

最小二乘法

張樹森編



中國科學院圖書儀器公司發行

最小二乘法

張樹森編

中國科學圖書儀器公司印行
上海

最小二乘法

中華民國三十六年二月初版

版權所有 翻印必究

編輯者 張 樹 森

發行者 楊 孝 述

發行所 中國科學圖書儀器公司
上海中正中路六四九號

印刷所 中國科學圖書儀器公司
上海中正中路六四九號

分公司 中國科學圖書儀器公司
南京 廣州 漢口 重慶 北平

(稅3000)

序

物理之實驗也，測量之工作也，社會之統計也，其法繁，其理微，雖竭吾人之力，憑儀器之精，勢難無差，欲去其差，最小二乘方尚焉。著者年來在浙大任教最小二乘方，因西書來源斷絕，乃從事編著，以授學者。日積月累，遂成卷帙，名曰最小二乘法。

是書編著以滿列門氏最小二乘法為藍本，繁者刪之，略者詳之。首四章敘述最小二乘方之原理，法則及公式，一般學者讀此四章，則可得其梗概。餘六章為各種觀測之調整與精度之計算等，純係實例，尤注重於測量之應用。如三角網之調整，杜立德氏解法等，為學測量者所必習，原書均缺，特參證他書，詳為增添。自愧學識庸陋，錯誤滋多，尚祈海內學者教而正之。

民國三十六年二月張樹森誌於龍泉浙大分校

目 錄

第一章 緒 論

1. 目的	1	5. 簡單事件	5
2. 觀測之分類	1	6. 混合事件	5
3. 觀測之差誤	2	習題	10
4. 或是率之原理	4		

第二章 差誤或是率之定律

1. 實驗之原理	11	5. 或是率積分	19
2. 或是率曲線	13	6. 理論與實驗之比較	23
3. 差誤定律之方程式	14	7. 基本公式之討論	25
4. 曲線之討論	18	習題	26

第三章 觀測之調整

1. 權	27	6. 同權獨立觀測	31
2. 權觀測	27	7. 異權獨立觀測	37
3. 最小二乘方之原理	28	8. 定約觀測	41
4. 同權直接觀測	30	9. 連數解法	42
5. 異權直接觀測	31	習題	48

第四章 觀測之精度

1. 當差	50	4. 權平均值之當差	54
2. 算術平均值之當差	53	3. 同權直接觀測之當差	55

5. 異權直接觀測之當差——	56	10. 獨立觀測之當差——	63
6. 二量之和或差之當差——	59	11. 獨立觀測單位權之當差——	63
7. 一量某倍數之當差——	61	12. 最當值之權——	66
8. 二量乘積之當差——	62	13. 定約觀測之當差——	71
9. 多量函數之當差——	62	習題——	72

第五章 直接觀測

1. 同權觀測——	74	3. 異權觀測——	78
2. 同權當差之簡式——	76	習題——	81

第六章 觀測量之函數

1. 距離測量——	83	4. 面積之精度——	87
2. 單位長度之當差——	84	習題——	89
3. 角度測量——	86		

第七章 多量獨立觀測

1. 獨立觀測計算之程序——	90	6. 同權觀測多角——	99
2. 同權水平測量——	90	7. 異權觀測多角——	103
3. 異權水平測量——	93	8. 實驗常數——	105
4. 最當值之權——	95	9. 實驗公式——	110
5. 同權觀測二角——	97	習題——	117

第八章 定約觀測及三角網之調整

1. 定約觀測計算之程序——	119	4. 在一點測角度——	123
2. 同權觀測三角形——	120	5. 三角網之調整——	125
3. 異權觀測三角形——	121	6. 圖形調整——	126

7. 角方程式	127	17. 方向法之定約方程式	143
8. 獨立角方程式之數	129	18. 四邊形之調整(方向法)	145
9. 邊方程式	130	19. 已定二邊及夾角	149
10. 四邊形之邊方程式	131	20. 已定一三角形之四邊形	150
11. 中點形之邊方程式	133	21. 中點未測之已定三角形或 多邊形	151
12. 成立邊方程式之簡法	134	22. 水平測量	154
13. 獨立邊方程式之方數	135	23. 水平網之調整	156
14. 圖形調整之定約方程式	136	習題	159
15. 四邊形之調整(角度法)	138		
16. 方向代角度	142		

