

高等数学讲义

力学教研室編

1957

中国科学院教材与出版科

高等数学讲义

第一册目录

预 编 绪论和行列式

第一章 绪论.....1—7

§0—1—1. 数学的起源和发展.....1

§0—1—2. 初等数学和高等数学.....4

§0—1—3. 一些历史知识.....5

第二章 二阶和三阶行列式.....8—19

§0—2—1. 二阶行列式.....8

§0—2—2. 三阶行列式.....10

§0—2—3. 三阶行列式的性质.....11

§0—2—4. 三元一次方程组的解.....11

§0—2—5. 三元一次齐次方程组.....16

习 题 0—2—甲.....19

第一编 平面解析几何

第一章 投影.....20—25

§1—1—1. 有向线段.....20

§1—1—2. 有向线段间的夹角.....21

§1—1—3. 点和有向线段在轴上的投影.....22

§1—1—4. 投影的基本定理.....22

§1—1—5. 有向折线在轴上的投影定理.....24

习 题 1—1—甲.....24

第二章 坐标法.....26—40

§1—2—1. 直线上点的坐标	26
§1—2—2. 平面上点的直角坐标	27
§1—2—3. 极坐标	28
§1—2—4. 坐标变换	30
§1—2—5. 一些基本问题	34
习 题 1—2—甲	38
第三章 曲线与方程	41—50
§1—3—1. 平面上圆的方程	41
§1—3—2. 曲线的方程	41
§1—3—3. 方程 $f(x, y) = 0$ 的几何图形	43
§1—3—4. 两个基本问题	43
§1—3—5. 曲线的参数方程	46
§1—3—6. 曲线的极坐标方程	47
习 题 1—3—甲	49
第四章 直线	51—66
§1—4—1. 平面直线的方程	51
§1—4—2. 平面直线与二元一次方程 $Ax + By + C = 0$ 的关系	55
习 题 1—4—甲	57
§1—4—3. 直线的法线式方程	58
§1—4—4. 关于直线的一些问题	60
习 题 1—4—乙	65
第五章 二次曲线	67—80
§1—5—1. 椭圆的定义和标准方程	67
§1—5—2. 椭圆形状的研究	68
§1—5—3. 双曲线的定义和标准方程	71
§1—5—4. 双曲线形状的研究和双曲线的渐近线	72
§1—5—5. 反比关系的图形表达法	74

习 题 1—5—甲	76
§ 1—5—6. 拋物綫的定义和标准方程	77
§ 1—5—7. 拋物綫形状的研究	78
习 题 1—5—乙	79

第二編 函数和極限

第一章 数軸 区間 絕對值	81—87
---------------	-------

§ 2—1—1. 量的概念	81
§ 2—1—2. 实数和数軸	82
§ 2—1—3. 区間	84
§ 2—1—4. 絕對值	85
习 题 2—1—甲	87

第二章 函数概念	88—108
----------	--------

§ 2—2—1. 函数概念	88
§ 2—2—2. 函数的表达法	89
§ 2—2—3. 函数的記号	90
§ 2—2—4. 复合函数	91
习 题 2—2—甲	91
§ 2—2—5. 初等函数和非初等函数	92
§ 2—2—6. 显函数和隱函数	94
§ 2—2—7. 代数函数和超越函数	95
习 题 2—2—乙	96
§ 2—2—8. 函数的定义域	97
习 题 2—2—丙	99
§ 2—2—9. 从函数的图形来認識函数	99
§ 2—2—10. 反函数概念	103
§ 2—2—11. 綫性函数	105

