最小二乘法

張樹森編

中國科學圖書儀器公司發行

最小二乘法

張樹森編

中國科學圖書儀器公司印行
上海

最小二乘法

中華民國三十六年二月初版

編輯者　張樹森

發行者　楊孝述

發行所　中國科學圖書儀器公司
上海中正中路六四九號

印刷所　中國科學圖書儀器公司
上海中正中路六四九號

分公司　中國科學圖書儀器公司
南京 廣州 漢口 重慶 北平

（稅3000）

序

物理之實驗也，測量之工作也，社會之統計也，其法繁，其理微，雖竭吾人之力，邃儀器之精，勢難無差，欲去其差，最小二乘方尙焉。著者年來在浙大任敎最小二乘方，因西書來源斷絕，乃從事編著，以授學者。日積月累，遂成卷帙，名曰最小二乘法。

是書編著以滿列門氏最小二乘法爲藍本，繁者删之，略者詳之。首四章敘述最小二乘方之原理，法則及公式，一般學者讀此四章，則可得其梗概。餘六章爲各種觀測之調整與精度之計算等，純係實例，尤注重於測量之應用。如三角網之調整，杜立德氏解法等，爲學測量者所必習，原書均缺，特參證他書，詳爲增添。自愧學識譾陋，錯誤滋多，尙祈海內學者敎而正之。

民國三十六年二月張樹森誌於龍泉浙大分校

目　錄

第一章　緒　論

第二章　差誤或是率之定律

第三章　觀測之調整

第四章　觀測之精度

第五章 直接觀測

第六章 觀測量之函數

第七章 多量獨立觀測

第八章 定約觀測及三角網之調整

第九章　正則方程式之解法

第十章　差誤之研討

表

最小二乘法

第一章 緒論

1. **目的** 最小二乘法之目的乃用以調整各種觀測而求其最當值，幷比較其精度。用同一儀器同一方法以觀測，無論若何精密，差誤在所不免，故觀測之值亦不同，且眞值不得而知，祇得用最小二乘法以求最當值。若同一觀測所用儀器不同，方法亦異，所得之值自有精粗之別，更須用最小二乘法比較其精度，而求最當值。

2. **觀測之分類** 觀測可分爲直接觀測(Direct observation)及間接觀測(Indirect observation)。更可分爲定約觀測(Conditioned observation)及獨立觀測(Independent observation)。

直接觀測者乃用直接方法以求其值也。例如用鋼尺以量距離，用經緯儀以測角度。

間接觀測者乃用間接方法以求其值也。例如三角測量須測基線及角度，以求各邊之長；測數角之差或和，以計一角之度數；水平測量則觀測多次水平尺數，以計二點之高低；觀測各星之高度以求緯度。

定約觀測者爲直接或間接觀測，惟須適合於幾何之定約。

例如測平面三角形,三內角之和須等於 180 度;化學分析之成分須等於 100;閉合導線經緯距之和正負須相等。

獨立觀測者為直接或間接觀測,其值各自獨立無連帶之關係,亦無須適合幾何定約。例如僅測三角形之二內角,無論用直接或間接方法,而二內角無連帶關係也。

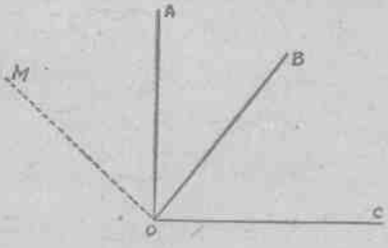

圖　一

設有 AOB 及 BOC 兩角,其頂點為 O。安經緯儀於 O 點,先測 AOB 角,次測 BOC 角,是為直接觀測。設另有測點 M,測得 MOA, MOB 及 MOC 三角,以之計算 AOB 及 BOC 兩角,是為間接觀測。上述二種測法無論其為直接或間接觀測,而 AOB 與 BOC 角無連帶關係,是為獨立觀測。設 AOB, BOC 及 AOC 三角均施測,而 AOB 及 BOC 兩角之和須等於 AOC 角,是為定約觀測。

更說明之:有地一塊,用鋼尺以量各邊,用經緯儀以測各角,是為直接觀測。由邊及角以計面積,則面積測量為間接觀測。若僅計及二邊,則無連帶關係,是為獨立觀測。若使各邊及各角須成一閉合形者,則為定約觀測。

