21世纪高等学校数学系列教材

数学物理方程

■ 刘安平 李星 刘婷 肖莉 编

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

数学物理方程

■ 刘安平 李星 刘婷 肖莉 编

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/刘安平，李星，刘婷，肖莉编．—武汉：武汉大学出版社，2009.9

21 世纪高等学校数学系列教材

ISBN 978-7-307-07244-2

Ⅰ.数… Ⅱ.①刘… ②李… ③刘… ④肖… Ⅲ.数学物理方程—高等学校—教材 Ⅳ.O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 134791 号

责任编辑：任仕元　　责任校对：王　建　　版式设计：杜　枚

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn)

印刷：湖北金海印务公司

开本：787×1092　1/16　印张：11　字数：252 千字　插页：1

版次：2009 年 9 月第 1 版　　2009 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-07244-2/O·407　　定价：17.00 元

21世纪高等学校数学系列教材

编　委　会

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学. 长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用. 作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用. 数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的. 发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要. 高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要.

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议，策划，组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台. 通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材.

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材，旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平.

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学（福建泉州）、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校.

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广，为了便于区分，我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别，如：数学类本科生教材，注明：SB；理工类本科生教材，注明：LGB；文科与经济类教材，注明：WJ；理工类硕士生教材，注明：LGS，如此等等，以便于读者区分.

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版社之一. 在国内有较高的知名度和社会影响力、武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务. 我们愿与各位朋友真诚合作，力争使该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21世纪高等学校数学系列教材编委会

2007年7月

前　言

随着科学技术的飞速发展，各种数学方法的应用越来越广泛．在许多领域，数学物理方程理论已经成为必须掌握的基础知识．

数学物理方程的研究对象为具有应用背景的偏微分方程，是一门综合性、应用性非常强的基础课程，其特点是有机地结合了数学理论、方法及实际应用．

数学物理方程是大家公认的一门难教难学的数学基础课程．为使学生在有限的时间内掌握数学物理方程理论的基本知识，在长期的教学实践中，我们感觉缺少适合我国本科生、研究生（非数学类专业）实际需要的具有一定特色的通用教材．国内外有许多数学物理方程方面的优秀教材，但在多数情况下，或侧重于自身系统的理论完善，或侧重于某个领域的应用，兼顾两方面的较少．本书在吸收许多已有优秀教材的长处后，根据作者的长期教学实践经验，全面系统地介绍了数学物理方程课程中适合本科生及研究生（非数学类专业）需要的各种实用的方法，力求有利于教和学．

本书具有以下几个方面的特色：

(1) 全面系统地介绍了数学物理方程课程中适合本科生、研究生（非数学类专业）需要的各种实用的方法；

(2) 针对本科生、研究生（非数学类专业）的实际需要及教学现状，加强了实际应用中用得较多的方法如积分变换法的应用性举例；

(3) 增加了针对本科生、研究生（非数学类专业）实际需要的综合性问题的例题、讨论；

(4) 系统完整地介绍了本科生、研究生（非数学类专业）非常容易误解的数学物理方程的分类问题及各类方程的从实际应用方面理解的独有特性，从而对其解决实际问题提供了具体的参考；

(5) 数学推导浅显易懂，同时适宜作为工程技术人员的自学教材及科研参考书；

(6) 简单介绍了数学物理方程的数值解法——有限差分法及有限元法。

本书适合作为高等院校本科各相关专业及研究生（非数学类专业）教材或教学参考书，教学时数约为 60 学时；也可供有关教师和工程技术人员参考．

本书的出版得到了中国地质大学“十一五”教材建设项目及中国地质大学研究生院研究生教材出版基金的资助．本书的出版也得到了中国地质大学教务处、研究生院、数学与物理学院的支持与帮助，在此向他们表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中或许存在一些不妥或错误之处，恳请读者不吝指教．

编　者

2009 年 5 月于南望山

目　　录

第1章　典型方程与定解条件

数学物理方程的主要研究对象，是来自各种数学物理问题中的偏微分方程.本章我们将从几个简单的物理模型出发，推导出本课程将要讨论的三种典型方程及其相应的定解条件.同时也对二阶变系数线性方程进行分类.

