

高等学校教材

高等数学习题详解

宋国华 程士珍 主编

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} d(x^2-1) = \sqrt{x^2-1} + C$$

$$-\int \frac{d \cos x}{1+2 \cos^2 x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d \sqrt{2} \cos x}{1+(\sqrt{2} \cos x)^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \cos x) + C$$

$$\frac{1}{4} \int \ln x dx^4 = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^4 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C$$

$$x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx$$

石油工业出版社
Petroleum Industry Press

高等学校教材

高等数学习题详解

宋国华 程士珍 主编

石油工业出版社

内 容 提 要

本书对《高等数学》(上、下册)所编入的习题及总习题作了详细解答,有助于学生在学习中查阅、巩固所学知识,培养自学能力,开拓解题思路,掌握解题方法。

本书与北京市高等教育精品教材《高等数学》(上、下册)配套使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习题详解/宋国华,程士珍主编.

北京:石油工业出版社,2009.8

ISBN 978-7-5021-7319-7

I. 高…

II. ①宋…②程…

III. 高等数学-高等学校-解题

IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 133544 号

出版发行:石油工业出版社

(北京安定门外安华里 2 区 1 号 100011)

网 址: www.petropub.com.cn

编辑部: (010) 64523546 发行部: (010) 64523620

经 销: 全国新华书店

印 刷: 中国石油报社印刷厂

2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷

787×1092 毫米 开本: 1/16 印张: 20

字数: 508 千字

定 价: 30.00 元

(如出现印装质量问题,我社发行部负责调换)

版权所有,翻印必究

前 言

《高等数学习题详解》是与《高等数学》教材配套的辅导教材。

《高等数学》(上、下册)是在2002年北京市教育委员会教改立项的基础上,于2007年确立的北京市高等学校精品教材立项课题,是课题组成员多年教学改革和实践工作的总结。

目前国内外《高等数学》教材版本较多,主要适用于一般工科院校。本书的特点是结合建筑类院校学科专业需求和地方工科院校学生实际,遵照“在基础课的教学中,要以应用为目的”,着重思想方法及应用的介绍,以“必须”、“够用”为度,坚持“服务于技术基础课、专业课”的原则;在教材内容编排上,注重对知识的重点、难点分析,以及知识点的概括和归纳总结;注重相关知识在工程实践中的应用,选编了部分有工程实践背景的例题和习题;注重学生入学前基础知识差别,以及专业之间需求重点的差别。在习题选编方面,既考虑到对教材基本知识的消化理解,以巩固所学知识;又考虑到后续各专业基础课和专业课的学习,使之为工程教育服务;同时考虑到有考研究生学生的需求。由于目前“高等数学”课程学时普遍减少和相关专业对“高等数学”课程要求的差异,以及地方院校生源的水平、层次之间的差别和部分学生考研等需要,在教材内容及例题的配备方面,尽量融教材、解题方法、学习指导为一体的结构形式。

为了教学的需求,我们编写了《高等数学》(上、下册)和与之配套的《高等数学习题详解》。其中,《高等数学》上册包括:函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分应用、微分方程共七章;《高等数学》下册包括:向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数共五章。每节后配有习题,每章后配有总习题。《高等数学习题详解》对全书习题及各章总习题的解题方法及过程进行较为详细的说明和分析。

《高等数学》各章参加编写的撰稿人分别是:第一章刘颖,第二章吕亚芹,第三章马龙友、李泽好,第四章程士珍,第五章和第八章宋国华,第六章代西武,第七章窦家维,第九章李泽好,第十章寿玉亭、李泽好,第十一章马龙友、宋国华,第十二章刘长河、张艳。《高等数学习题详解》各章撰稿人分别是:第一章和第三章张蒙,第二章吕亚芹,第四章程士珍,第五章白羽,第六章代西武,第七章窦家维,第八章和第十一章侍爱玲,第九章和第十章王晓静,第十二章张艳、刘长河。整套教材的内容结构由主编宋国华教授和李泽好教授主持设计制定,并负责统稿和定稿。