3. 觀測之差誤　觀測一量也,欲得其真值殊屬難事,其間常發生差誤。第儀器有精粗,經驗有豐乏,環境有良否,觀測差誤有大小之分耳。茲分述各種差誤如下。

(1)錯誤　錯誤(Mistake)者常因觀測者缺乏經驗,以及不謹愼而發生。例如鋼尺倒置以6為9;羅盤儀之度數以58°為62°;或望遠鏡誤對視標等。惟此種錯誤可與別組觀測值比較而去之。

(2)定差　定差(Constant or Systematic error)者其發生常有一定之規律,或在一組觀測中有一定之差誤也。此種差誤可依已知之定律以改正,或在一組觀測使其成正負相等以抵消。定差可分為下列三種。

(a)理論差誤　理論差誤(Theorectical error)者可依理論之定律而施以改正也。例如用鋼尺量距離,因溫度升降而生差誤。可依鋼之伸縮係數而改正之,觀測日星因大氣折光而增大高度,可計算蒙氣差而改正之。

(b)儀器差誤　儀器差誤(Instrumental error)者因儀器製造不精或整理未善而生也。例如經緯儀刻度之不勻,圓盤之偏心,視線不與橫軸垂直等。須施以精密之檢驗而整理之,或用特殊之測法以消去之。

(c)個人差誤　個人差誤(Personal error)者因觀測者之習慣不同或個性特殊而發生也。例如水平測量,觀測者安覘牌太高或太低,如富有經驗者所生差誤常相同,仍可消去,其測定之高度差固無妨也。有時須調換觀測者,可利用其個性各殊,如視線一則偏左,一則偏右以相消。但此種差誤原無一定規律以改正,差幸觀測者如經驗豐富,當不致發生大差誤也。

Probability 概率. 几率.

(3)偶差 偶差(Accidental error)者爲錯誤及定差改正後而仍存在之差誤也。例如經緯儀測量因氣候急遽變化而伸縮,大氣之折光,風之影響,土之鬆動,以及施測者不能中分覘標等,而生之差誤,此種差誤是爲偶差。觀測無論若何精密,偶差在所不免,最小二乘法者卽求所以去之之法也。偶差者初觀之似甚雜亂,實則適合乎精密之定律,卽或是率(Probability)之定律是也。偶差發生之原因極多,非僅限於物理研究之範圍也。

(a)眞差 眞差(True error)者爲眞値與觀測値之差也。兹命 Z 爲一量之眞値,M_1, M_2 及 M_3 爲每次之觀測値。則每次眞差爲 $x_1=Z-M_1, x_2=Z-M_2$,及 $x_3=Z-M_3$。

(b)殘差 殘差(Residual)者爲最當値與觀測値之差也。最當値乃用最小二乘法以求之。兹命 v 爲殘差,每次測得一量之値爲 M_1, M_2 及 M_3。其最當値 z 應爲各觀測値之平均數。每次觀測之殘差爲 $v_1=z-M_1, v_2=z-M_2$ 及 $v_3=z-M_3$。如觀測次數愈增多,最當値 z 愈近於眞値 Z,則殘差 v 愈近於眞差 x。設觀測次數增至無窮,則最當値與眞値等,而殘差亦與眞差等。如是差誤或是率定律之應用於殘差亦適合也。

4. 或是率之原理 或是率者依數學意義言之爲小於一之値也,卽某事件成功或失敗與全能發生途徑之比也。例如擲一銅元爲正面或反面,其發生之途徑則同,故擲正面之或是率爲$\frac{1}{2}$,擲反面者亦爲$\frac{1}{2}$。若擲一骰子其發生之途徑有六,故一次欲擲一點之或是率爲$\frac{1}{6}$,其不擲一點之或是率爲$\frac{5}{6}$。

換言之:若一事件成功之途徑爲 a,失敗之途徑爲 b,故成功之或是率爲 $\frac{a}{a+b}$,失敗之或是率爲 $\frac{b}{a+b}$。或是率者乃抽象之分數,其值自 0 至 1,用以計一事件成敗之途徑也。若其值爲 0,則某事件發生途徑爲不能;其值爲一,則爲全能;其值爲$\frac{1}{2}$,則成敗參半;故一事件成功及失敗或是率之和爲一。茲命 P 爲成率,則 $1-P$ 爲敗率,獎券共 2000 張,抽彩欲得頭獎之成率爲 $\frac{1}{2000}$,其敗率應爲 $\frac{1999}{2000}$。