习 题 2-2-丁	107
-----------	-----

第三章 极限的理论 109—146

§ 2-3-1. 无穷小量	109
---------------	-----

§ 2-3-2. 无穷小量举例	110
-----------------	-----

§ 2-3-3. 无穷小量的远算	112
------------------	-----

习 题 2-3-甲	115
-----------	-----

§ 2-3-4. 无穷大量	117
---------------	-----

§ 2-3-5. 无穷大量的远算	119
------------------	-----

习 题 2-3-乙	119
-----------	-----

§ 2-3-6. 数列的极限	120
----------------	-----

§ 2-3-7. 函数的极限	122
----------------	-----

§ 2-3-8. 关于函数的极限的几点注意	129
-----------------------	-----

§ 2-3-9. 关于趋向于极限的量的性质	131
-----------------------	-----

§ 2-3-10. 趋向于极限的量的远算	131
----------------------	-----

§ 2-3-11. 极限存在的准则	135
-------------------	-----

§ 2-3-12. 数 e 的介绍	138
---------------------	-----

习 题 2-3-丙	140
-----------	-----

§ 2-3-13. 无穷小量的比较	141
-------------------	-----

习 题 2-3-丁	145
-----------	-----

第四章 函数的连续性 147—157

§ 2-4-1. 函数的连续性的概念	147
--------------------	-----

§ 2-4-2. 连续函数的远算	151
------------------	-----

§ 2-4-3. 函数的不连续点	153
------------------	-----

§ 2-4-4. 连续函数的性质	156
------------------	-----

习 题 2-4-甲	157
-----------	-----

第三編 微分學

第一章 代數函數的微分法.....158—183

§3—1—1. 引言.....158

§3—1—2. 引出導數概念的問題.....159

§3—1—3. 函數在一点处的導數.....161

§3—1—4. 求導數的四步手續.....163

§3—1—5. 導數的幾何意義.....165

習 題 3—1—甲.....167

§3—1—6. 微分法的公式.....167

§3—1—7. 公式的證明.....168

習 題 3—1—乙.....172

§3—1—8. 複合函數的微分法.....175

§3—1—9. 反函數的導數.....176

§3—1—10. 隱函數的微分法.....178

§3—1—11. 導數的存在問題.....179

習 題 3—1—丙.....181

第二章 一階導數的應用.....184—202

§3—2—1. 曲綫的方向.....184

§3—2—2. 曲綫的切綫方程和法綫方程.....186

習 題 3—2—甲.....188

§3—2—3. 羅爾定理.....189

§3—2—4. 拉格倫日定理.....190

§3—2—5. 函數的遞增和遞減.....191

習 題 3—2—乙.....195

§3—2—6. 函數的極值.....196

習 題 3—2—丙.....201

第三章 超越函数的微分法.....203—227

§3—3—1. 超越函数的导数公式.....	203
§3—3—2. x^x 型函数、非对数函数、幂指函数的导数公式.....	204
习 题 3—3—甲.....	206
§3—3—3. 三角函数的导数.....	208
习 题 3—3—乙.....	209
§3—3—4. 反三角函数的导数.....	210
习 题 3—3—丙.....	213
习 题 3—3—丁(复习题).....	214
§3—3—5. 由参数方程求导数.....	214
§3—3—6. 由极坐标方程求导数.....	216
习 题 3—3—戊.....	217
§3—3—7. 微分概念.....	218
习 题 3—3—己.....	221
§3—3—8. 微分的几何意义.....	221
§3—3—9. 微分的形式不变性.....	222
§3—3—10. 弧的微分.....	223
§3—3—11. 高阶导数.....	224
习 题 3—3—庚.....	227

第四章 高阶导数的应用.....228—265

§3—4—1. 判断函数极值的两个充分准则.....	228
§3—4—2. 曲线凹凸和拐点.....	230
习 题 3—4—甲.....	231
§3—4—3. 柯西定理.....	232
§3—4—4. 罗彼塔法则.....	233
习 题 3—4—乙.....	237
§3—4—5. 函数曲线的渐近线.....	238

习 题 3—4—丙	241
§3—4—6. 研究函数的一般程序	242
习 题 3—4—丁	244
§3—4—7. 曲率概念	244
§3—4—8. 曲率半径、曲率中心、曲率圆	247
§3—4—9. 渐屈线和渐伸线	248
习 题 3—4—戊	250
§3—4—10. 多项式的台劳公式	250
§3—4—11. 台劳公式	252
§3—4—12. 台劳近似多项式	254
习 题 3—4—己	259
§3—4—13. 方程的近似解	260
习 题 3—4—庚	264