本教材出版前,邀请了沈阳航空工业学院、沈阳建筑大学和北京建筑工程学院部分教师对《高等数学》教材进行了认真的审查。同时在北京建筑工程学院部分专业进行试用,根据大家的意见和建议,编写组又做了进一步的修改。为了本套教材的出版,北京市教育委员会高教处、北京建筑工程学院教务处等单位的领导、专家和同行给予了热情的关心和极大的帮助,在此,我们一并表示诚挚的谢意。

由于作者水平有限,书中的错误和不当之处,敬请读者和同行批评指正。

作 者

2009年6月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
习题 1-1	(1)
习题 1-2	(7)
习题 1-3	(8)
习题 1-4	(12)
习题 1-5	(14)
习题 1-6	(17)
习题 1-7	(20)
习题 1-8	(22)
习题 1-9	(26)
习题 1-10	(28)
总习题一	(29)
第二章 导数与微分	(36)
习题 2-1	(36)
习题 2-2	(41)
习题 2-3	(46)
习题 2-4	(51)
习题 2-5	(57)
总习题二	(62)
第三章 中值定理与导数应用	(69)
习题 3-1	(69)
习题 3-2	(71)
习题 3-3	(76)
习题 3-4	(77)
习题 3-5	(79)
习题 3-6	(83)
习题 3-7	(85)
习题 3-8	(88)
总习题三	(88)
第四章 不定积分	(93)
习题 4-1	(93)
习题 4-2	(95)
习题 4-3	(99)
习题 4-4	(103)

总习题四	(108)
第五章 定积分	(112)
习题 5-1	(112)
习题 5-2	(114)
习题 5-3	(117)
习题 5-4	(122)
习题 5-5	(129)
总习题五	(133)
第六章 定积分应用	(140)
习题 6-1	(140)
习题 6-2	(140)
习题 6-3	(144)
习题 6-4	(147)
习题 6-5	(149)
总习题六	(151)
第七章 微分方程	(155)
习题 7-1	(155)
习题 7-2	(157)
习题 7-3	(159)
习题 7-4	(161)
习题 7-5	(164)
习题 7-6	(165)
习题 7-7	(166)
习题 7-8	(168)
习题 7-9	(171)
习题 7-10	(172)
总习题七	(173)
第八章 向量代数与空间解析几何	(179)
习题 8-1	(179)
习题 8-2	(180)
习题 8-3	(181)
习题 8-4	(182)
习题 8-5	(185)
习题 8-6	(188)
习题 8-7	(191)
习题 8-8	(194)
总习题八	(198)
第九章 多元函数微分法及其应用	(203)
习题 9-1	(203)

习题 9-2	(205)
习题 9-3	(208)
习题 9-4	(209)
习题 9-5	(216)
习题 9-6	(218)
习题 9-7	(225)
习题 9-8	(227)
总习题九	(228)
第十章 重积分	(234)
习题 10-1	(234)
习题 10-2	(235)
习题 10-3	(239)
习题 10-4	(242)
习题 10-5	(247)
总习题十	(250)
第十一章 曲线积分与曲面积分	(255)
习题 11-1	(255)
习题 11-2	(257)
习题 11-3	(258)
习题 11-4	(260)
习题 11-5	(261)
习题 11-6	(262)
习题 11-7	(263)
习题 11-8	(265)
总习题十一	(266)
第十二章 无穷级数	(274)
习题 12-1	(274)
习题 12-2	(277)
习题 12-3	(281)
习题 12-4	(286)
习题 12-5	(289)
习题 12-6	(291)
习题 12-7	(292)
习题 12-8	(298)
总习题十二	(301)

第一章 函数与极限

习 题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{1}{x-1} + \sqrt{2x+1}; \quad (2) y = \arccos \sqrt{2x}; \quad (3) y = \sqrt{x} + \ln(3-x);$$

$$(4) y = \sqrt{6-x} + \arctan \frac{1}{x}; \quad (5) y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}; \quad (6) y = \arcsin(2x-1);$$

$$(7) y = e^{\frac{2}{x}}; \quad (8) y = \arcsin \frac{x-1}{2}; \quad (9) y = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$(10) y = \sqrt{x-1} \ln|x-3|.$$

