206
6.2.2 高斯噪声作用于平方律检波器 …… 207
6.2.3 信号和噪声同时作用于平方律检波器 …… 209
6.2.4 线性检波器 …… 213
6.3 非线性变换的特征函数法 …… 218
6.3.1 非线性系统输出端的相关函数 …… 221
6.3.2 非线性系统输出端的功率谱密度 …… 224
6.3.3 Price 定理（普赖斯定理） …… 224
6.3.4 特征函数法的应用 …… 226
6.4 非线性变换的包线法 …… 229
6.4.1 包线法的一般计算方法 …… 229
6.4.2 包线法的近似计算 …… 232
6.5 非线性变换后信噪比的计算 …… 242
6.5.1 同步检波器 …… 243
6.5.2 包络检波器 …… 244
6.5.3 平方律检波器 …… 245
6.5.4 一般非线性情况的讨论 …… 246
习题六 …… 248

第七章 马尔可夫过程 …… 251
7.1 马尔可夫过程的一般概念 …… 251

7.1.1　马尔可夫过程的定义 …………………………………………… 251
7.1.2　马尔可夫过程的统计特性 ………………………………………… 252
7.1.3　切普曼—柯尔莫哥洛夫方程 ……………………………………… 253
7.2　马尔可夫链 …………………………………………………………… 254
7.2.1　马尔可夫链的一般特性 …………………………………………… 255
7.2.2　齐次马尔可夫链 …………………………………………………… 257
7.2.3　马尔可夫链中状态的分类 ………………………………………… 261
7.2.4　马尔可夫链的遍历性 ……………………………………………… 268
7.3　状态连续马尔可夫过程特性 ………………………………………… 270
7.3.1　马尔可夫序列 ……………………………………………………… 270
7.3.2　连续的马尔可夫过程 ……………………………………………… 272
7.4　独立增量过程的基本概念 …………………………………………… 274
7.5　泊松过程 ……………………………………………………………… 274
7.5.1　计数过程 …………………………………………………………… 275
7.5.2　泊松过程概念 ……………………………………………………… 275
7.5.3　泊松过程的统计特性 ……………………………………………… 277
7.5.4　泊松过程的分布特性 ……………………………………………… 278
7.6　维纳过程 ……………………………………………………………… 282
习题七 ……………………………………………………………………… 284

参考文献 ………………………………………………………………… 289

第一章　概率与随机变量

一切自然现象可被粗略地划分为确定的、可预测的现象和随机的、不可预测的现象。

确定的、可预测的一类现象是指在相同条件下进行多次重复实验，必然产生同一结果，而且这个结果是可以预测的。例如，对于线性时不变系统，当输入为确定的信号时，系统输出也就是确定的信号。

随机的、不可预测的一类现象，是指在相同条件下进行多次重复实验，有各种可能的结果，而在实验前不能准确地预知它的结果。例如，雷达测定目标的坐标时，由于各种干扰的影响，不可避免地会产生测量误差，而每次测量误差的大小事先不能预言。

现实世界中一切随时间变化的过程，往往都要受到某种不确定因素的作用。从表面看来，随机现象似乎是没有什么规律的，其实它还是有规律性的，不过这种规律性体现在大量重复实验时的集体现象之中。我们发现，在相同的条件下对同一随机现象进行大量重复实验，就会呈现出确定的规律性。当实验次数不多时，出现的现象是紊乱无章，呈现不出什么规律性的，但随着实验次数的增加，出现的现象会有一定的规律性，实验次数越多，其规律性就越明显。由于这种规律性是与大量实验观测分不开的，因此称之为统计规律性。我们把这种具有统计规律的不确定因素称为随机因素。概率论就是研究随机现象、随机因素的这种统计规律性的一门数学科学。

随机现象是普遍存在的。随着科学技术的迅速发展，到今天概率论已经从最初用于研究赌博问题扩展到广泛的科学技术领域，尤其在电子与通信领域中得到了有效的应用。例如，雷达、通信接收机在收到的有用信号中总是伴随着各种途径混入的噪声，而噪声是随机的，只能用统计方法来描述它。因此，在雷达、通信等电子系统设计和分析估价系统性能等方面，概率论成为不可缺少的数学工具。