(第一册终)

預編 緒論和行列式

第一章 緒 論

§0—1—1. 數學的起源和發展 在這門課程開始的時候，讓我們引用恩格斯的一段話，他的話把數學科學的內容和起源，正確地、完全地敘述出來了：

“純粹數學的對象，是現實世界的空間形式和數量關係，所以是非常現實的資料。這些資料，表現於非常抽象的形式，這一點只能在表面上掩蓋它的來源。可是為了要能夠研究這些形式和關係的純粹情形，那末就應該完全把它們和內容分裂，把內容暫置不管，當作無所可否的東西；這樣就得到不能測量的點，沒有厚度和寬度的線，各個 a 與 b ， x 與 y ，常數和變數……。和一切其他科學一樣：數學是從人類的實際需要而產生的；即是从地段面積及器物容積的測量，從時間及機械學的計算產生出來的。”（注）

這一段話，首先給數學下了正確的定義，隨後又說明數學怎樣由具體進入抽象，最後確認數學是從人類的實際需要而產生的。這樣就使我們學習數學的時候不會弄錯了方向。

雖然我們還不能從文獻上證明：人類最古的文化是關於數和計算的基本知識；可是因為實際生活上的需要的緣故，我們相信這些知識在人類文化史上，肯定要占很重要的位置。

數學的發展可以分成三個階段：在第一階段，數的概念和幾何圖形的概念建立起來了；進行了一些關於整數和分數的計算以及一些幾何形體的度量法則。

（注） 恩格斯：反杜林論 1948年版 吳黎平譯 35頁

远古时代，人类生活简单，在打猎、畜牧的原始生活里面，渐渐有了记数和计算的需要；創造了記載一、二、三、四，……的符号。例如三千年前，我們的祖先就創制了記載数目的文字符号，象是殷墟甲骨文，不但有了前十个数字：

(一) (二) (三) (四) (五) (六) (七) (八) (九) (十)

一 二 三 四 五 六 七 八 九 十

还有了百、千、万、等符号；他們把二千六百五十六写作

𠄎 𠄎 𠄎 𠄎 𠄎 𠄎 𠄎 𠄎 𠄎 𠄎

古人在采用这种抽象的記号的时候，最初是用来記載猎獲物的个数或記載日数月数；后来又記載战争俘獲的人数或物数；他們在抽象符号和具体事物之間建立了一一对应的关系。这就是說他們渐渐獲得了自然数概念。

以后由于实际的需要，又有了計算的方法；由具体事物的增添，損耗、累增、累減、引起整数的加、減、乘、除等抽象的运算知識；由运算的需要，又引起人們对于正、負、分、整的初步認識；由于測量长短大小，又引起乘方，开方的运算方法；从而有了面积和体积等基本知識。并且有了圆周率，不尽根数的需要和認識。这說明了数的概念，起源既早，发展也很快。不过應該指出，数的体系的建立虽早，但理論的完成很晚，正負概念在十六世紀才搞清楚；虚数的意义在十九世紀才搞明白；无理数理論的完成就更晚了，距現在不过六七十一年。

毫無疑問，关于几何形体的知識，起源也不会太晚。自然界里面存在着各式各样的形体，反映在人类的思想意識里面，逐渐形成了关于空間形式的認識和觀念。雨絲、光綫(直綫)，望月、悬虹(圓周)，水珠、气泡(圓球)，飞瀑，流星(拋物綫)，这些几何形体的客观存在是人类思維活动中产生有关几何形体概念的主要因素。切瓜、削果、有橢圓的截痕；蜂巢、雪花，是正六角形的結構；聚粟、堆沙自然形成圓錐体，行星的运行軌道，水波的上下起伏，以及各种晶体的复杂結構，都是引起人們認識几何形体的物質基础。因此在人类的知

識里面，約在二千五百年前就有了系統的幾何知識。

測量面積的知識和幾何學的發展也有密切的關係，大家都知道，尼羅河的每年氾濫，使田地改形易狀，因此田地面積的丈量是迫切需要的；我們的祖先也是這樣，不但對於方田（長方形）、圭田（三角形）和箕田（梯形），需要計算面積；就是構成空間曲面的丘田，（球面的一部分），也需要有近似的計算公式。在埃及、印度、希臘等地，古代民族文化里面，也是一樣。