解 (1) $y = \frac{1}{x-1} + \sqrt{2x+1}; \begin{cases} x-1 \neq 0, \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases}$ 解不等式组可得函数的定义域为: $\left[-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$;

(2) $y = \arccos \sqrt{2x}; \begin{cases} |\sqrt{2x}| \leq 1, \\ 2x \geq 0 \end{cases}$ 解不等式组可得函数的定义域为: $\left[0, \frac{1}{2}\right]$;

(3) $y = \sqrt{x} + \ln(3-x); \begin{cases} x \geq 0, \\ 3-x > 0 \end{cases}$ 解不等式组可得函数的定义域为: $[0, 3)$;

(4) $y = \sqrt{6-x} + \arctan \frac{1}{x}; \begin{cases} 6-x \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases}$ 解不等式组可得函数的定义域为: $(-\infty, 0) \cup (0, 6]$;

(5) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}; 4-x^2 > 0$, 解不等式可得函数的定义域为: $(-2, 2)$;

(6) $y = \arcsin(2x-1); |2x-1| \leq 1$, 解不等式可得函数定义域为: $[0, 1]$;

(7) $y = e^{\frac{2}{x}}; x \neq 0$, 函数定义域为: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

(8) $y = \arcsin \frac{x-1}{2}; \left| \frac{x-1}{2} \right| \leq 1$, 解不等式可得函数定义域为 $[-1, 3]$;

(9) $y = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 函数定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

(10) $y = \sqrt{x-1} \ln|x-3|; \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-3 \neq 0 \end{cases}$ 解不等式组可得函数定义域为 $[1, 3) \cup (3, +\infty)$.

2. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同, 为什么?

- (1) $f(x)=1, g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;
 (2) $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}, g(x)=\sqrt{x^2-1}$;
 (3) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$.

解 (1) $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域都为 $(-\infty, +\infty)$, 且 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1=f(x)$, 所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是相同的;

(2) $f(x)$ 的定义域为 $[1, +\infty)$, $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域不同, 所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是不同的;

(3) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$, $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域不同, 所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不相同.

3. 下列函数中哪些是奇函数, 哪些是偶函数, 哪些是非奇又非偶函数?

- (1) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$; (2) $f(x)=x(x-1)(x+1)$; (3) $f(x)=\sin x-\cos x+1$;
 (4) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$; (5) $f(x)=\frac{10^x+10^{-x}}{2}$; (6) $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$;
 (7) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; (8) $f(x)=x^2+\cos x$; (9) $f(x)=(e^x+e^{-x})\sin x$;
 (10) $f(x)=5x^2-\cos x+1$; (11) $f(x)=x^3+\sin x-\frac{1}{x}$; (12) $f(x)=\sin x+\cos x$.

解 (1) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$; 因为 $f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数;

(2) $f(x)=x(x-1)(x+1)$; 因为 $f(-x)=-x(-x-1)(-x+1)=-x(x+1)(x-1)=-f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数;

(3) $f(x)=\sin x-\cos x+1$; 因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$, 所以 $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$, 即 $f(x)$ 是非奇非偶函数;

(4) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$; 因为 $f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数;

(5) $f(x)=\frac{10^x+10^{-x}}{2}$; 因为 $f(-x)=\frac{10^{-x}+10^x}{2}=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数;

(6) $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$; 因为 $f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=-\frac{2^x-1}{2^x+1}=-f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数;

(7) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; 因为 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数;

(8) $f(x)=x^2+\cos x$; 因为 $f(-x)=(-x)^2+\cos(-x)=x^2+\cos x=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数;

(9) $f(x)=(e^x+e^{-x})\sin x$; 因为 $f(-x)=(e^{-x}+e^x)\sin(-x)=-(e^x+e^{-x})\sin x=-f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数;

(10) $f(x)=5x^2-\cos x+1$; 因为 $f(-x)=5(-x)^2-\cos(-x)+1=5x^2-\cos x+1=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数;

(11) $f(x) = x^3 + \sin x - \frac{1}{x}$; 因为 $f(-x) = (-x)^3 + \sin(-x) - \frac{1}{-x} = -x^3 - \sin x + \frac{1}{x} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数;

(12) $f(x) = \sin x + \cos x$; 因为 $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$, $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

4. 证明 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{1+x^2})$ ($a > 0, a \neq 1$) 是奇函数.

