高等數学講义

[illegible]理論力学教研組編

1957

人民[illegible]御園学院教材与出版科

高等数学講义

第一册目录

預编 緒論和行列式

第一编 平面解析几何

第二編　函数和極限

第三编 微分学

(第一册終)

預編　緒論和行列式

第一章　緒　論

§0—1—1.数学的起源和发展　在这門課程开始的时候，讓我們引用恩格斯的一段話，他的話把数学科学的內容和起源，正確地、完全地叙述出来了：

"純粹数学的对象，是現实世界的空間形式和数量关系，所以是非常現实的資料。这些資料，表現于非常抽象的形式，这一点只能在表面上掩盖它的来源。可是为了要能够研究这些形式和关系的純粹情形，那末就应該完全把它們和內容分裂，把內容暫置不管，当作无所可否的东西；这样就得到不能測量的点，沒有厚度和寬度的綫，各个a与b，x与y，常数和变数……。和一切其他科学一样：数学是从人类的实际需要而产生的；即是从地段面积及器物容积的測量，从时間及机械学的計算产生出来的。"（注）

这一段話，首先給数学下了正確的定义，随后又說明数学怎样由具体进入抽象，最后確認数学是从人类的实际需要而产生的。这样就使我們学习数学的时候不会弄錯了方向。

虽然我們还不能从文献上証明：人类最古的文化是关于数和計算的基本知識；可是因为实际生活上的需要的緣故，我們相信这些知識在人类文化史上，肯定要占很重要的位置。

数学的发展可以分成三个阶段：在第一阶段，数的概念和几何图形的概念建立起来了；进行了一些关于整数和分数的計算以及一些几何形体的度量法則。

（注）　恩格斯：　反杜林論　1948年版　吳黎平譯　35頁

远古时代，人类生活简单；在打猎、畜牧的原始生活里面，漸漸有了記数和計算的需要；創造了記載一、二、三、四，……的符号。例如三千年前，我們的祖先就創制了記載数目的文字符号，象是殷墟甲骨文，不但有了前十个数字：

（一）（二）（三）（四）（五）（六）（七）（八）（九）（十）

一　＝　≡　亖　㐅　∩　十　)(　㔾　丨

还有了百、千、万、等符号；他們把二千六百五十六写作

丯　囱　文　∩

古人在采用这种抽象的記号的时候，最初是用来記載猎獲物的个数或記載日数月数；后来又記載战争俘獲的人数或物数；他們在抽象符号和具体事物之間建立了一一对应的关系。这就是說他們漸漸獲得了自然数概念。

以后由于实际的需要，又有了計算的方法；由具体事物的增添，損耗、累增、累減、引起整数的加、減、乘、除等抽象的运算知識；由运算的需要，又引起人們对于正、負、分、整的初步認識；由于測量长短大小，又引起乘方，开方的运算方法；从而有了面积和体积等基本知識。并且有了园周率，不尽根数的需要和認識。这說明了数的概念，起源旣早，发展也很快。不过应該指出，数的体系的建立虽早，但理論的完成很晚，正負概念在十六世紀才搞清楚；虚数的意义在十九世紀才搞明白；无理数理論的完成就更晚了，距現在不过六七十年。

毫无疑問，关于几何形体的知識，起源也不会太晚。自然界里面存在着各式各样的形体，反映在人类的思想意識里面，逐漸形成了关于空間形式的認識和观念。雨絲、光綫（直綫），望月、悬虹（园周），水珠、气泡（园球），飞瀑，流星（抛物綫），这些几何形体的客观存在是人类思維活动中产生有关几何形体概念的主要因素。切瓜、削果、有椭园的截痕；蜂巢、雪花，是正六角形的結构；聚粟、堆沙自然形成园錐体，行星的运行軌道，水波的上下起伏，以及各种晶体的复杂結构，都是引起人們認識几何形体的物質基础。因此在人类的知

