

教育部考试中心组编

根据修订后的2007年

《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》编写

专科起点升本科入学考试参考丛书

高等数学(一)

考试大纲解析

2009

电大版



中央广播电视大学出版社

附錄(CIP)目錄圖書刊圖

根据修订后的 2007 年
《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》编写
专科起点升本科入学考试参考丛书

高等数学(一)考试大纲解析

教育部考试中心组编

出版：中央广播电视大学出版社
地址：北京市西城区德胜门内大街2号
电话：010-68183524
邮编：100081
网址：<http://www.cctup.com>
发行：中央广播电视大学出版社
印刷：北京印刷厂

中央广播电视大学出版社

北京

(封面设计：张明)

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)考试大纲解析:2009版/教育部考试
中心组编. —北京:中央广播电视大学出版社,2008.12
(专科起点升本科入学考试参考丛书)

根据修订后的2007年《全国各类成人高等学校招生复习
考试大纲》编写

ISBN 978-7-304-04195-3

I. 高… II. 教… III. 高等数学-成人教育:高等
教育-升学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第192841号

本书含有特殊防伪标识,版权所有,翻印必究。

根据修订后的2007年

《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》编写

专科起点升本科入学考试参考丛书

高等数学(一)考试大纲解析

教育部考试中心组编

出版·发行:中央广播电视大学出版社

电话:发行部 010-58840200

总编室 010-68182524

地址:出版社 北京市海淀区西四环中路45号

邮编:100039

发行部 北京市海淀区魏公村路2号27号信箱

邮编:100081

网址:<http://www.crtvup.com.cn>

经销:新华书店北京发行所

策划编辑:徐东丽

印刷:北京云浩印刷有限责任公司

印数:0001~5000

版本:2008年12月第1版

2008年12月第1次印刷

开本:B5

印张:17

字数:327千字

书号:ISBN 978-7-304-04195-3

定价:24.50元

(如有缺页或倒装,本社负责退换)

前 言

2006年12月,教育部学生司和考试中心组织专家对《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》(以下简称《大纲》)进行了局部修订。

针对《大纲》的上述修订,为帮助专科起点升本科的考生复习备考,我们组织参加《大纲》修订的专家对2005年版的《考试大纲解析》进行了相应的修订。这套书按照修订后的《大纲》的体例和复习考试内容要求进行了深入的阐述和讲解,力求帮助考生全面了解和准确把握《大纲》的内容和要求,从而提高知识水平和能力水平。

本套丛书共10册,即《政治考试大纲解析》、《英语考试大纲解析》、《大学语文考试大纲解析》、《教育理论考试大纲解析》、《高等数学(一)考试大纲解析》、《高等数学(二)考试大纲解析》、《民法考试大纲解析》、《艺术概论考试大纲解析》、《生态学基础考试大纲解析》、《医学综合考试大纲解析》。

书中若有疏漏和不当之处,恳请读者指正。

教育部考试中心

2007年1月

目 录

第一篇 复习内容

第一章 极限、连续	(3)
§ 1.1 极 限	(3)
§ 1.2 函数的连续性	(15)
第二章 一元函数微分学	(22)
§ 2.1 函数的导数概念	(22)
§ 2.2 函数的求导方法	(26)
§ 2.3 函数的微分	(33)
§ 2.4 微分中值定理	(35)
§ 2.5 导数的应用	(42)
第三章 一元函数积分学	(55)
§ 3.1 不定积分的概念与性质	(55)
§ 3.2 换元积分法	(61)
§ 3.3 分部积分法	(71)
§ 3.4 简单有理函数的不定积分	(76)
§ 3.5 定积分的概念与性质	(78)
§ 3.6 定积分的计算	(85)
§ 3.7 无穷区间上的广义积分	(92)
§ 3.8 定积分的应用	(96)
第四章 空间解析几何	(105)
§ 4.1 平面与直线	(105)
§ 4.2 几种二次曲面	(110)
第五章 多元函数微积分学	(116)
§ 5.1 多元函数的基本概念	(116)
§ 5.2 偏导数与全微分	(119)
§ 5.3 多元函数的微分法	(125)