1.1　基本概念

我们已经学过代数方程和常微分方程，这里讨论偏微分方程.所谓**偏微分方程**就是联系几个自变量和未知函数以及未知函数对自变量的偏导函数的关系式.例如，

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z), \tag{1.1}$$

导热物体的温度函数 $u(x,y,z,t)$ 满足的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t), \tag{1.2}$$

描写定常过程的拉普拉斯(Laplace) 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{1.3}$$

弦振动时其位移函数 $u(x,t)$ 满足的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.4}$$

梁的横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^4\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=f(x,t), \tag{1.5}$$

都是偏微分方程，以下简称为方程.

出现在偏微分方程中的最高阶偏导函数的阶数称为偏微分方程的阶.例如(1.1) 是一阶方程，(1.2) ～ (1.4) 都是二阶方程，(1.5) 是四阶方程.所谓**偏微分方程的解**是指这样一个函数，它具有出现在方程中的连续的各阶偏导函数，将它替换方程中的未知函数后，这个方程对其全体自变量来说就成为一个恒等式.例如，不难验证函数 $u(x,t)=\sin(x-at)$ 是方程(1.4) 的一个解.

假如一个方程，不但对于未知函数而且对于未知函数的各阶导函数都是一次的，就称其为**线性偏微分方程**，否则称为**非线性偏微分方程**.例如(1.1) 是非线性方程，(1.2) ～ (1.5) 都是线性方程.方程中不含未知函数及未知函数偏导函数的项，称为自由项.自由项不恒等于零的线性方程，称为线性非齐次方程，自由项恒等于零的线性方程，称为线性齐次方程.例如(1.3)，(1.4) 都是线性齐次方程，而(1.2)，(1.5) 是线性非齐次方程.线性

方程中，如果系数是常数，则称其为常系数线性方程. 例如(1.2) ～ (1.5) 都是常系数线性方程.

1.2 典型方程的导出

在本节，我们将通过几个不同的物理模型推导出数学物理方程中三种典型的方程，这些方程构成本书的主要研究对象.

例如，弦的振动虽然是一个古典问题，但对初学者来说仍然具有一定的启发性.

例 1 弦的振动

设有一根均匀柔软的细弦，平衡时沿直线拉紧，而且除受不随时间而变的张力作用及弦本身的重力外，不受外力影响. 下面研究弦作微小横向振动的规律. 所谓"横向"是指全部运动出现在一个平面上，而且弦上的点沿垂直于 x 轴的方向运动(图 1-1). 所谓"微小"是指振动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小，以至它们的高于一次方的项都可略而不计.

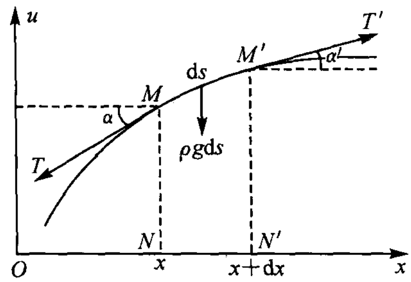

图 1-1

设弦上具有横坐标为 x 的点，在时刻 t 时的位置为 M，位移 NM 记作 u. 显然，在振动过程中位移 u 是变量 x 与 t 的函数 $u(x,t)$. 现在来建立位移 u 满足的方程. 用微元法的思想，我们把弦上点的运动先看做小弧段的运动，然后再考虑小弧段趋于零的极限情况. 在弦上任取一弧段 MM' 其长为 ds，设 ρ 是弦的线密度，弧段 MM' 两端所受的张力记作 T，T'.

由于假定弦是柔软的，所以在任一点处张力的方向总是沿着弦在该点的切线方向. 现在考虑弧段在 t 时刻的受力情况. 用牛顿运动定律，作用于弧段上任一方向上的力的总和等于这段弧的质量乘以该方向上的加速度.