識里面，約在二千五百年前就有了系統的几何知識。

测量面积的知識和几何学的发展也有密切的关系，大家都知道，尼罗河的每年汎濫，使田地改形易状，因此田地面积的丈量是迫切需要的；我們的祖先也是这样，不但对于方田（长方形）、圭田（三角形）和箕田（梯形），需要計算面积；就是构成空間曲面的丘田，（球面的一部分），也需要有近似的計算公式。在埃及、印度、希腊等地，古代民族文化里面，也是一样。

由于計算的实际需要，方程的解法和研究也发展起来了，在两千多年以前，人們就接触到了一次和二次方程，在那时期对于方程的負根，无理根和虚根的認識是很模糊的。在第七世紀祖国的数学家就能解簡单的三次方程，到十一世紀就是系数較大的十次方程也能很好地处理。直到十六世紀西方数学家們才把代数方程的近似解法的理論搞清楚。

总之，在十七世紀以前，数学发展的第一阶段完成了。算术、代数、几何、和三角的內容大体上都很完备了。这一阶段的数学可以叫做初等数学。

在十七世紀以后，数学的发展进了第二阶段。这两个阶段的时期虽不能严格地划分，但內容有显著的不同；最突出的一点就是在第二阶段里面，引入了变量。由于当时社会生产力和生产关系发展的刺激，数学研究的对象轉移到变量間的函数依从关系。

在第一阶段里面，偏重于存在的物質的个别要素（如大小、长短等）的研究；在第二阶段以后，进一步对于它們的变化和发展过程也要加以研究。前者显然不能完全反映实际世界的数量关系和空間形式，只不过零碎的、片段的現象的描述就是了。

恩格思說："整个自然界，由其最小单位到最大物体，由砂粒到太阳，从原生物到人，都处在永恆的产生和消灭的过程里面，处在毫不間断的流动中，处在始終不停的运动和变化中。"（馬恩全集卷14，484頁）。

十七世紀以后的数学，渐渐反映了現实世界的这种永恆的变化。

法国哲学家兼数学家笛卡尔建立了坐标概念，用作图的方法描述了变量間的函数依从关系，就是这一阶段的开端。

恩格思說："笛卡尔的变量是数学的轉折点……因此微分学和积分学漸漸成了必要的东西，于是不久就产了微积分。它經牛頓与莱布尼茲的手而全部完成了，然而这門科学却不是他俩个发現的。"（自然辯証法，235頁）

这一段話把第二阶段的数学的主要內容完全表达出来了。这一阶段的数学可以叫做古典的高等数学。

从十九世紀以后，由于工业生产的机械化，各門科学都有进展。数学也有飞跃地发展，进入了第三阶段。发展的方向是沿着抽象化的道路前进的。它研究更广泛、更一般的数量关系，通常的数和量仅仅是一种特殊情形；它研究更广泛、更一般的空間形式，通常的一維、二維和三維空間，仅仅是广义的抽象的空間的特殊情形。前者如羣論，矩陣論，后者如拓朴学，抽象空間論等等。

但是不要誤認数学向抽象方面的发展，是可以脫离实际的。数学从它第一阶段的发展，就是在直接的实际生活需要的影响下完成的；研究現实世界的各方面的一切科学，在或多或少的程度上都和数量关系或空間形式发生关系，因而要用到数学。数学本身逐漸具备了一套完整的体系和系統的方法；其他科学也对数学提出了新的要求，因此推动着数学更向前向上发展。理論脫离实际地去研究数学，不可能有很大的收穫的。

§0—1—2.初等数学和高等数学　象前节所說的一样，在十七世紀以前的数学，是屬于初等数学的范疇的。首先是自然数和正的分数（包括小数）的計算方法（算术）；其次是关于数系的建立，代数式的恆等变换的研究和方程的解法和討論（初等代数）；同时对于平面上的直綫和园，作了系統的、詳尽的研究（平面几何）；由相似三角形的比例性質出发，搞清楚了三角函数的恆等变换和解三角形的方法（三角法）；更进一步来探討空間的点、綫、面、体的性質和計量关系（立体几何）；这就是一套初等数学的主要內容。不过应該指