§ 5.4	二元函数的极值	(130)
§ 5.5	二重积分的概念与计算	(133)
§ 5.6	二重积分的应用	(143)
第六章	无穷级数	(146)
§ 6.1	基本概念与性质	(146)
§ 6.2	正项级数	(147)
§ 6.3	任意项级数	(151)
§ 6.4	幂级数	(153)
§ 6.5	将初等函数展开为幂级数	(158)
第七章	常微分方程	(162)
§ 7.1	基本概念	(162)
§ 7.2	一阶微分方程	(163)
§ 7.3	二阶常系数线性微分方程	(170)

第二篇 分类例题解析

第八章	选择题	(179)
第九章	填空题	(197)
第十章	解答题	(217)

附 录

2005 年成人高等学校专升本招生全国统一考试	
高等数学(一)	(245)
高等数学(一) 试题参考答案	(247)
2006 年成人高等学校专升本招生全国统一考试	
高等数学(一)	(250)
高等数学(一) 试题参考答案	(252)
2007 年成人高等学校专升本招生全国统一考试	
高等数学(一)	(256)
高等数学(一) 试题参考答案和评分参考	(258)
2008 年成人高等学校专升本招生全国统一考试	
高等数学(一)	(261)
高等数学(一) 试题参考答案和评分参考	(263)

第一篇

复习内容



第一章 极限、连续

§ 1.1 极 限

一、考试大纲要求

1. 理解极限的概念, (对极限定义中“ $\varepsilon - N$ ”、“ $\varepsilon - \delta$ ”、“ $\varepsilon - M$ ”等形式的描述不作要求), 能根据极限概念分析函数的变化趋势. 会求函数在一点处的左极限与右极限, 了解函数在一点处极限存在的充分必要条件.
2. 了解极限的有关性质, 掌握极限的四则运算法则.
3. 理解无穷小量、无穷大量的概念, 掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系. 会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等价). 会运用等价无穷小量代换求极限.
4. 熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

二、基本知识

(一) 数列的极限

1. 数列的定义

按照某种规律排列的一串无穷尽的数

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$
称为数列, 简记作 $\{x_n\}$. 其中每一个数称为数列的项, x_n 称为通项.

2. 数列的性质

(1) 单调性 设有数列 $\{x_n\}$. 如果对于每个 n , 都有 $x_{n+1} > x_n$ (或 $x_{n+1} < x_n$), 则称 $\{x_n\}$ 为单调增加 (或单调减少) 数列. 单调增加数列与单调减少数列统称为单调数列.

(2) 有界性 设有数列 $\{x_n\}$. 如果存在正数 M , 使得对于一切 n , 都有 $|x_n| < M$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 否则称数列 $\{x_n\}$ 是无界的.

3. 数列极限的定义

设有数列 $\{x_n\}$ 和常数 a . 如果对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存

在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立, 则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 这时也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a . 如果数列没有极限, 则称数列发散.

4. 收敛数列的性质

收敛数列必有界. 反之不成立, 即有界数列不一定收敛.

5. 数列极限的四则运算法则

设有数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

(二) 函数的极限

1. 函数极限的定义

(1) $x \rightarrow \infty$ 时函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在 $|x| > M$ 时有定义, A 为常数. 如果对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 X , 使得当 $|x| > X$ 时, 不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立, 则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

(2) $x \rightarrow x_0$ 时函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义, A 为一常数. 如果对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 δ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立, 则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

(3) 函数的左、右极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧 (或右侧) 邻近有定义 (在点 x_0 可以没有定义), A 为一常数. 如果对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 δ , 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ (或 $x_0 < x < x_0 + \delta$) 时, 不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立, 则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限 (或右极限), 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0)$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0)$).

2. $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件

$x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件是左、右极限存在且相等, 即

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

3. 函数极限的性质

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则其值必定惟一, 常称之为极限的惟一性定理.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则必存在点 x_0 的某一个邻域, 在该邻域内, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$);

(3) 若在点 x_0 的某一去心邻域内有 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则必有 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

4. 函数极限的四则运算法则

设有函数 $f(x), g(x)$. 如果在自变量 x 的同一变化过程中, 有 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B;$$

$$(2) \lim [f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B;$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

5. 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(三) 无穷大和无穷小

1. 定义

(1) 无穷大的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内 (或 $|x| > N$ 时) 有定义. 如果对于任意给定的正数 M (不论它有多大), 总存在正数 δ (或正数 X), 使得当

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ (或 } |x| > X \text{)}$$

时, 不等式 $|f(x)| > M$ 恒成立, 则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时为无穷大, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{)}.$$

(2) 无穷小的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内 (或 $|x| > N$ 时) 有定义. 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{)},$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时为无穷小.