在 x 轴方向弧段 MM' 受力的总和为 $-T\cos\alpha + T'\cos\alpha'$，由于弦只作横向振动，所以

$$T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0. \tag{1.6}$$

按照上述弦振动微小的假设，可知在振动过程中弦上 M 点与 M' 点处切线的倾角都很小，即 $\alpha \approx 0, \alpha' \approx 0$，从而由

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \cdots$$

可知，当我们略去 α 与 α' 的所有高于一次方的各项时，就有

$$\cos\alpha \approx 1,\quad \cos\alpha' \approx 1.$$

代入(1.6)式，便可近似得到 $T = T'$.

在 u 方向弧段 MM' 受力的总和为 $-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g\,\mathrm{d}s$，其中 $-\rho g\,\mathrm{d}s$ 是弧段 MM' 的重力. 又因 $\sin\alpha \sim \tan\alpha(\alpha \to 0)$，当 $\alpha \approx 0, \alpha' \approx 0$ 时，

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

同理，$\sin\alpha' \approx \tan\alpha' = \dfrac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}$，$\mathrm{d}s = \sqrt{1+\left[\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2}\,\mathrm{d}x \approx \mathrm{d}x$，且小弧段在时刻 t 沿 u 方向运动的加速度近似为 $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$，小弧段的质量为 $\rho\mathrm{d}s$，即

$$-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g\,\mathrm{d}s \approx \rho\mathrm{d}s\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

或

$$T\left[\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] - \rho g\,\mathrm{d}x \approx \rho\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x. \tag{1.7}$$

上式左边方括号内的部分是由于 x 产生 $\mathrm{d}x$ 的变化而引起的 $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 的改变量，由中值公式可得

$$\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial x}\right]\mathrm{d}x = \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x.$$

其中 $x \leqslant \xi \leqslant x + \mathrm{d}x$. 于是

$$\left[T\,\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial x^2} - \rho g\right]\mathrm{d}x \approx \rho\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x.$$

令 $\mathrm{d}x \to 0$，则 $\xi \to x$. 得

$$\frac{T}{\rho}\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + g.$$

一般说来，张力较大时弦振动速度变化很快，即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 要比 g 大得多，所以又可以把 g 略去. 经过这样逐步略去一些次要的量，抓住主要的量，在 $u(x,t)$ 关于 x,t 都是二次连续可微的前提下，最后得出 $u(x,t)$ 应近似地满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.8}$$

这里的 $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$. (1.8)式称为一维波动方程.

如果在振动过程中，弦上另外还受到一个与弦的振动方向平行的外力，且假定在时刻 t 弦上 x 点处的外力密度为 $F(x,t)$，显然，在这时(1.6)式及(1.7)式分别为

$$T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0,$$

$$F\mathrm{d}s - T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g\,\mathrm{d}s \approx \rho\mathrm{d}s\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

利用上面的推导方法并略去弦本身的重量，可得弦的强迫振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1.8$'$}$$

其中 $f(x,t)=\frac{1}{\rho}F(x,t)$ 表示 t 时刻单位质量的弦在 x 点处所受的外力. 方程(1.8) 与(1.8)$'$ 的差别在于(1.8)$'$ 的右端多了一个与未知函数 u 无关的项 $f(x,t)$,这个项称为自由项.(1.8) 为齐次一维波动方程,(1.8)$'$ 为非齐次一维波动方程.

一维波动方程只是波动方程中最简单的情况,在流体力学、声学及电磁场理论中,还要研究高维的波动方程.

例 2 热传导方程

一块热的物体,如果体内每一点的温度不全一样,则在温度较高的点处的热量就要向温度较低的点处流动,这种现象就是热传导. 由于热量的传导过程总是表现为温度随时间和点的位置的变化,所以,解决传热问题都要归结为求物体内温度的分布. 现在我们来推导均匀且各向同性的导热体在传热过程中温度所满足的微分方程. 与上例类似,我们不是先讨论一点处的温度,而应该先考虑一个区域的温度. 为此,在物体中任取一闭曲面 S,它所包围的区域记作 V(图 1-2). 假设在时刻 t 区域 V 内点 $M(x,y,z)$ 处的温度为 $u(x,y,z,t)$,$\boldsymbol{n}$ 为曲面元素 ΔS 的外法线方向.