第九章 正則方程式之解法

1. 消去法	162	7. 杜立德氏解法	187
2. 正則方程式之構成	163	8. 刪去贅項	190
3. 高斯氏解法	167	9. 計算之程序	191
4. 異權觀測之解法	175	10. 杜立德氏法解連數方程 式	194
5. 對數計算法	179	習題	199
6. 最當值之當差	184		

第十章 差誤之研討

1. 差誤或晷率	201	6. 均差及當差	210
2. 懷疑觀測之捨棄	203	7. 當差之不定率	212
3. 定差	205	8. 中數	214
4. 社會統計	207	習題	210
5. 非直線函數	208		

表

表一 或是率積分之值 $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 數引爲 t 或 hx — 217

表二 或是率積分之值 $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 引數爲 $\frac{t}{0.4769}$

或 $\frac{x}{r}$ ————— 218

表三 依(20)及(21)式計算當差 ————— 219

表四 依(35)及(36)式計算當差 ————— 220

表五 平方數 ————— 221

表六 應於卓凡納氏規範 ————— 224

英漢譯名對照表 ————— 225

最 小 二 乘 法

第一章 緒論

1. 目的 最小二乘法之目的乃用以調整各種觀測而求其最當值，並比較其精度。用同一儀器同一方法以觀測，無論若何精密，差誤在所不免，故觀測之值亦不同，且真值不得而知，祇得用最小二乘法以求最當值。若同一觀測所用儀器不同，方法亦異，所得之值自有精粗之別，更須用最小二乘法比較其精度，而求最當值。

2. 觀測之分類 觀測可分為直接觀測 (Direct observation) 及間接觀測 (Indirect observation)。更可分為定約觀測 (Conditioned observation) 及獨立觀測 (Independent observation)。

直接觀測者乃用直接方法以求其值也。例如用鋼尺以量距離，用經緯儀以測角度。

間接觀測者乃用間接方法以求其值也。例如三角測量須測基線及角度，以求各邊之長；測數角之差或和，以計一角之度數；水平測量則觀測多次水平尺數，以計二點之高低；觀測各星之高度以求緯度。

定約觀測者為直接或間接觀測，惟須適合於幾何之定約。

例如測平面三角形，三內角之和須等於 180 度；化學分析之成分須等於 100；閉合導線經緯距之和正負須相等。

獨立觀測者為直接或間接觀測，其值各自獨立無連帶之關係，亦無須適合幾何定約。例如僅測三角形之二內角，無論用直接或間接方法，而二內角無連帶關係也。

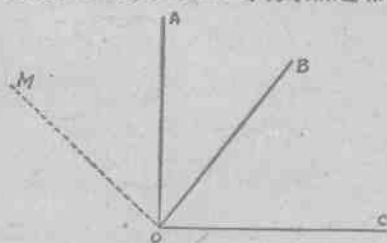


圖 一

設有 AOB 及 BOC 兩角，其頂點為 O 。安經緯儀於 O 點，先測 AOB 角，次測 BOC 角，是為直接觀測。設另有測點 M ，測得 MOA 、 MOB 及 MOC 三角，以之計算 AOB 及 BOC

兩角，是為間接觀測。上述二種測法無論其為直接或間接觀測，而 AOB 與 BOC 角無連帶關係，是為獨立觀測。設 AOB 、 BOC 及 AOC 三角均施測，而 AOB 及 BOC 兩角之和須等於 AOC 角，是為定約觀測。

更說明之：有地一塊，用鋼尺以量各邊，用經緯儀以測各角，是為直接觀測。由邊及角以計面積，則面積測量為間接觀測。若僅計及二邊，則無連帶關係，是為獨立觀測。若使各邊及各角須成一閉合形者，則為定約觀測。

3. 觀測之差誤 觀測一量也，欲得其真值殊屬難事，其間常發生差誤。第儀器有精粗，經驗有豐乏，環境有良否，觀測差誤有大小之分耳。茲分述各種差誤如下。

(1) 錯誤 錯誤(Mistake)者常因觀測者缺乏經驗,以及不謹慎而發生。例如鋼尺倒置以6爲9;羅盤儀之度數以 58° 爲 62° ;或望遠鏡誤對視標等。惟此種錯誤可與別組觀測值比較而去之。