在通信与电子系统中，为了分析和处理随机信号，必须对概率论和随机变量进行分析和处理，因此本章首先介绍概率论与随机变量的基本概念和理论。

1.1　概率的基本概念

在科学研究或工程技术中，经常遇到在不变的条件下重复地进行很多试验或观测，抽去这些试验或观测的具体性质，就得到概率论中的各种概念。

如果试验具有以下 3 个条件，即：

(1) 在相同条件下可重复进行；

(2) 每次试验结果不只一个，所有可能结果能事先明确；

(3) 每次试验之前不能确定出现哪一结果。

则该试验称为随机试验，一般用字母 E 表示。

在随机试验中，对一次试验可能出现也可能不出现，而在大量重复试验中却具有某种规

律性的事情，称为随机事件，一般用字母 A、B、X、Y 等表示。在随机试验中最简单的、不可再分的随机事件称为基本事件。

随机试验 E 中所有基本事件组成的集合叫做该随机试验的样本空间，一般用字母 S 表示。随机试验中必然会发生的事件，称为必然事件，它对应整个样本空间 S；随机试验中不可能发生的事件，称为不可能事件，它对应一个空集，记作 Φ。

必然事件和不可能事件之间存在着紧密联系。事实上，如果在一定条件下，某个事情是必然事件，而在同一条件下，这个事情的反面就一定是不可能事件。

如果试验的结果，必然要在某些事件中发生一件，就称这些事件构成了一个完备事件群，简称完备群。其实构成完备群的事件就是基本事件，也就是说完备群对应着样本空间。

如果在一次试验中，两个事件不能同时都发生，则把这两个事件称为互不相容（或互斥）的事件。如果一组事件，由于对称性条件，可以断定其中任何一事件不会比另一事件在客观上发生的可能性更大些，把这种事件叫做等可能事件。如果在试验时某一基本事件的发生导致随机事件 A 的发生，则称此基本事件是有利于事件 A 的。

设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次，则比值 m/n 叫做随机事件 A 的频率（或相对频率），记作 $W(A)$，用公式表示如下：

$$W(A)=\frac{m}{n} \tag{1.1.1}$$

显然，任何随机事件的频率是介于 0 与 1 之间的一个数：

$$0\leqslant W(A)\leqslant 1 \tag{1.1.2}$$

如果事件 A 是必然事件，则在任何试验序列中，就有 $m=n$，所以必然事件的频率总等于 1。如果事件 A 是不可能事件，就有 $m=0$，所以不可能事件的频率总等于 0。

根据实际经验可知，当试验重复很多次时，随机事件 A 的频率具有一定的稳定性。就是说，在不同的试验序列中，当试验次数充分大时，随机事件 A 的频率常在一个确定的数字附近摆动。由随机事件的频率的稳定性可以看出，随机事件发生的可能性可以用一个数字来表示。

用于刻划事件 A 在试验中发生的可能性程度、小于 1 的正数叫做随机事件 A 的概率，一般记为 $P(A)$。因为必然事件的频率总等于 1，所以必然事件的概率为 1；因为不可能事件的频率总等于 0，所以不可能事件的概率为 0。这样，任何事件 A 的概率满足不等式：

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1 \tag{1.1.3}$$

随机事件的频率是与进行的试验有关的，而随机事件的概率却是完全客观地存在着的。在实际进行的试验中，随机事件的频率可以看作是它的概率的随机表现。随机事件的概率表明，试验中综合条件与随机事件之间有完全确定的、特殊的联系，它从数量上说明了必然性与偶然性的辨证统一。