证明 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 是对称区间, 且

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_a \left[-x + \sqrt{1+(-x)^2} \right] = \log_a \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x} = \log_a \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} \\ &= -\log_a (x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

5. 下列函数中哪些是周期函数? 对于周期函数指出其周期.

(1) $y = (\sin 3x)^2$; (2) $y = x \cos x$; (3) $y = \cos 8x$; (4) $y = 2 + \sin \pi x$.

解 (1) 是周期函数, $T = \frac{\pi}{3}$;

(2) 不是周期函数;

(3) 是周期函数, $T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$;

(4) 是周期函数, $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

6. 求函数 $f(x) = \sin 3x + \tan \frac{x}{2}$ 的周期.

解 因为 $\sin 3x$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{3}$, $\tan x$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{1} = \pi$, 所以 $y = \sin 3x + \tan \frac{x}{2}$

的最小正周期是 $\frac{2\pi}{3}$ 和 2π 的最小公倍数, 即 2π .

7. 求函数 $f(x) = \sin x \cdot \sin 3x$ 的最小正周期.

解 $f(x) = \sin x \cdot \sin 3x = -\frac{1}{2} [\cos 4x - \cos 2x]$, $\cos 4x$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, $\cos 2x$ 的最小正周期为 π , 所以 $f(x)$ 的最小正周期是 π .

8. 设 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 考察复合函数 $f[g(x)]$, $f[f(x)]$, $g[f(x)]$ 的奇偶性.

解 由已知 $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$, 所以 $f[g(-x)] = f[g(x)]$, $f[g(x)]$ 是偶函数; $f[f(-x)] = f[-f(x)] = -f[f(x)]$, $f[f(x)]$ 是奇函数; $g[f(-x)] = g[-f(x)] = g[f(x)]$, $g[f(x)]$ 是偶函数.

9. 求下列函数的反函数.

(1) $y = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$, $x > 0$; (2) $y = \begin{cases} 1+x, & x \leq 0, \\ e^x, & x > 0; \end{cases}$ (3) $y = \frac{2^x}{1+2^x}$; (4) $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 (1) $y = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$, $x > 0$; 由原函数解出 $x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$, 且 $x > 0$, 故 $x = y + \sqrt{y^2 + 1}$,

所以反函数为 $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $(-\infty < x < +\infty)$;

$$(2) y = \begin{cases} 1+x, & x \leq 0, \\ e^x, & x > 0. \end{cases} \text{ 当 } x \leq 0 \text{ 时, } y=1+x, x=y-1, y \in (-\infty, 1], \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } y=e^x,$$

$$x=\ln y, y \in (1, +\infty), \text{ 所以反函数为 } y = \begin{cases} x-1, & x \in (-\infty, 1], \\ \ln x & x \in (1, +\infty); \end{cases}$$

$$(3) y = \frac{2^x}{1+2^x}; \text{ 由原函数解出 } x = \log_2 \frac{y}{1-y}, \text{ 且 } 0 < y < 1, \text{ 所以反函数为}$$

$$y = \log_2 \frac{x}{1-x}, (0 < x < 1);$$

$$(4) y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}. \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } x = \tan \frac{y}{2}, \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } x = -\tan \frac{y}{2}, \text{ 故反函数}$$

$$\text{为 } y = \pm \tan \frac{x}{2}, x \in [0, \pi).$$

$$10. \text{ 求函数 } y = \begin{cases} x, & x < 1, \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4, \\ 2^x, & x > 4. \end{cases} \text{ 的反函数.}$$