由於計算的實際需要，方程的解法和研究也發展起來了，在兩千多年以前，人們就接觸到了一次和二次方程，在那時期對於方程的負根，無理根和虛根的認識是很模糊的。在第七世紀祖國的數學家就能解簡單的三次方程，到十一世紀就是系數較大的十次方程也能很好地處理。直到十六世紀西方數學家們才把代數方程的近似解法的理論搞清楚。

總之，在十七世紀以前，數學發展的第一階段完成了。算術、代數、幾何、和三角的內容大體上都很完備了。這一階段的數學可以叫做初等數學。

在十七世紀以後，數學的發展進了第二階段。這兩個階段的時期雖不能嚴格地劃分，但內容有顯著的不同；最突出的一點就是在第二階段里面，引入了變量。由於當時社會生產力和生產關係發展的刺激，數學研究的對象轉移到變量間的函數依從關係。

在第一階段里面，偏重於存在的物質的個別要素（如大小、長短等）的研究；在第二階段以後，進一步對於它們的變化和發展過程也要加以研究。前者顯然不能完全反映實際世界的數量關係和空間形式，只不過零碎的、片段的現象的描述就是了。

恩格斯說：“整個自然界，由其最小單位到最大物體，由砂粒到太陽，從原生物到人，都處在永恆的產生和消滅的過程里面，處在毫不間斷的流動中，處在始終不停的運動和變化中。”（馬恩全集卷14，484頁）。

十七世紀以後的數學，漸漸反映了現實世界的這種永恆的變化。

法国哲学家兼数学家笛卡尔建立了坐标概念，用作图的方法描述了变量间的函数依从关系，就是这一阶段的开端。

恩格斯说：“笛卡尔的变量是数学的转折点……因此微分学和积分学渐渐成了必要的东西，于是不久就产生了微积分。它经牛顿与莱布尼兹的手而全部完成了，然而这门科学却不是他俩个发现的。”（自然辩证法，235页）

这一段话把第二阶段的数学的主要内容完全表达出来了。这一阶段的数学可以叫做古典的高等数学。

从十九世纪以后，由于工业生产的机械化，各门科学都有进展。数学也有飞跃地发展，进入了第三阶段。发展的方向是沿着抽象化的道路前进的。它研究更广泛、更一般的数量关系，通常的数和量仅仅是一种特殊情形；它研究更广泛、更一般的空间形式，通常的一维、二维和三维空间，仅仅是广义的抽象的空间的特殊情形。前者如群论，矩阵论，后者如拓扑学，抽象空间论等等。

但是不要误认数学向抽象方面的发展，是可以脱离实际的。数学从它第一阶段的发展，就是在直接的实际生活需要的影响下完成的；研究现实世界的各方面的一切科学，在或多或少的程度上都和数量关系或空间形式发生关系，因而要用到数学。数学本身逐渐具备了一套完整的体系和系统的方法；其他科学也对数学提出了新的要求，因此推动着数学更向前向上发展。理论脱离实际地去研究数学，不可能有很大的收获的。

§0—1—2. 初等数学和高等数学 象前节所说的一样，在十七世纪以前的数学，是属于初等数学的范畴的。首先是自然数和正的分数的（包括小数）的计算方法（算术）；其次是关于数系的建立，代数式的恒等变换的研究和方程的解法和讨论（初等代数）；同时对于平面上的直线和圆，作了系统的、详尽的研究（平面几何）；由相似三角形的比例性质出发，搞清楚了三角函数的恒等变换和解三角形的方法（三角法）；更进一步来探讨空间的点、线、面、体的性质和计量关系（立体几何）；这就是一套初等数学的主要内容。不过应该指

出，在讀者學習初等數學的時候，已經接觸到一些變量問題：在代數里面，接觸到變量和函數概念；在幾何學里面，接觸到動點的軌迹問題；在三角法里面，接觸到三角函數的周期性變化的情況；並且在許多方面，接觸到極限概念；這就為學習高等數學，打下了一定的基礎。