2. 无穷大和无穷小的关系

在自变量 x 的某一变化过程中, 如果 $\lim f(x) = 0$ ($f(x) \neq 0$), 则 $\lim \frac{1}{f(x)} = \infty$;

反之, 若

$$\lim f(x) = \infty,$$

则

$$\lim \frac{1}{f(x)} = 0.$$

3. 无穷小与函数极限的关系

如果在自变量 x 的某一变化过程中, 函数 $f(x)$ 有极限 A , 则在 x 的同一变化

过程中,函数 $\alpha(x) = f(x) - A$ 是无穷小;反之,如果函数 $f(x)$ 可表示为

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

其中函数 $\alpha(x)$ 在 x 的某一变化过程中为无穷小,则常数 A 是在 x 的同一变化过程中函数 $f(x)$ 的极限.

4. 无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的和或乘积仍是无穷小;

(2) 无穷小与有界函数的乘积是无穷小.

5. 无穷小的比较

设函数 $\alpha(x)$ 、 $\beta(x)$ 是自变量 x 在同一变化过程中的两个无穷小.

(1) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小, 记作

$$\alpha(x) = o(\beta(x));$$

(2) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, 则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小;

(3) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C (C \neq 0)$, 则称 $\alpha(x)$ 是与 $\beta(x)$ 同阶的无穷小;

(4) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称 $\alpha(x)$ 是与 $\beta(x)$ 等价的无穷小, 记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

6. 等价无穷小的代换定理

设 $\alpha(x)$ 、 $\alpha'(x)$ 、 $\beta(x)$ 、 $\beta'(x)$ 是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小, 且

$$\alpha(x) \sim \alpha'(x), \beta(x) \sim \beta'(x), \lim \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} \text{ 存在,}$$

则

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}.$$

三、例题分析

(一) 求数列的极限

求数列极限的方法是: 利用极限的四则运算法则和极限存在准则, 以及如下的已知极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} (\alpha > 0, \alpha \text{ 为常数}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (1.2)$$

举几个例子说明.

例 1.1 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{n^3 + 5n^2 + n};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 + 1)(n^2 + 5n + 6)}{2n^5 - 4n^2 + 3};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + n^2 - 3}{n^3 - n^2 + 1}.$$

解 这三个数列极限都呈“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”形式. 且通项都是 n 的有理分式. 求这种形式的极限的方法是: 用分子、分母中 n 的次数最高的项 (不包括系数) 同除分子、分母, 然后运用极限四则运算法则及已知数列极限 (1.1) 求极限.

(1) 用 n^3 除分子、分母, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{n^3 + 5n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} = 0$$

(2) 用 n^5 除分子、分母, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 + 1)(n^2 + 5n + 6)}{2n^5 - 4n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)\left(1 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}\right)}{2 - \frac{4}{n^3} + \frac{3}{n^5}} = \frac{1}{2}$$

(3) 用 n^4 除分子、分母, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + n^2 - 3}{n^3 - n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^4}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \infty$$

例 1.2 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}}$.

解 这里的极限仍呈“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”形式, 但通项不再是 n 的有理分式, 而是 n 的无理分式. 求极限方法仍与例 1.2 相同. 用 n 同除分子、分母, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}$$

例 1.3 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

解 这里的极限呈“ $\infty - \infty$ ”的形式. 方法是将其有理化后再求极限.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0 \end{aligned}$$

例 1.4 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n.$$

解 这四个极限都呈“ 1^∞ ”形式. 因此, 自然会想到利用重要极限公式.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = e \cdot 1 = e$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2-2};$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{-2} = e \cdot 1 = e$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = e^2$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n/2}\right)^{n/2}\right]^2 = e^2$$

(二) 求函数的极限

求函数的极限的方法是: 利用极限的四则运算法则、两个重要极限、无穷小乘有界函数仍是无穷小、等价无穷小代换定理等, 以及如下一些已知极限:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C = C (C \text{ 为常数}); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0 (\alpha > 0, \text{常数})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C (C \text{ 为常数}); \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

例 1.5 (选择题) 题目中给出四个选项, 其中只有一个选项符合题意, 请选出符合题意的选项——以下“选择题”的要求相同, 不再重申. 下列极限中存在的是().