对于比较简单的情况，可以直接计算随机事件的概率，这种计算是以概率的古典定义为基础的。概率的古典定义：设试验的一切可能结果可以表示为 N 个互不相容且等可能性的事件构成的完备群，而其中 M 个事件是有利于随机事件 A 的，则随机事件 A 的概率等于有利的基本事件数 M 与基本事件的总数 N 的比值：

$$P(A)=\frac{M}{N}$$

［例 1.1］ 在一批 N 个晶体管中有 M 个是次品。从这批晶体管中抽取 n 个，求其中恰

有 m 个次品的概率。

解：这个试验的基本事件总数为 C_N^n，而有利的基本事件数为 $C_M^n C_{N-M}^{n-m}$，因此，所求事件 A 的概率为：

$$P(A)=\frac{C_M^n C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

上述概率的古典定义是在一种特殊情形下给出的，这就是假定了试验的基本事件只有有限个。对于试验的基本事件为无穷多个的情形，概率的古典定义显然是不适用的。因此，必须把这个定义给予必要的推广，使得概率的新定义能适用于试验的基本事件是无穷多个的情形。

概率的几何意义：若向有界区域 G 内投掷一质点，设所投的质点必然落在 G 域中，而且落在 G 中的任何一点都是等可能的，若 g 是 G 的一部分，设质点落在域 g 的事件为 A，则事件 A 发生的概率为：

$$P(A)=\frac{g\text{ 的测度}}{G\text{ 的测度}}$$

若 g、G 是空间域，则测度是指它们的体积；若 g、G 是平面域，则测度是指它们的面积；若 g、G 是直线上的区域，则测度是指它们的长度。

[例 1.2]　甲乙两人相约在某一段时间 T 内的约定地点会面。先到达的人应等候另一人，经过时间 t（$t<T$）后方可离开。假定甲乙 2 人在时间 T 内任一时刻到达约定地点是等可能的。求甲乙两人会面的概率。

解：设甲乙两人在时间 T 内到达约定地点的时刻分别为 x 与 y，则它们可以是区间 $[0, T]$ 内的任一值，即：

$$0\leqslant x\leqslant T,\quad 0\leqslant y\leqslant T$$

而两人会面的充分必要条件是：$|x-y|\leqslant t$。

把 x 与 y 表示为平面的直角坐标，则所有基本事件可以用边长为 T 的正方形内的点表示出来，而有利的基本事件可以用这个正方形内介于直线 $x-y=t, x-y=-t$ 之间的区域内的点表示出来，如图 1-1 中的阴影部分。因此所求的概率等于阴影部分的面积与正方形面积的比：

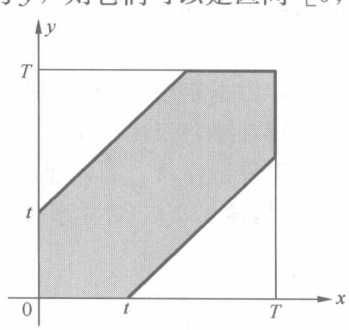

图 1-1　两人会面示意

$$P=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$$

1.2　概率的基本定理

上面我们是直接地确定事件的概率，但在实际中，我们遇到的事件多是由基本事件组成的复合事件（比较复杂）。对于复合事件，若采用直接方法来确定它的概率，一般来说是很困难的，这就需要采用间接方法，从已知一（基本）事件的概率来求另外复合事件的概率。对于各种复合事件，我们总可以把它们归结为两种最基本的形式，即“事件的和”与“事件的积”。

事件和　如果事件 C 是由事件 A 出现或事件 B 出现，或者二者同时出现所组成的，则称事件 C 是事件 A、B 之和，记为 $C=A+B$。

事件积　如果事件 C 是由事件 A 与事件 B 同时出现所组成的，则称事件 C 是事件 A、

B 之积，记为 $C=AB$。

1.2.1 概率加法定理

[定理 1.1] 两个互不相容事件 A 与 B 之和的概率，等于这两个事件概率之和。即

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1.2.1}$$

证明：根据概率的古典定义来证明定理。设试验的可能结果为 N 个基本事件构成的完备群，其中组成事件 A 的基本事件数为 M_1 个，组成事件 B 的基本事件数为 M_2 个。由于事件 A 与 B 是互不相容的，因此事件 A 所包含的基本事件与 B 所包含的基本事件是完全不相同的；所以，组合事件（$A+B$）的基本事件数应是（M_1+M_2）个，这样得到：

$$P(A+B)=\frac{M_1+M_2}{N}=\frac{M_1}{N}+\frac{M_2}{N}=P(A)+P(B)$$

这一定理不难推广到有限多个互不相容事件的情形，于是有下面的定理。

[定理 1.2] 有限个互不相容事件的和的概率，等于这些事件的概率的和。即

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1.2.2}$$

[推论 1.1] 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成互不相容的完备群，则这些事件的概率之和等于 1。即