出，在讀者学习初等数学的时候，已經接触到一些变量問題：在代数里面，接触到变量和函数概念；在几何学里面，接触到动点的軌迹問題；在三角法里面，接触到三角函数的周期性变化的情况；并且在許多方面，接触到极限概念；这就为学习高等数学，打下了一定的基础。

我們仔細考察，在初等数学里面，有两个特点：一方面所討論的問題，以常量为主；无論是証恒等式，解作图題，解三角形，解方程，作各种运算，都是在研究或計算一个具体的、不变的数量；一方面所运用的方法，都是个别的而不是一般的；例如代数的方法和几何的方法一般不能通用；在几何里面作一个三角形的图，也用不上三角法里面解三角形的方法等等。

現在进一步学习高等数学，正是前面所說的十七到十八世紀的古典的高等数学。內容是解析几何和数学分析。前者的任务是用代数的方法来研究几何图形的性質和变化；后者的主要任务是对变量間的函数依从关系作全面的研究。这种数学也有两个特点：一方面是以研究变量为主，一方面是运用了一般的系統的方法。在解析几何里面，始終是建立几何軌迹和代数方程（或超越方程）間的联系；在数学分析里面始終是以无穷小增量为主，通过极限而建立一系列基本概念和运算方法。

§0—1—3. 一些历史知識　祖国劳动人民，从古代就有了丰富的数学知識。在第一世紀的数学家就完成了一部九章算术。这本書一直到十二世紀以前，成为祖国数学方面的經典著作。这是为当时的建筑师，土地丈量員、会計員、天文学家編写的数学知識全書。內容方面包括了一些面积和体积的計算方法，比例和百分法的演算，通分和約分的算法，綫性联立方程的解法，二次方程正根的計算，正負数的算法和意义等等。应該指出，在正負数的認識和使用上，中国数学家超出了其他国家的数学家几世紀之久。

在第七世紀前期，王孝通就有了三次方程的解法問題的提出。十三世紀的秦九韶建立了天元术（天元就是一个未知数，地元是第二个

未知数），他可以解二次、三次以至十次的高次方程，（求方程的近似实根），他的方法較西方数学家的同样方法，早六百多年。无疑的，这是中国数学家最偉大的成就之一。

元朝的朱世杰在十四世紀初年出版了四元玉鉴，这是一部探討多元联立方程的書。

不定方程的研究也很早，这种問題，是以应用問題的方式提出的，它接触到整数論里面的等余式問題。在九章算术里面，已提出并解决了这样的問題。西方数学家高斯提出同样問題的时候，已然是十九世紀了。

关于等差級数問題，到十三世紀已很发达，古人管高級等差級数叫做垜积，在明朝的数学書籍垜积比类里面，已然系統地推导了成套的高級等差級数求和公式。

在几何方面，祖国古代的系統知識是不够的，只是在某些問題方面，突出的有所研究，例如商高定理，是从九章算术里面就引用了的；在圆周率π的計算方面，也有很早的发現：汉朝（第二世紀初）的張衡，用$\sqrt{10}$作为π的近似值；刘徽（第三世紀）由內接正192边形，算出π的近似值$\frac{157}{50}$，祖冲之（第五世紀）確定了下面的不等式

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

并且用$\frac{355}{113}$作为π的近似值

在解决几何的实用問題方面，刘徽的海島算經是值得提出的。他利用了相似三角形的比例性質来解决一些不可接近的物体的高度和距离的問題。

祖国数學的发展不是孤立的，而是跟东方其他国家的科学发展起着交互推动的作用的。例如負数首先出現在祖国的著作里面，也可以在印度人的著作里面找到；关于等差級数的求和法，也可以在印度人的著作里面，找到类似的記載。

中国在十四世紀中叶，文化的发展停滞下来了。在封建制度保持不变的情况下，数学的发达也停滞下来了。因此，从这时期以后，反落

后于西方。这是封建制度的后果，也是資本主义国家奴役中国人民的后果。

在中国民族解放运动发展以后，数学在中国才走上了創造性发展的道路。从1928年到1953年，大約有1100篇数学論文发表在世界的各种数学杂志里面。

但是在反动統治时期，我們的发展仍受到很大的阻碍，象是数学家华罗庚教授的創作——堆垒素数論，在苏联有譯本发表；在本国却一直不能出版，就連原稿都被出版机构遺失了；直到解放后；华罗庚教授才根据苏联譯本，再写出原稿，在中国科学院的支持下出版了。其他数学家如苏步青、陈建功等，他們的著作，也都是近年才陆續出版。