解 当 $x < 1$ 时, $y=x \Rightarrow x=y, y < 1$; 当 $1 \leq x \leq 4$ 时, $y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}, 1 \leq y \leq 16$; 当 $x > 4$ 时, $y=2^x \Rightarrow x=\log_2 y, y > 16$.

$$\text{综上所述, 原函数的反函数为 } y = \begin{cases} x, & x < 1, \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 16, \\ \log_2 x, & x > 16. \end{cases}$$

$$11. \text{ 设 } f(x) = \sqrt{4+x^2}, \text{ 求函数 } f(0), f(1), f(-1), f\left(\frac{1}{a}\right) \text{ 的函数值.}$$

$$\text{解 } f(0) = \sqrt{4+0^2} = 2; f(1) = \sqrt{4+1^2} = \sqrt{5}; f(-1) = \sqrt{4+(-1)^2} = \sqrt{5}; f\left(\frac{1}{a}\right) = \sqrt{4+\frac{1}{a^2}} = \frac{\sqrt{4a^2+1}}{|a|}.$$

$$12. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x^3, & -3 \leq x \leq 0 \\ -x^3, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}, \text{ 求 } f(-2), f(1).$$

$$\text{解 } f(-2) = (-2)^3 = -8; f(1) = -1^3 = -1.$$

$$13. \text{ 设 } f(x) = \arcsin x, \text{ 求下列函数值.}$$

$$(1) f(0); \quad (2) f(-1); \quad (3) f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad (4) f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\text{解 } (1) f(0) = \arcsin 0 = 0; \quad (2) f(-1) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2};$$

$$(3) f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}; \quad (4) f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$14. \text{ 设 } f(x) = 3^x, \varphi(x) = 2x^2, \text{ 求 } \varphi[f(x)].$$

解 $\varphi[f(x)] = \varphi[3^x] = 2(3^x)^2 = 2 \times 9^x$.

15. 设 $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f[f(x)]$, $g[g(x)]$, $f[g(x)]$.

解 $f[f(x)] = f[\operatorname{sgn} x] = \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn} x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

$g[g(x)] = g\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x, (x \neq 0)$; $f[g(x)] = f\left[\frac{1}{x}\right] = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn} x, (x \neq 0)$.

16. 设 $f(x) = \frac{x}{1-x}$, 求 $f[f(x)]$ 和 $f\{f[f(x)]\}$.

解 $f[f(x)] = f\left[\frac{x}{1-x}\right] = \frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x}$; $f\{f[f(x)]\} = f\left\{\frac{x}{1-2x}\right\} = \frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}} = \frac{x}{1-3x}$.

17. 在下列各题中, 求由所给函数复合而成的函数, 并求这个复合函数分别对应于给定自变量 x_1 和 x_2 的函数值.

(1) $y = u^2$, $u = \cos x$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$;

(2) $y = \sin u$, $u = 3x$, $x_1 = \frac{\pi}{9}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$;

(3) $y = \sqrt{u}$, $u = 1+x^3$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$;

(4) $y = e^u$, $u = \tan x$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = 0$;

(5) $y = u^3$, $u = e^x$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

解 (1) $y = \cos^2 x$, $y_1 = \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$, $y_2 = \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}$;

(2) $y = \sin 3x$, $y_1 = \sin\left(3 \times \frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_2 = \sin\left(3 \times \frac{\pi}{6}\right) = 1$;

(3) $y = \sqrt{1+x^3}$, $y_1 = \sqrt{1+2^3} = 3$, $y_2 = \sqrt{1+0^3} = 1$;

(4) $y = e^{\tan x}$, $y_1 = e^{\tan \frac{\pi}{4}} = e$, $y_2 = e^{\tan 0} = 1$;

(5) $y = e^{3x}$, $y_1 = e^3$, $y_2 = e^{-3}$.

18. 分解下列各函数.

(1) $y = (2x+5)^4$; (2) $y = \cos(4-3x)$; (3) $y = \sin e^x$; (4) $y = \arctan(x^2)$;

(5) $y = \ln \cos x^3$; (6) $y = \arcsin \sqrt{x^3}$; (7) $y = e^{3x+1}$; (8) $y = \cos^2(2x+1)$;

(9) $y = \sqrt{\lg \sin x}$.