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1 \tag{1.2.3}$$

事实上，因为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成完备群，所以试验结果中，它们之中至少有一事件发生，即这些事件的和 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 是必然事件。所以

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1$$

由此，根据定理 2，即得到等式（1.2.3）成立。

特别地，仅由两个互不相容事件构成的完备群，则这两个事件是对立事件。事件 A 的对立事件记作 $\overline{A}$，有时也称为逆事件。

[推论 1.2] 对立事件之和的概率等于 1。即

$$P(A_1+\overline{A})=P(A_1)+P(\overline{A})=1 \tag{1.2.4}$$

推论 2 是推论 1 的特殊情况，它在概率论的实际应用中占有重要地位。在实际中常有这种情况：计算事件 $\overline{A}$ 的概率要比计算事件 A 的概率容易得多，这时可先计算出 $P(\overline{A})$，然后利用式（1.2.4）求出 $P(A)$。

[例 1.3] 一个圆形靶，由 3 个环状区域 I、II、III 所组成，如图 1-2 所示。在一次射击中命中 I、II、III 区的概率依次为 0.15、0.23、0.17，求没有命中靶子的概率。

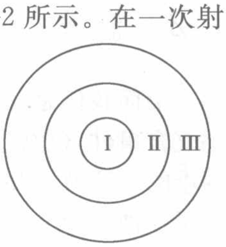

图 1-2 圆形靶示意

解：设没有命中靶子的事件为 A，则命中靶子的事件为 $\overline{A}$，由此可得

$$\overline{A}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$$

其中 $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3$ 各表示命中 I、II、III 区域事件，由题意知 $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3$ 是互不相容事件，故

$$P(\overline{A})=P(\overline{A}_1)+P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_3)=0.15+0.23+0.17=0.55$$

由此得出

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.55=0.45$$

上述概率加法定理仅适用于互不相容的事件。

[定理 1.3]　一般地，对于任意的两个事件 A 和 B，则有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.2.5}$$

证明：事实上，事件 $A+B$ 等于以下 3 个互不相容事件的和：

$$A+B=A\overline{B}+\overline{A}B+AB \tag{1.2.6}$$

因此有

$$P(A+B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB) \tag{1.2.7}$$

但是，事件 A 等于不相容事件 AB 与 $A\overline{B}$ 的和：

$$A=AB+A\overline{B} \tag{1.2.8}$$

所以

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}) \tag{1.2.9}$$

由此得到

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB) \tag{1.2.10}$$

同理可得

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB) \tag{1.2.11}$$

将式（1.2.10）和式（1.2.11）代入式（1.1.7），即得到式（1.2.5）。

显然，当事件 A 与 B 互不相容时，因为 $P(AB)=0$，式（1.2.5）就变成式（1.2.1）。

利用数学归纳法可以证明，对于有限多个随机事件，有

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

1.2.2　概率乘法定理

在叙述概率乘法定理之前，先引入 3 个重要的概念，即独立事件、相关事件和条件概率。

独立事件：如果事件 A 的概率与事件 B 的发生与否无关，则称事件 A 对事件 B 独立。

相关事件：如果事件 A 的概率将随事件 B 的发生与否而改变，则称事件 A 与事件 B 相关。

条件概率：如果在事件 B 已经发生的条件下计算事件 A 的概率，则这种概率叫做事件 A 在事件 B 已发生的条件下的条件概率，记为 $P(A\mid B)$。

[定理 1.4]　两个事件乘积的概率等于其中一个事件的概率与另一事件在前一事件已发生的条件下的条件概率的乘积。即

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B) \tag{1.2.13}$$

证明：利用概率的古典定义来证明该定理。设试验的可能结果是 N 个基本事件构成的完备群，其中有利于事件 A 的有 M_1 个，有利于事件 B 的有 M_2 个，而有利于事件 AB 的有 M 个（$M\leqslant M_1$，$M\leqslant M_2$）。如果已知事件 A 发生，表明有利于事件 A 的 M_1 个基本事件中必有一个发生，这时有利于事件 B 的基本事件有而且仅有 M 个，即有利于事件 AB 的基本