5. 簡單事件 設一事件以不同獨立之途徑可以成功,其或是率爲各成率之和。若某事件成功之途徑爲 a,而同時 a' 途徑亦可成功,其總途徑爲 c,故成率爲 $\frac{a+a'}{c}$,卽成率爲 $\frac{a}{c}$ 及 $\frac{a'}{c}$ 之和。例如一袋中盛 20 紅球,16 白球及 14 黑球。若僅取其一,取紅球之成率爲 $\frac{20}{50}$,白球之成率爲 $\frac{16}{50}$,黑球之成率爲 $\frac{14}{50}$。若任取紅球或黑球之成率爲 $\frac{20}{50}+\frac{14}{50}=\frac{34}{50}$。

6. 混合事件 設有數個獨立簡單事件同時發生者謂之混合事件,例如一次擲二骰子是。若觀測差誤亦爲混合事件,蓋混合許多偶差而同時發生也。

混合事件之成率爲各個獨立簡單事件成率之相乘積。例如有二袋,第一袋盛 7 黑球及 9 白球,第二袋盛 4 黑球及 11 白球。由第一袋取一黑球之成率爲 $\frac{7}{16}$,由第二袋取一黑球之成率爲

$\frac{4}{15}$。今欲於二袋中同時各取一黑球之成率,其混合成率應爲 $\frac{7}{16}\times\frac{4}{15}$。蓋第一袋一球與第二袋一球之配合成對有 16×15 途徑,而第一袋黑球與第二袋黑球配合成對有 7×4 途徑,故欲於二袋中同時各取一黑球之成率爲 $\frac{7}{16}\times\frac{4}{15}$ 也。

設有二簡單事件,第一件之成功爲 a_1 途徑,失敗爲 b_1 途徑;第二件之成功爲 a_2 途徑,失敗爲 b_2 途徑。不論成敗之途徑第一件爲 a_1+b_1,第二件爲 a_2+b_2。第一件與第二件配合之途徑爲 $(a_1+b_1)\times(a_2+b_2)$。兩件均成之途徑爲 a_1a_2,均敗爲 b_1b_2。第一件成而第二件敗爲 a_1b_2。第一件敗而第二件成爲 a_2b_1。二件混合成敗率如下:

兩件均成之或是率……………………$\frac{a_1a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}$

兩件均敗之或是率……………………$\frac{b_1b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}$

第一成與第二敗之或是率…………$\frac{a_1b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}$

第一敗與第二成之或是率…………$\frac{a_2b_1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}$

上述爲二簡單事件混合之或是率,餘類推。若有四簡單事件之成率爲 P_1, P_2, P_3 及 P_4,其混合之成率爲 $P_1P_2P_3P_4$,而其敗率爲 $(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)(1-P_4)$。若僅第一件成功餘三者皆失敗之或是率爲 $P_1(1-P_2)(1-P_3)(1-P_4)$。

多數混合事件其或是率最大者是爲最當事件。例如擲二銅元，其發生各狀況之或是率如下：

二者均正面…………………………………………… $\frac{1}{4}$

一正及一反…………………………………………… $\frac{1}{2}$

二者均反面…………………………………………… $\frac{1}{4}$

觀上式一正及一反有最大或是率，爲三混合事件中之最當事件。三或是率相加等於一，乃示三事件中必有一件發生。

設量得一線之長爲 720.2，720.3，720.4 及720.5，其平均值爲 720.35 爲最當值，因其或是率爲最大(詳後)。

設混合 n 個簡單事件，每個事件有成敗二途。茲命 P 爲每事件在某狀況之成率，Q 爲每事件在某狀況之敗率，則 $P+Q=1$。如某狀況欲其 m 個成功，其失敗者爲 n-m 個，其或是率爲 $P^m Q^{n-m}$。但 n 個事件任取 m 個在某狀況之組合爲 ${}_nC_m$，則該狀況之或是率爲 ${}_nC_m P^m Q^{n-m}$。

n 個該狀況之成率………${}_nC_n P^n Q^{n-n} = P^n$

$n-1$ 個該狀況之成率……${}_nC_{n-1} P^{n-1} Q^1 = nP^{n-1}Q$

$n-2$ 個該狀況之成率……${}_nC_{n-2} P^{n-2} Q^2 = \dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2} P^{n-2} Q^2$