解 (1) $y = u^4, u = 2x+5$;

(3) $y = \sin u, u = e^x$;

(5) $y = \ln u, u = \cos v, v = x^3$;

(7) $y = e^u, u = 3x+1$;

(2) $y = \cos u, u = 4-3x$;

(4) $y = \arctan u, u = x^2$;

(6) $y = \arcsin u, u = \sqrt{v}, v = x^3$;

(8) $y = u^2, u = \cos v, v = 2x+1$;

(9) $y = \sqrt{u}, u = \lg v, v = \sin x$.

19. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 3]$, 求 $f(\ln x)$ 的定义域.

解 由 $0 \leq \ln x \leq 3$ 解得 $1 \leq x \leq e^3$, 所以 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[1, e^3]$.

20. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[1, 2]$, 求 $f\left(\frac{1}{x+1}\right)$ 的定义域.

解 由 $1 \leq \frac{1}{x+1} \leq 2$ 解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$, 所以 $f\left(\frac{1}{x+1}\right)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

21. 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 求 $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(-x)$.

解 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1}$; $f(-x) = \frac{1+x}{1-x}$.

22. 设 $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$, 求 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 并作出 $f(x)$ 的图形.

解 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2}$.

$f(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

23. 三角形两边之长 a, b 一定, 夹角 θ 不定, 试将三角形面积 S 用 θ 的函数写出来, 并指出这个函数的定义域.

解 $S = \frac{\text{底} \times \text{高}}{2} = \frac{a \cdot |AD|}{2} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

其图形如图 1-2 所示.

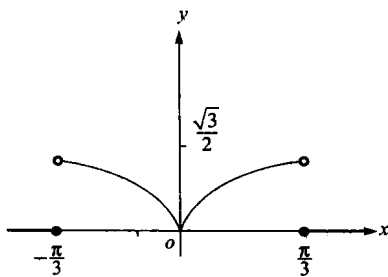


图 1-1

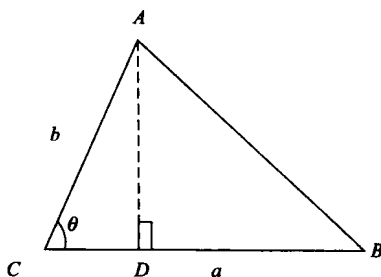


图 1-2

24. 某人从美国到加拿大度假, 他把美元兑换成加拿大元时, 币面值增加 12%, 回国后他发现把加拿大元兑换成美元时, 币面值减少了 12%, 把这两件事中美元与加拿大元互相兑换的关系分别用函数表示出来, 并证明这两个函数不互为反函数 (表明一来一去的兑换后, 他亏损了一些钱).

解 设函数 $f(x)$ 为将 x 美元兑换成的加拿大元数, $g(x)$ 为将 x 元加拿大元兑换成美元数,

则 $f(x)=x(1+12\%)=1.12x(x\geq 0)$, $g(x)=x(1-12\%)=0.88x(x\geq 0)$.

由 $f[g(x)]=f[0.88x]=1.12\times 0.88x=0.9856x$ 可知, $f(x)$ 与 $g(x)$ 不互为反函数.

25. 京沪运输公司规定货物的吨公里运价为: 在 $a\text{km}$ 以内每千米 k 元, 超过 $a\text{km}$, 超过部分每千米为 $\frac{4}{5}k$ 元. 求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

解 当 $0 < s \leq a$ 时, $m=ks$; 当 $s > a$ 时, $m=ka+\frac{4}{5}k(s-a)$, 即运价 m 与里程 s 间的函数

$$\text{关系为 } m = \begin{cases} ks, & 0 < s \leq a, \\ ka + \frac{4}{5}k(s-a), & s > a. \end{cases}$$

习 题 1-2

1. 观察下面各数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势, 哪些数列收敛? 哪些数列发散? 对收敛数列, 写出它们的极限.