(2) 定差 定差(Constant or Systematic error)者其發生常有一定之規律,或在一組觀測中有一定之差誤也。此種差誤可依已知之定律以改正,或在一組觀測使其成正負相等以抵消。定差可分爲下列三種。

(a) 理論差誤 理論差誤(Theoretical error)者可依理論之定律而施以改正也。例如用鋼尺量距離,因溫度升降而生差誤。可依鋼之伸縮係數而改正之,觀測日星因大氣折光而增大高度,可計算蒙氣差而改正之。

(b) 儀器差誤 儀器差誤(Instrumental error)者因儀器製造不精或整理未善而生也。例如經緯儀刻度之不勻,圓盤之偏心,視線不與橫軸垂直等。須施以精密之檢驗而整理之,或用特殊之測法以消去之。

(c) 個人差誤 個人差誤(Personal error)者因觀測者之習慣不同或個性特殊而發生也。例如水平測量,觀測者安規牌太高或太低,如富有經驗者所生差誤常相同,仍可消去,其測定之高度差固無妨也。有時須調換觀測者,可利用其個性各殊,如視線一則偏左,一則偏右以相消。但此種差誤原無一定規律以改正,差幸觀測者如經驗豐富,當不致發生大差誤也。

(3) 偶差 偶差(Accidental error)者為錯誤及定差改正後而仍存在之差誤也。例如經緯儀測量因氣候急遽變化而伸縮，大氣之折光，風之影響，土之鬆動，以及施測者不能中分視標等，而生之差誤，此種差誤是為偶差。觀測無論若何精密，偶差在所不免，最小二乘法者即求所以去之之法也。偶差者初觀之似甚雜亂，實則適合乎精密之定律，即或是率(Probability)之定律是也。偶差發生之原因極多，非僅限於物理研究之範圍也。

(a) 真差 真差(True error)者為真值與觀測值之差也。茲命 Z 為一量之真值， M_1, M_2 及 M_3 為每次之觀測值。則每次真差為 $x_1 = Z - M_1, x_2 = Z - M_2$ 及 $x_3 = Z - M_3$ 。

(b) 殘差 殘差(Residual)者為最當值與觀測值之差也。最當值乃用最小二乘法以求之。茲命 v 為殘差，每次測得一量之值為 M_1, M_2 及 M_3 。其最當值 z 應為各觀測值之平均數。每次觀測之殘差為 $v_1 = z - M_1, v_2 = z - M_2$ 及 $v_3 = z - M_3$ 。如觀測次數愈增多，最當值 z 愈近於真值 Z ，則殘差 v 愈近於真差 x 。設觀測次數增至無窮，則最當值與真值等，而殘差亦與真差等。如是差誤或是率定律之應用於殘差亦適合也。

4. 或是率之原理 或是率者依數學意義言之為小於一之值也，即某事件成功或失敗與全能發生途徑之比也。例如擲一銅元為正面或反面，其發生之途徑則同，故擲正面之或是率為 $\frac{1}{2}$ ，擲反面者亦為 $\frac{1}{2}$ 。若擲一骰子其發生之途徑有六，故一次欲擲一點之或是率為 $\frac{1}{6}$ ，其不擲一點之或是率為 $\frac{5}{6}$ 。

換言之：若一事件成功之途徑為 a ，失敗之途徑為 b ，故成功之或是率為 $\frac{a}{a+b}$ ，失敗之或是率為 $\frac{b}{a+b}$ 。或是率者乃抽象之分數，其值自 0 至 1，用以計一事件成敗之途徑也。若其值為 0，則某事件發生途徑為不能；其值為一，則為全能；其值為 $\frac{1}{2}$ ，則成敗參半；故一事件成功及失敗或是率之和為一。茲命 P 為成率，則 $1-P$ 為敗率，獎券共 2000 張，抽彩欲得頭獎之成率為 $\frac{1}{2000}$ ，其敗率應為 $\frac{1999}{2000}$ 。