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)}{x^2}$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^x - 1}$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

答 应选 B.

分析 因为对于选项 A 来说, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} \rightarrow +\infty$, 极限不存在,

对于选项 C 来说, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(2^x - 1) \rightarrow 0$, $\frac{1}{2^x - 1} \rightarrow \infty$, 极限也不存在; 对于选项

D 来说, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$ 当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$, 由定义知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 不存在. 而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

所以应选 B.

例 1.6 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = 2x^2 + 3x - 3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 求 $f(x)$.

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在,它表示一个确定的数值,记 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A$,则有

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 3A$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x - 3A)$$

$$A = 5 - 3A$$

可解得 $A = \frac{5}{4}$,故

$$f(x) = 2x^2 + 3x - \frac{15}{4}$$

极限呈“ $\frac{0}{0}$ ”形式时的计算.

先考虑消去分子、分母为零的因子再求极限.

例 1.7 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 1}$.

解 这极限式是有理分式,且呈“ $\frac{0}{0}$ ”形式.分子分母同时分解因式,消去分子、分母成为零的因式,再求极限.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

如果极限式不是有理分式,而是无理式,这时一般可通过有理化方法消去使分母成为零的因式,再求极限,看下列.

例 1.8 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x-3};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}.$$

解 (1) 极限呈“ $\frac{0}{0}$ ”形式.分子无法分解因式,将其有理化,得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{1+x} - 2)(\sqrt{1+x} + 2)}{(x-3)(\sqrt{1+x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{1+x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(2) 极限也呈“ $\frac{0}{0}$ ”形式,分子分母须同时有理化,得

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x-2} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{x} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

利用重要极限公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

当极限式中含有三角函数时, 往往可通过三角恒等变换, 再利用重要极限求极限.

例 1.9 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$.

解 由三角恒等式 $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, 于是

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

利用等价无穷小代换求极限.

当 $x \rightarrow 0$ 时, 下面是一些常见的等价无穷小:

$$\sin x \sim x; \tan x \sim x; 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; \ln(1+x) \sim x;$$

$$e^x - 1 \sim x; \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$$

例 1.10 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^m x}{\tan(x^m)}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2 + x}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}.$$

解 (1) 因当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin^m x \sim x^m$, $\tan(x^m) \sim x^m$ 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^m x}{\tan(x^m)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^m}{x^m} = 1$$

(2) 因当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x \sim 2x^2$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2 + x} = 0$$

(3) 因当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 2x \sim 2x$, $\ln(1+x) \sim x$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$$

注意, 等价无穷小代换能在乘积和商中进行, 不能在加减运算中代换, 否则会导致错误.

例如, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$ 时, 因 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sin x \sim x$,

则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\cos x - 1)}{x^3 \cdot \cos x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^3 \cdot \cos x} \\&= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

但

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0.$$

即在分子的代数和 $(\sin x - \tan x)$ 中,用等价无穷小 x 分别代换和中的项是错误的.

极限呈“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”形式时的计算方法.

这种情形求极限的方法与数列的情况类似.

例 1.11 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^3 - x + 1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}.$$

解 这两个极限都呈“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”的形式

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^3 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \right) = 1$$

一般情形有下列结论:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n, \\ 0, & m > n, \\ \infty, & m < n. \end{cases}$$

以后可以将上述结论作为公式使用. 请读者牢记.

极限呈“ $\infty - \infty$ ”形式时的计算方法.

这种情形,一般可通过“通分”或“有理化”等方法化为“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”的形式,

然后再求极限.

例 1.12 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{12}{8 - x^3} - \frac{1}{2 - x} \right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x).$$