事件。于是

$$P(B \mid A)=\frac{M}{M_1}=\frac{M/N}{M_1/N}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

由此得
$$P(AB)=P(A)P(B \mid A)$$
同理可证
$$P(AB)=P(B)P(A \mid B)$$

当事件 A 出现的概率与事件 B 是否发生无关时，即 A 对于 B 独立时，条件概率等于无条件概率。即

$$P(A \mid B)=P(A) \tag{1.2.14}$$

[推论 1.3] 如果事件 A 对于事件 B 独立，则 B 也对于 A 独立。

证明：假设 $P(A)\neq 0$，因 A 和 B 独立，所以有 $P(A)=P(A \mid B)$，将该式代入式(1.2.13)得：

$$P(AB)=P(B)P(A \mid B)=P(B)P(A)$$

再利用定理 4，即

$$P(AB)=P(A)P(B \mid A)=P(B)P(A)$$

显然有
$$P(B \mid A)=P(B)$$

从推论 3 可知，事件的独立性或相关性是相互依存的，因此可以给出关于独立事件下列新的定义：如果两个事件中的一个事件的发生与否并不改变另一个事件发生的概率，则这两个事件是相互独立的。

[推论 1.4] 两个独立事件乘积的概率等于这两个事件概率的乘积。即

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

这个结论可以从独立事件的定义直接推出。

[定理 1.5] 有限个事件的积的概率等于这样一些事件的概率的乘积，其中每一事件的概率是在它前面的一切事件都已发生的条件下的条件概率。即

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1.2.15}$$

在独立事件的情形下，定理 1.5 为：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\cdots P(A_n) \tag{1.2.16}$$

这里的独立性是指，这 n 个事件是相互独立的，即要求其中任一事件对其余事件中任意个事件的乘积相互独立。例如，3 事件的相互独立定义如下：

设 A，B，C 为 3 事件，若满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B),P(AC)=P(A)P(C),P(BC)=P(B)P(C),$$

以及
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

则称 A，B，C 为相互独立的事件。

对于随机事件之间还存在以下基本关系：

设随机试验 E 的样本空间为 S，A 和 B 是 E 中的事件，

(1) 若事件 A 发生必然导致 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$，因此有 $P(A)\leqslant P(B)$。

(2) 事件 A 发生而事件 B 不发生，该事件称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$。

1.2.3 全概率公式

如果某个事件可能在多种情况下发生，而且它在各种情况下发生的可能性大小也都是知

道的，求该事件发生总的可能性大小是经常遇到的问题。例如，对敌方雷达进行干扰，有 3 种干扰措施，根据以往经验和掌握的相关情报，可估计出每种干扰措施的成功概率，那么使用了 3 种干扰措施的总的成功概率就是我们关心的全概率。

［**定理 1.6**］ 设事件 A 仅当互不相容的完备群 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中任一事件发生时才可能发生，已知事件 B_i 的概率 $P(B_i)$ 及事件 A 在 B_i 已发生的条件下的条件概率 $P(A \mid B_i)(i=1, 2, \cdots, n)$，则事件 A 发生的概率为：

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i) \tag{1.2.17}$$

式（1.2.17）称为全概率公式，事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 叫做关于事件 A 的假设。

证明：因为 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是互不相容的，所以事件 $AB_1, AB_2, \cdots, AB_n$ 也是互不相容的，因此事件 A 可以看作 n 个互不相容的事件 $AB_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的和

$$A = AB_1 + AB_2 + \cdots + AB_n$$

根据概率加法定理得

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i)$$

再应用概率乘法定理有

$$P(AB_i) = P(B_i)P(A \mid B_i)$$

因此可得

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

1.2.4 假设概率公式

全概率公式描述的是当且仅当互不相容的完备群 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中任一事件发生时，事件 A 才可能发生，并且已知事件 B_i 的概率 $P(B_i)$（试验前的假设概率）及事件 A 在 B_i 已发生的条件下的条件概率 $P(A \mid B_i)(i=1,2,\cdots,n)$，现在进行一次试验，若事件 A 已经发生，对于事件 B_i 的概率给予重新估计，即求事件 B_i 在事件 A 已发生的条件下的条件概率 $P(B_1 \mid A), P(B_2 \mid A), \cdots, P(B_n \mid A)$ 的大小（试验后的假设概率）。