5. 簡單事件 設一事件以不同獨立之途徑可以成功，其或是率為各成率之和。若某事件成功之途徑為 a ，而同時 a' 途徑亦可成功，其總途徑為 c ，故成率為 $\frac{a+a'}{c}$ ，即成率為 $\frac{a}{c}$ 及 $\frac{a'}{c}$ 之和。例如一袋中盛 20 紅球，16 白球及 14 黑球。若僅取其一，取紅球之成率為 $\frac{20}{50}$ ，白球之成率為 $\frac{16}{50}$ ，黑球之成率為 $\frac{14}{50}$ 。若任取紅球或黑球之成率為 $\frac{20}{50} + \frac{14}{50} = \frac{34}{50}$ 。

6. 混合事件 設有數個獨立簡單事件同時發生者謂之混合事件，例如一次擲二骰子是。若觀測差誤亦為混合事件，蓋混合許多偶差而同時發生也。

混合事件之成率為各個獨立簡單事件成率之相乘積。例如有二袋，第一袋盛 7 黑球及 9 白球，第二袋盛 4 黑球及 11 白球。由第一袋取一黑球之成率為 $\frac{7}{16}$ ，由第二袋取一黑球之成率為

$\frac{4}{15}$ 。今欲於二袋中同時各取一黑球之成率，其混合成率應為 $\frac{7}{16} \times \frac{4}{15}$ 。蓋第一袋一球與第二袋一球之配合成對有 16×15 途徑，而第一袋黑球與第二袋黑球配合成對有 7×4 途徑，故欲於二袋中同時各取一黑球之成率為 $\frac{7}{16} \times \frac{4}{15}$ 也。

設有二簡單事件，第一件之成功為 a_1 途徑，失敗為 b_1 途徑；第二件之成功為 a_2 途徑，失敗為 b_2 途徑。不論成敗之途徑第一件為 $a_1 + b_1$ ，第二件為 $a_2 + b_2$ 。第一件與第二件配合之途徑為 $(a_1 + b_1) \times (a_2 + b_2)$ 。兩件均成之途徑為 $a_1 a_2$ ，均敗為 $b_1 b_2$ 。第一件成而第二件敗為 $a_1 b_2$ 。第一件敗而第二件成為 $a_2 b_1$ 。二件混合成敗率如下：

兩件均成之或是率.....	$\frac{a_1 a_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}$
兩件均敗之或是率.....	$\frac{b_1 b_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}$
第一成與第二敗之或是率.....	$\frac{a_1 b_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}$
第一敗與第二成之或是率.....	$\frac{a_2 b_1}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}$

上述為二簡單事件混合之或是率，餘類推。若有四簡單事件之成率為 P_1, P_2, P_3 及 P_4 ，其混合之成率為 $P_1 P_2 P_3 P_4$ ，而其敗率為 $(1 - P_1)(1 - P_2)(1 - P_3)(1 - P_4)$ 。若僅第一件成功餘三者皆失敗之或是率為 $P_1(1 - P_2)(1 - P_3)(1 - P_4)$ 。

多數混合事件其或是率最大者是爲最當事件。例如擲二銅元，其發生各狀況之或是率如下：

二者均正面..... $\frac{1}{4}$

一正及一反..... $\frac{1}{2}$

二者均反面..... $\frac{1}{4}$

觀上式一正及一反有最大或是率，爲三混合事件中之最當事件。三或是率相加等於一，乃示三事件中必有一件發生。

設量得一線之長爲 720.2, 720.3, 720.4 及 720.5，其平均值爲 720.35 爲最當值，因其或是率爲最大(詳後)。

設混合 n 個簡單事件，每個事件有成敗二途。茲命 P 爲每事件在某狀況之成率， Q 爲每事件在某狀況之敗率，則 $P + Q = 1$ 。如某狀況欲其 m 個成功，其失敗者爲 $n - m$ 個，其或是率爲 $P^m Q^{n-m}$ 。但 n 個事件任取 m 個在某狀況之組合爲 ${}_nC_m$ ，則該狀況之或是率爲 ${}_nC_m P^m Q^{n-m}$ 。

n 個該狀況之成率..... ${}_nC_n P^n Q^{n-n} = P^n$

$n-1$ 個該狀況之成率..... ${}_nC_{n-1} P^{n-1} Q^1 = n P^{n-1} Q$

$n-2$ 個該狀況之成率..... ${}_nC_{n-2} P^{n-2} Q^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} P^{n-2} Q^2$

$n-3$ 個該狀況之成率..... ${}_nC_{n-3} P^{n-3} Q^3 =$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^{n-3} Q^3$$

.....