$$\begin{aligned} (1) \ x_n &= \frac{1}{2^n}; & (2) \ x_n &= \frac{1}{n}(-1)^n; & (3) \ x_n &= n(-1)^n; & (4) \ x_n &= \frac{n-1}{n+1}; \\ (5) \ x_n &= 3 + \frac{1}{n^2}; & (6) \ x_n &= \frac{2^n-1}{5^n}; & (7) \ x_n &= \frac{3n+1}{n}; & (8) \ x_n &= \frac{5+(-1)^n}{2}; \\ (9) \ x_n &= n^2 - \frac{1}{n}; & (10) \ x_n &= 1 + (-1)^n \frac{1}{n}; & (11) \ x_n &= (-1)^n \frac{n}{n+1}; & (12) \ x_n &= \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

解 (1) 收敛, $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow 0$; (2) 收敛, $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow 0$;
 (3) 发散; (4) 收敛, $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow 1$;
 (5) 收敛, $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow 3$; (6) 收敛, $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow 0$;
 (7) 收敛, $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow 3$; (8) 发散;
 (9) 发散; (10) 收敛, $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow 1$;
 (11) 发散; (12) 发散.

*2. 根据数列极限的定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3}; \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1.$$

证明 (1) $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, 只须 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 于是 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$,

当 $n > N$ 时, 均有 $|a_n - 0| < \varepsilon$ 成立, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$;

$$(2) \left| a_n - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{6n-3-6n-2}{3(3n+1)} \right| = \frac{5}{3(3n+1)} < \frac{9}{3(3n+1)} < \frac{1}{n + \frac{1}{3}} < \frac{1}{n}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left| a_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$, 只须 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 即可. 于是 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n >$

N 时, 均有 $\left|a_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$ 成立, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3}$;

$$(3) |a_n - 1| = \left| \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} - 1 \right| = \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n^2+1} + n)} < \frac{1}{n}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|a_n - 1| < \varepsilon$, 只须 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 即可. 于是 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n >$

N 时, 均有 $|a_n - 1| < \varepsilon$ 成立, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1$.

*3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$, 并举例说明: 数列 $\{x_n\}$ 有极限, 但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限.

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 故存在自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, 均有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立. 又因为 $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$, 故当 $n > N$ 时均有 $||x_n| - |a|| < \varepsilon$ 成立, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.

*4. 设数列 $\{x_n\}$ 有界, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = 0$.

证明 因为数列 $\{x_n\}$ 有界, 故存在 $M > 0$, 对一切 n , 均有 $|x_n| \leq M$. $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 所以对 $\frac{\varepsilon}{M} > 0$, 存在自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, 均有 $|y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$, 即 $|y_n| < \frac{\varepsilon}{M}$, 于是当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n y_n - 0| = |x_n| \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ 成立, 由定义可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

习 题 1-3

1. 对图 1-3 (教材图 1-45) 所示函数, 求下列极限, 若极限不存在, 说明理由.

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$.

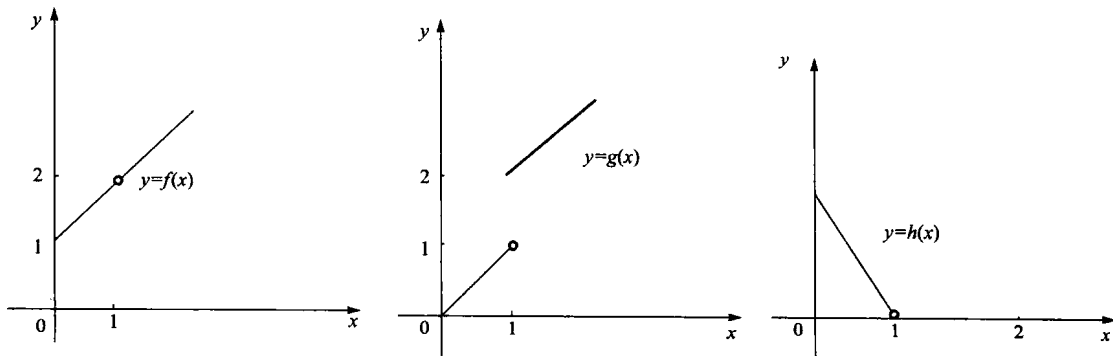


图 1-3

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$, 所以极限存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$;

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$, 所以极限不存在;

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = 0$, 所以极限存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 0$.