根据概率乘法定理有

$$P(B_i)P(A \mid B_i) = P(A)P(B_i \mid A)$$

由此得

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)}$$

再应用全概率公式，就得到

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)} \tag{1.2.18}$$

式（1.2.18）称为假设概率公式或贝叶斯公式。

全概率公式和贝叶斯公式恰好用于解决两类相反的问题：前者用于在许多情况（B_i）下都有可能发生某事件 A，求发生该事件的全概率；后者则用于在事件 A 已经发生的情况下，求产生事件 A 的各种原因的条件概率。

1.3 随机变量及其分布

在上一节讨论中我们知道，一次随机试验有多种可能的结果。如：雷达探测目标，可能发现目标也可能未发现目标，还可能由于干扰产生错误等；对靶射击，可能命中0、1、2、…10环。许多随机试验的结果都直接和某一数值相联系，如靶射击可能出现11种结果与数值0、1、2、…10直接对应。但另外一些试验，其可能的各种结果和数值之间并没有直接联系，如雷达发现目标和未发现目标等。对于这样一类随机试验，我们可规定一些数值来表示它的各种可能结果。如在雷达发现目标与否的问题中，规定1代表有信号，0表示没有信号。这样规定之后，我们就可以用一变量 X 来定量地表示随机试验的结果，而随机试验的各种可能结果，则可通过 X 所可能取的数值来定量地表示出来，这个变量 X 就称为随机变量。

随机变量可能取值的范围是由它所对应的那个随机试验来决定的，而且在试验之前就是已知的。但在每次试验之前，我们无法准确地预言随机变量将取什么值，而只能知道它将以什么概率分别取这些值。而且对应一次试验结果，随机变量取唯一的确定值。这样，我们对随机变量作出定义：

设一变量 X，它能随机地取各种数值（但不能准确地预言它取何值），而对应每一数值或某一范围内的值，有相应的概率，则称 X 为随机变量。

随机变量所可能取的一切数值组成的集合称为该随机变量的可能值的集合，这个集合中的数称为随机变量的可能值。一般采用大写字母 X，Y，…表示随机变量，用相应的小写字母 x，y，…表示随机变量的可能值。

我们知道，随机事件是随机试验的某些（或某个）结果，而随机试验的每一种可能的结果都对应随机变量的一个可能值。于是随机事件就可以通过随机变量的关系式表示出来，这样我们就可以把对随机现象的研究从定性的描述发展为用数学方法来进行定量处理。

按照随机变量可能取的值，把它们分为两种基本类型，即离散随机变量与连续随机变量。离散随机变量仅可能取得有限个或无穷多个可数的数值，即这样的数的集合，其中所有的数可按一定的顺序排列，从而可表示数列为 x_1，x_2，…，x_n，…。在工程技术中常常遇到只能取得正整数值的随机变量，如一批产品中的次品数等。连续随机变量可以取得某一区间（有限或无限区间）内的任何数值，如接收机噪声的瞬时振幅、测量误差等。

1.3.1 离散随机变量

为了研究随机变量的统计特性，不仅需要知道随机变量所有可能的取值，而且还需要知道随机变量取这些可能值的概率。在此基础上，可以建立起随机变量的各种可能取值与其相应概率之间的各种不同形式的对应关系。把所有这些（不同形式的）对应关系统称为随机变量的分布律。从概率的观点看，给定了随机变量的分布律，则随机变量就被完全描述出来了。

若离散随机变量 X 的所有可能取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，而 X 取各 $x_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 值所相应的概率为 $P(X=x_i)=p_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$，则随机变量的各种可能取值与其相应概率可以用下列表格表示：

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n	…
$P\{X=x_i\}$	p_1	p_2	p_3	…	p_n	…