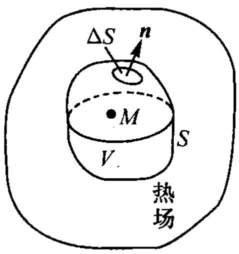

图 1-2

由传热学中傅里叶(Fourier) 实验定律可知,物体在无穷小时间段 $\mathrm{d}t$ 内,流过一个无穷小面积 $\mathrm{d}S$ 的热量 $\mathrm{d}Q$ 与时间 $\mathrm{d}t$、曲面面积 $\mathrm{d}S$ 以及物体温度 u 沿曲面 $\mathrm{d}S$ 的法线方向的方向导数$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 三者成正比,即

$$\mathrm{d}Q=-k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\mathrm{d}t. \tag{1.9}$$

其中 $k=k(x,y,z)$ 称为物体的热传导系数,当物体为均匀且各向同性的导热体时,k 为常数. 上式中的负号是由于热量的流向和温度梯度的正向,即 $\mathbf{grad}u$ 的方向相反而产生的.

利用上面的关系,从时刻 t_1 到时刻 t_2,通过曲面 S 流入区域 V 的全部热量为

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_S k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t. \tag{1.10}$$

流入的热量使 V 内温度发生了变化,在时间间隔$[t_1,t_2]$ 内区域 V 内各点温度从 $u(x,y,z,t_1)$ 变化到 $u(x,y,z,t_2)$,则在$[t_1,t_2]$ 内区域 V 内各点温度升高所需要的全部热量为

$$\iiint_V c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V.$$

其中 c 为物体的比热容,ρ 为物体的密度,对均匀且各向同性的物体来说,它们都是常数.

由于热量守恒,流入的热量应等于物体温度升高所需吸收的热量,即

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_S k\,\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t=\iiint_V c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V, \tag{1.11}$$

此式左端的曲面积分中 S 是闭曲面，假设函数 u 关于 x,y,z 具有二阶连续偏导数，关于 t 具有一阶连续偏导数，可以利用高斯公式将它化为三重积分，即

$$\iint_S k\,\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint_V k\,\Delta u\mathrm{d}V. \tag{1.12}$$

$$\left(\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\text{ 称为 Laplace 算子}\right)$$

同时，右端的体积分可以写成

$$\iiint_V c\rho\left(\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}V=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_V c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t,$$

因此有

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_V k\,\Delta u\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_V c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t. \tag{1.13}$$

由于时间间隔 $[t_1,t_2]$ 及区域 V 都是任意取的，并且被积函数是连续的，所以(1.13)式左右恒等的条件是它们的被积函数恒等，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{1.14}$$

其中 $a^2=\dfrac{k}{c\rho}$. 方程(1.14)称为三维热传导方程.

若物体内有热源，其强度为 $F(x,y,z,t)$，则相应的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t).$$

其中 $f=\dfrac{F}{c\rho}$.

作为特例，如果所考虑的物体是一根细杆(或一块薄板)，或者即使不是细杆(或薄板)而其中的温度 u 只与 x,t 或 x,y,t 有关，则方程(1.14)就变成一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

或二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

如果我们考虑稳恒温度场，即在热传导方程中物体的温度趋于某种动态平衡状态，这时温度 u 已与时间 t 无关，所以 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$，此时方程(1.14)就变成 Laplace 方程 $\Delta u=0$. 由此可见稳恒温度场内的温度 u 满足下列拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

若自由项不恒为零，则得下列泊松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z).$$

在研究气体或液体的扩散过程时，若扩散系数是常数，则所得的扩散方程与热传导方程完全相同.