我們仔細考察，在初等數學里面，有兩個特點：一方面所討論的問題，以常量為主；無論是恆等式，解作圖題，解三角形，解方程，作各種運算，都是在研究或計算一個具體的、不變的數量；一方面所運用的方法，都是個別的而不是一般的；例如代數的方法和幾何的方法一般不能通用；在幾何里面作一個三角形的圖，也用不上三角法里面解三角形的方法等等。

現在進一步學習高等數學，正是前面所說的十七到十八世紀的古典的高等數學。內容是解析幾何和數學分析。前者的任務是用代數的方法來研究幾何圖形的性質和變化；後者的主要任務是對變量間的函數依從關係作全面的研究。這種數學也有兩個特點：一方面是以研究變量為主，一方面是用了一般的系統的方法。在解析幾何里面，始終是建立幾何軌迹和代數方程（或超越方程）間的聯繫；在數學分析里面始終是以無窮小增量為主，通過極限而建立一系列基本概念和運算方法。

§0—1—3. 一些歷史知識 祖國勞動人民，從古代就有了豐富的數學知識。在第一世紀的數學家就完成了一部九章算術。這本書一直到十二世紀以前，成為祖國數學方面的經典著作。這是為當時的建築師，土地丈量員、會計員、天文學家編寫的數學知識全書。內容方面包括了一些面積和體積的計算方法，比例和百分法的演算，通分和約分的算法，綫性聯立方程的解法，二次方程正根的計算，正負數的算法和意義等等。應該指出，在正負數的認識和使用上，中國數學家超出了其他國家的數學家幾世紀之久。

在第七世紀前期，王孝通就有了三次方程的解法問題的提出。十三世紀的秦九韶建立了天元術（天元就是一個未知數，地元是第二個

未知数)，他可以解二次、三次以至十次的高次方程，（求方程的近似实根），他的方法較西方数学家的同样方法，早六百多年。无疑的，这是中国数学家最偉大的成就之一。

元朝的朱世杰在十四世紀初年出版了四元玉鉴，这是一部探討多元联立方程的書。

不定方程的研究也很早，这种問題，是以应用問題的方式提出的，它接触到整数論里面的等余式問題。在九章算术里面，已提出并解决了这样的問題。西方数学家高斯提出同样問題的时候，已经是十九世紀了。

关于等差級数問題，到十三世紀已很发达，古人管高級等差級数叫做垛积，在明朝的数学書籍垛积比类里面，已然系統地推导了成套的高級等差級数求和公式。

在几何方面，祖国古代的系统知識是不够的，只是在某些問題方面，突出的有所研究，例如商高定理，是从九章算术里面就引用了的；在圆周率 π 的計算方面，也有很早的发现；汉朝（第二世紀初）的張衡，用 $\sqrt{10}$ 作为 π 的近似值；刘徽（第三世紀）由內接正192边形，算出 π 的近似值 $\frac{157}{50}$ ，祖冲之（第五世紀）確定了下面的不等式

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

并且用 $\frac{355}{113}$ 作为 π 的近似值

在解决几何的实用問題方面，刘徽的海島算經是值得提出的。他利用了相似三角形的比例性質来解决一些不可接近的物体的高度和距离的問題。

祖国数学的发展不是孤立的，而是跟东方其他国家的科学发展起着交互推动的作用的。例如負数首先出现在祖国的著作里面，也可以在印度人的著作里面找到；关于等差級数的求和法，也可以在印度人的著作里面，找到类似的記載。

中国在十四世紀中叶，文化的发展停滯下来了。在封建制度保持不变的情况下，数学的发达也停滯下来了。因此，从这时期以后，反落

后于西方。这是封建制度的后果，也是资本主义国家奴役中国人民的后果。

在中国民族解放运动发展以后，数学在中国才走上了创造性发展的道路。从1928年到1953年，大约有1100篇数学论文发表在世界的各种数学杂志里面。

但是在反动统治时期，我们的发展仍受到很大的阻碍，象是数学家华罗庚教授的创作——堆垒素数论，在苏联有译本发表；在本国却一直不能出版，就连原稿都被出版机构遗失了；直到解放后；华罗庚教授才根据苏联译本，再写出原稿，在中国科学院的支持下出版了。其他数学家如苏步青、陈建功等，他们的著作，也都是近年才陆续出版。