$n-3$ 個該狀況之成率……${}_nC_{n-3} P^{n-3} Q^3 =$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} P^{n-3} Q^3$$

………………………………………………………………

n-m 個該狀況之成率…${}_nC_{n-m}P^{n-m}Q^m=$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots m}P^{n-m}Q^m$$

n-n 個該狀況之成率…${}_nC_{n-n}P^{n-n}Q^n=Q^n$

上列各行合併之,乃等於用二項式(Binomial formula)展開 $(P+Q)^n$ 如下:

$$(P+Q)^n=P^n+nP^{n-1}Q+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}P^{n-2}Q^2+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots m}P^{n-m}Q^m+\cdots+Q^n$$

〔例一〕 擲六骰子,欲擲六個皆爲一點,五個皆爲一點,…等之成率如下:

六個一點之或是率……………${}_6C_6\left[\frac{1}{6}\right]^6\left[\frac{5}{6}\right]^0=\frac{1}{6^6}$

五個一點之或是率……………${}_6C_5\left[\frac{1}{6}\right]^5\left[\frac{5}{6}\right]^1=\frac{6\times5}{6^6}$

四個一點之或是率……………${}_6C_4\left[\frac{1}{6}\right]^4\left[\frac{5}{6}\right]^2=15\frac{5^2}{6^2}$

三個一點之或是率……………${}_6C_3\left[\frac{1}{6}\right]^3\left[\frac{5}{6}\right]^3=20\frac{5^3}{6^6}$

二個一點之或是率……………${}_6C_2\left[\frac{1}{6}\right]^2\left[\frac{5}{6}\right]^4=15\frac{5^4}{6^6}$

一個一點之或是率……………${}_6C_1\left[\frac{1}{6}\right]^1\left[\frac{5}{6}\right]^5=6\frac{5^5}{6^6}$

無一個一點之或是率…………${}_6C_0\left[\frac{1}{6}\right]^0\left[\frac{5}{6}\right]^6=\frac{5^6}{6^6}$

〔例二〕 擲六銅元,欲得其正面,則 $P+Q=1$, $P=Q=\frac{1}{2}$,其式如下:

$$(\tfrac{1}{2})^n+n(\tfrac{1}{2})^n+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}(\tfrac{1}{2})^n+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}(\tfrac{1}{2})^n+\cdots\cdots$$

如 $n=6$ 代入上式得

$$\frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{15}{64}+\frac{20}{64}+\frac{15}{64}+\frac{6}{64}+\frac{1}{64}$$

上式示擲六銅元各狀況之或是率，即

六個均正面……………………………… $\frac{1}{64}$

五個正面及一個反面……………………… $\frac{6}{64}$

四個正面及二個反面……………………… $\frac{15}{64}$

三個正面及三個反面……………………… $\frac{20}{64}$

二個正面及四個反面……………………… $\frac{15}{64}$

一個正面及五個反面……………………… $\frac{6}{64}$

六個均反面……………………………… $\frac{1}{64}$

設 n 為偶數，則中項為最大或是率；若 n 為奇數，則中二項為最大或是率。 上表各狀況或是率之和仍等於一。

若擲八銅元，則各狀況之或是率如下：

$$\frac{1}{256}+\frac{8}{256}+\frac{28}{256}+\frac{56}{256}+\frac{76}{256}+\frac{56}{256}+\frac{28}{256}+\frac{8}{256}+\frac{1}{256}$$

將橫線分為六等分及八等分，以縱線表或是率如 $\frac{1}{64}, \frac{6}{64}\cdots$ 等及 $\frac{1}{256}, \frac{8}{256}, \cdots$ 等，繪成曲線如圖二。 實曲線為示擲六銅元之狀況，虛曲線為擲八銅元之狀況，而此曲線極似以下所述差誤或是率曲線。