1.3 定解条件

上面所讨论的是如何将一个具体问题所具有的物理规律用数学式子表达出来. 除此以外,我们还需要把这个问题所具有的特定条件也用数学形式表达出来,这是因为任何一个具体的物理现象都是处在特定条件之下的. 例如弦振动问题,上节所推导出来的方程是一切柔软均匀的弦作微小横向振动的共同规律,在推导这个方程时没有考虑到弦在初始时刻的状态以及弦所受的约束情况. 如果我们不是一般地研究弦的振动,就要考虑到弦所具有的特定条件. 因为任何一个振动物体在某时刻的振动状态总是和此时刻以前的状态有关,从而就与初始时刻的状态有关. 另外,弦的两端所受的约束也会影响弦的振动,端点所处的物理条件不同就会产生不同的影响,因而弦的振动也不同. 所以对弦振动问题来说,除了建立振动方程以外,还需列出它所处的特定条件. 对热传导方程、拉普拉斯方程也是如此.

提出的条件应该能够用来说明某一具体物理现象的初始状态或者边界上的约束情况. 说明初始状态的条件称为**初始条件**. 说明边界上的约束情况的条件称为**边界条件**.

下面具体说明初始条件和边界条件的表达形式.

初始条件:对于弦振动问题来说,初始条件就是弦在开始时刻的位移及速度. 若以 $\varphi(x)$,$\psi(x)$ 分别表示初位移和初速度,则初始条件可以表达为

$$\begin{cases} u\big|_{t=0}=\varphi(x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x). \end{cases} \tag{1.15}$$

而对热传导方程来说,初始条件是指在开始时刻物体温度的分布情况. 若以 $\varphi(M)$ 表示 $t=0$ 时物体内任一点 M 处的温度,则热传导方程的初始条件就是

$$u(M,t)\big|_{t=0}=\varphi(M). \tag{1.16}$$

泊松方程与拉普拉斯方程都是描述稳恒状态的,与初始状态无关,所以不提初始条件.

边界条件:还是从弦振动问题说起. 从物理学知,弦在振动时,其端点(以 $x=a$ 表示这个端点)依所受的约束情况通常有以下三种类型:

第一,固定端,即弦在振动过程中这个端点始终保持不动. 对应这种状态的边界条件为

$$u\big|_{x=a}=0 \tag{1.17}$$

或

$$u(a,t)=0.$$

第二,自由端,即弦在这个端点不受位移方向的外力,从而在这个端点弦在位移方向的张力应该为零. 由 1.2 节中例 1 的推导过程可知,此时所对应的边界条件为

$$T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}=0$$

即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}=0 \tag{1.18}$$

或

$$u_x(a,t)=0.$$

第三，弹性支承端，即弦在这个端点被某个弹性体所支承. 设弹性支承原来的位置为 $u=0$，则 $u|_{x=a}$ 就表示弹性支承的应变，由虎克(Hooke)定律可知，这时弦在 $x=a$ 处沿位移方向的张力 $T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}$ 应该等于 $-ku|_{x=a}$，即

$$T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}=-ku|_{x=a}\quad 或\quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u\right)\right|_{x=a}=0. \tag{1.19}$$

其中 k 为弹性体的倔强系数，$\sigma=k/T$.

对于热传导方程来说，也有类似的情况. 以 S 表示某物体 V 的边界，如果在导热过程中边界 S 的温度为已知的函数 $f(x,y,z,t)$，则这时的边界条件为

$$u|_S=f. \tag{1.20}$$

这里的 f 是定义在 S 上的函数.