在毛主席发出向科学进軍的偉大号召以后，全国数学家动起来了，紛紛提出在十二年內赶上世界的先进水平的保証，特别是在苏联的帮助下，开始有計划的向自然科学和技术科学里面最迫切需要的数学如微分方程、概率論、計算数学等方向前进。在这些方面的深入研究，正在逐步发展。

我們相信，在党和政府的大力支持下，在全国数学工作者的不断努力下，完全有可能在十二年內使我們的数学科学水平，赶上世界的先进水平。只要我們不怕艰难，就有可能攻破科学的堡垒。馬克思在資本論的序言里面告訴我們："在科学上面是沒有平坦的大路可走的，只有那在崎嶇小路的攀登上不畏劳苦的人有希望到达光輝的頂点"。这就是我們学习高等数学和其他科学的时候，应該掌握的基本精神。

第二章　二阶和三阶行列式

§0－2－1.二阶行列式　假定有两个二元一次方程：

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y={}_1c \\ a_2x+b_2y={}_2c \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

为了求方程組(1)的解，我們用加減消元法，可以得到

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1, \tag{2}$$

和

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1, \tag{3}$$

如果$a_1b_2-a_2b_1\neq0$，那么从方程(2)和(3)，可以求得(1)的解：

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \tag{4}$$

由此可知，方程組(1)是否有唯一解，由$a_1b_2-a_2b_1$是否不等于零来決定，因此管它叫做方程組(1)的决定式，并且用符号$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$来表达；这个符号也叫做行列式。一般地說起来，如果有四个数，排成下面的方陣

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}$$

那末差式

$$A_1B_2-A_2B_1$$

就叫做对应于这个方陣的行列式。用下面的符号来表达它：

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}。$$

数A_1，A_2，B_1，B_2叫做行列式的元素，元素A_1和B_1构成行列式的第一列；A_2和B_2构成第二列：又A_1和A_2构成第一行；B_1和B_2构成第二行；A_1和B_2构成行列式的主要斜行，A_2和B_1构成次要斜行，这个行列式只有两行和两列，叫做二阶行列式。

由行列式的定义，可知

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \quad 和 \quad \begin{vmatrix} B_1 & A_1 \\ B_2 & A_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

这就是說：二阶行列式对于行与列的对調并不改变它的数值；对于两行（或两列）的对調要改变符号。

显然，用行列式可以表达方程組(1)的解：

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 b_1 \\ c_2 b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}} \tag{5}$$

其中分母里面的行列式是方程組的行列式；两个分子里面的各行列式是分別把分母里面的行列式的第一行和第二行换成方程組的常数項而獲得的。

如果方程組(1)的行列式不等于零，那末公式(5)就表示(1)的唯一的一組解（如例1）；如果方程組(1)的行列式等于零，那末

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 或 \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

这就是說，在方程組里面，两个未知数的系数成比例。此时，如果对应两常数項的比 $\frac{c_1}{c_2}$ 不等于 $\frac{a_1}{a_2}$ 或 $\frac{b_1}{b_2}$，即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$，方程組就不能有解答，它們是不相容的（如例2.）；如果 $\frac{c_1}{c_2}$ 也等于 $\frac{a_1}{a_2}$ 或 $\frac{b_1}{b_2}$，即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$，

方程組就是不定的，它将有无数个解答。（如例3）。

所以我們得到結論如下：

（一）如果方程組（1）里面两个方程对应未知数的四个系数不成比例，那么方程組是相容的，而且有唯一的解（公式(5)）；

（二）如果对应未知数的四个系数成比例，但对应常数項不和它們成比例，那么方程組是不相容的，沒有任何解答；