在毛主席发出向科学进军的伟大号召以后，全国数学家动起来了，纷纷提出在十二年内赶上世界的先进水平的保证，特别是在苏联的帮助下，开始有计划的向自然科学和技术科学里面最迫切需要的数学如微分方程、概率论、计算数学等方向前进。在这些方面的深入研究，正在逐步发展。

我们相信，在党和政府的大力支持下，在全国数学工作者的不断努力下，完全有可能在十二年内使我们的数学科学水平，赶上世界的先进水平。只要我们不怕艰难，就有可能攻破科学的堡垒。马克思在资本论的序言里面告诉我们：“在科学上面是没有平坦的大路可走的，只有那在崎岖小路的攀登上不畏劳苦的人有希望到达光辉的顶点”。这就是我们学习高等数学和其他科学的时候，应该掌握的基本精神。

第二章 二阶和三阶行列式

§ 0-2-1. 二阶行列式 假定有两个二元一次方程:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

为了求方程组(1)的解, 我们用加减消元法: 可以得到

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1, \quad (2)$$

$$\text{和} \quad (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1, \quad (3)$$

如果 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, 那么从方程(2)和(3), 可以求得(1)的解:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (4)$$

由此可知, 方程组(1)是否有唯一解, 由 $a_1b_2 - a_2b_1$ 是否不等于零来决定, 因此管它叫做方程组(1)的决定式, 并且用符号 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 来表达; 这个符号也叫做行列式。一般地说起来, 如果有四个数, 排成下面的方阵

$$A_1 \ B_1$$

$$A_2 \ B_2$$

那末差式

$$A_1B_2 - A_2B_1$$

就叫做对应于这个方阵的行列式。用下面的符号来表达它:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

数 A_1, A_2, B_1, B_2 叫做行列式的元素, 元素 A_1 和 B_1 构成行列式的第一列; A_2 和 B_2 构成第二列; 又 A_1 和 A_2 构成第一行; B_1 和 B_2 构成第二行; A_1 和 B_2 构成行列式的主要斜行, A_2 和 B_1 构成次要斜行, 这个行列式只有两行和两列, 叫做二阶行列式。

由行列式的定义，可知

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{vmatrix} B_1 & A_1 \\ B_2 & A_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

这就是说：二阶行列式对于行与列的对调并不改变它的数值；对于两行（或两列）的对调要改变符号。

显然，用行列式可以表达方程组(1)的解：

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (5)$$

其中分母里面的行列式是方程组的行列式；两个分子里面的各行列式是分别把分母里面的行列式的第一行和第二行换成方程组的常数项而获得的。

如果方程组(1)的行列式不等于零，那末公式(5)就表示(1)的唯一的解（如例1）；如果方程组(1)的行列式等于零，那末

$$a_1 b_2 = a_2 b_1, \text{ 或 } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

这就是说，在方程组里面，两个未知数的系数成比例。此时，如果对应两常数项的比 $\frac{c_1}{c_2}$ 不等于 $\frac{a_1}{a_2}$ 或 $\frac{b_1}{b_2}$ ，即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ，

方程组就不能有解答，它们是不相容的（如例2.）；如果 $\frac{c_1}{c_2}$ 也等于 $\frac{a_1}{a_2}$ 或 $\frac{b_1}{b_2}$ ，即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ，

方程组就是不定的，它将有无数个解答。（如例3）。

所以我们得到结论如下：

（一）如果方程组（1）里面两个方程对应未知数的四个系数不成比例，那么方程组是相容的，而且有唯一的解（公式(5)）；

（二）如果对应未知数的四个系数成比例，但对对应常数项不和它们成比例，那么方程组是不相容的，没有任何解答；