$n-m$ 個該狀況之成率 $\dots {}_nC_{n-m}P^{n-m}Q^m =$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots m}P^{n-m}Q^m$$

$n-n$ 個該狀況之成率 $\dots {}_nC_{n-n}P^{n-n}Q^n = Q^n$

上列各行合併之，乃等於用二項式 (Binomial formula) 展開 $(P+Q)^n$ 如下：

$$\begin{aligned}(P+Q)^n &= P^n + nP^{n-1}Q + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}P^{n-2}Q^2 + \dots \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots m}P^{n-m}Q^m + \dots + Q^n\end{aligned}$$

【例一】擲六骰子，欲擲六個皆為一點，五個皆為一點，…等之成率如下：

$$\begin{aligned}\text{六個一點之或是率} &\dots {}_6C_0\left[\frac{1}{6}\right]^6\left[\frac{5}{6}\right]^0 = \frac{1}{6^6} \\ \text{五個一點之或是率} &\dots {}_6C_1\left[\frac{1}{6}\right]^5\left[\frac{5}{6}\right]^1 = \frac{6\times 5}{6^6} \\ \text{四個一點之或是率} &\dots {}_6C_2\left[\frac{1}{6}\right]^4\left[\frac{5}{6}\right]^2 = 15\frac{5^2}{6^6} \\ \text{三個一點之或是率} &\dots {}_6C_3\left[\frac{1}{6}\right]^3\left[\frac{5}{6}\right]^3 = 20\frac{5^3}{6^6} \\ \text{二個一點之或是率} &\dots {}_6C_4\left[\frac{1}{6}\right]^2\left[\frac{5}{6}\right]^4 = 15\frac{5^4}{6^6} \\ \text{一個一點之或是率} &\dots {}_6C_5\left[\frac{1}{6}\right]^1\left[\frac{5}{6}\right]^5 = 6\frac{5^5}{6^6} \\ \text{無一個一點之或是率} &\dots {}_6C_6\left[\frac{1}{6}\right]^0\left[\frac{5}{6}\right]^6 = \frac{5^6}{6^6}\end{aligned}$$

【例二】擲六銅元，欲得其正面，則 $P+Q=1$ ， $P=Q=\frac{1}{2}$ ，其式如下：

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \dots$$

如 $n=6$ 代入上式得

$$\frac{1}{64} + \frac{6}{64} + \frac{15}{64} + \frac{20}{64} + \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64}$$

上式示擲六銅元各狀況之或是率，即

六個均正面.....	$\frac{1}{64}$
五個正面及一個反面.....	$\frac{6}{64}$
四個正面及二個反面.....	$\frac{15}{64}$
三個正面及三個反面.....	$\frac{20}{64}$
二個正面及四個反面.....	$\frac{15}{64}$
一個正面及五個反面.....	$\frac{6}{64}$
六個均反面.....	$\frac{1}{64}$

設 n 為偶數，則中項為最大或是率；若 n 為奇數，則中二項為最大或是率。上表各狀況或是率之和仍等於一。

若擲八銅元，則各狀況之或是率如下：

$$\frac{1}{256} + \frac{8}{256} + \frac{28}{256} + \frac{56}{256} + \frac{76}{256} + \frac{56}{256} + \frac{28}{256} + \frac{8}{256} + \frac{1}{256}$$

將橫線分為六等分及八等分，以縱線表或是率如 $\frac{1}{64}, \frac{6}{64} \dots$ 等及 $\frac{1}{256}, \frac{8}{256}, \dots$ 等，繪成曲線如圖二。實曲線為示擲六銅元之狀況，虛曲線為擲八銅元之狀況，而此曲線極似以下所述差誤或是率曲線。