如果在导热过程中，物体 V 与周围的介质处于绝热状态，或者说，在 S 上的热量流速始终为零，这时从1.2节例2的推导过程可知，在边界 S 上必满足

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S=0. \tag{1.21}$$

如果物体的内部和周围的介质通过边界 S 有热量交换，以 u_1 表示和物体接触处的介质温度，这时利用另一个热传导实验定律：

从一介质流入另一介质的热量和两介质间的温度差成正比

$$\mathrm{d}Q=k_1(u-u_1)\mathrm{d}S\mathrm{d}t.$$

其中 k_1 是两介质间的热交换系数. 在物体内部任取一个无限贴近于边界 S 的闭曲面 Γ，由于在 S 内侧热量不能积累，所以在 Γ 上的热量流速应等于边界 S 上的热量流速，而在 Γ 上的热量流速 $\left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S\mathrm{d}t}\right|_\Gamma=-k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma$，所以，当物体和外界有热交换时，相应的边界条件为

$$-k\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S=k_1(u-u_1)|_S,$$

即

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\sigma u\right)\right|_S=\sigma u_1|_S. \tag{1.22}$$

其中 $\sigma=k_1/k$.

综合上述可知，无论是对弦振动问题，还是对热传导问题，它们所对应的边界条件，从数学角度看不外乎有三种类型：

一是在边界 S 上直接给出了未知函数 u 的数值，即

$$u|_S=f_1. \tag{1.23}$$

这种形式的边界条件称为第一类边界条件.

二是在边界 S 上给出了未知函数 u 沿 S 的外法线方向的方向导数，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S=f_2. \tag{1.24}$$

这种形式的边界条件称为第二类边界条件.

三是在边界 S 上给出了未知函数 u 及其沿 S 的外法线方向的方向导数某种线性组合的值，即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\sigma u\right)\bigg|_S=f_3. \tag{1.25}$$

这种形式的边界条件称为第三类边界条件.

需要注意的是(1.23),(1.24),(1.25)右端的 $f_i(i=1,2,3)$ 都是定义在边界 S 上(一般说来,也依赖于 t)的已知函数.不论哪一类型的边界条件,当它的数学表达式中的自由项(即不依赖于 u 的项)恒为零时,则这种边界条件称为是齐次的,否则称为非齐次的.

1.4 定解问题的提法

前面几节我们推导了几种不同类型的偏微分方程并讨论了与它们相应的初始条件与边界条件的表达方式.由于这些方程中出现的未知函数的偏导函数的最高阶都是二阶,而且它们对于未知函数及其各阶偏导函数来说都是线性的,所以这种方程称为二阶线性偏微分方程.在实际应用中二阶线性偏微分方程遇到得较多.

由于每一个物理过程都处在特定的条件之下,所以我们的目的是要求出偏微分方程的适合某些特定条件的解.初始条件和边界条件都称为定解条件.把某个偏微分方程和相应的定解条件结合在一起,就构成了一个定解问题.

只有初始条件,没有边界条件的定解问题称为初始值问题(或柯西(Cauchy)问题);没有初始条件,只有边界条件的定解问题称为边值问题;既有初始条件也有边界条件的定解问题称为混合问题.

一个定解问题是否符合实际情况,通常可以从以下三方面加以检验:

(1) 解的存在性,即看所归结出来的定解问题是否有解;

(2) 解的唯一性,即看是否只有一个解;

(3) 解的稳定性,即看当定解条件有微小变动时,解是否相应地只有微小的变动,如果确实如此,此解便称为稳定的.

如果一个定解问题存在唯一且稳定的解,则此问题称为适定的.在以后讨论中我们主要讨论定解问题的解法,而很少讨论它的适定性,因为讨论定解问题的适定性往往十分困难,而本书所讨论的定解问题都是古典的,可以认为它们是适定的.

由前面的定义可知,一个含 n 个自变量的二阶线性偏微分方程的一般的形式应该是

$$Lu\equiv\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f. \tag{1.26}$$

其中 A_{ik},B_i,C,f 都只是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的已知函数,与未知函数无关.在两个自变量的情形,(1.26)式可写为

$$a_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+b_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y). \tag{1.27}$$

与线性常微分方程一样,线性偏微分方程(1.26)具有一个非常重要的特性,称为叠加原理,即若 u_i 是方程 $Lu_i=f_i(i=1,2,\cdots)$ 的解,而且级数 $u=\sum_{i=1}^{\infty}C_iu_i$ 收敛,并且能够