2. 对图 1-4 (教材图 1-46) 所示函数, 下列极限, 哪些是对的? 哪些是错的?

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$; (3) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$;
 (4) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$; (5) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$; (6) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$;
 (7) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$; (8) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在; (9) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$;
 (10) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 不存在.

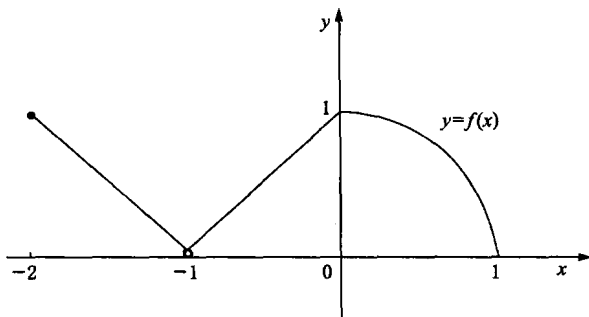


图 1-4

- 解 (1) 对;
 (2) 错, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$;
 (3) 对;
 (4) 错, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$;
 (5) 对;
 (6) 错, 因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上没有定义, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 不存在;
 (7) 对;
 (8) 对, 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 不存在, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在;
 (9) 错, 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上没有定义, 所以 $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ 不存在;
 (10) 对, 因为 $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ 不存在, 所以 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 不存在.

3. 图 1-5 (教材图 1-47) 中所示函数, 下列极限中, 哪些是对的? 哪些是错的?

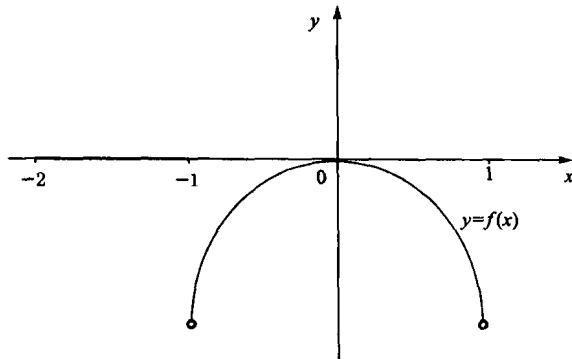


图 1-5

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$; (3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$;
 (4) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$; (5) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$; (6) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$;
 (7) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 不存在; (8) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$; (9) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$;
 (10) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

解 (1) 对;

(2) 错, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$;

(3) 对;

(4) 对;

(5) 对;

(6) 错, 因为 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$, 故 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 不存在;

(7) 对, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上没定义;

(8) 对;

(9) 错, $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上没定义, 所以 $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ 不存在;

(10) 对, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

4. 证明函数 $f(x) = |x|$, 当 $x \rightarrow 0$ 时极限为零.

证明 因为 $|f(x) - 0| = ||x| - 0| = |x| = |x - 0|$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|f(x) - 0| < \varepsilon$, 只需 $|x| < \varepsilon$ 即可, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $0 < |x - 0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - 0| = |x| - 0| < \varepsilon$ 成立, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

5. 求 $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时的左右极限, 并说明 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在.

解 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{x}{x} = -1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ 不存在.

6. 讨论 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\frac{1}{2^x} + 1}$ 的极限.

解 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x - 1}{\frac{1}{2^x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{2^x}}{1 + \frac{1}{2^x}} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^x - 1}{\frac{1}{2^x} + 1} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x - 1}{\frac{1}{2^x} + 1} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^x - 1}{\frac{1}{2^x} + 1}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\frac{1}{2^x} + 1}$

不存在.

7. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$ 画出这个函数的图形, 并用左、右极限说明当 $x \rightarrow 0$ 时,

$f(x)$ 无极限.

解 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

函数图形如图 1-6 所示.