

中等职业学校教材

数 学

上册

第3版

中职数学教材编写组 编

6
08
1
97

机械工业出版社
China Machine Press



中等职业学校教材

数 学

上 册

第 3 版

中职数学教材编写组 编

本套教材主编 王长俊

副主编 杜吉颀 耿莹

本套教材主审 井瑞峰



机械工业出版社

本套教材是根据教育部 2000 年最新颁布的《中等职业学校数学教学大纲》的要求,在原第 2 版的基础上修订而成的。在编写过程中努力贯彻“加强基础、注重能力培养、突出应用、增加弹性、适度更新、兼顾体系”的原则,力求体现中职学校专业广、工种多的特点,使教材具有一定弹性,为加强应用,每章均列举了数学在生活实际、近代科学和生产中应用的例子,以培养学生用数学解决实际问题的意识和能力。本套教材共分二册,包括五个模块,上册的主要内容有:第一模块包括集合、不等式、逻辑用语、函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、数列等内容;第二模块包括向量、复数等内容。

图书在版编目(CIP)数据

数学 上册/中职数学教材编写组编. —北京:机械工业出版社, 2002.7

中等职业学校教材

ISBN 7-111-10030-1

I. 数… II. 中… III. 数学课-专业学校-教材
N. G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 046237 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:韩雪清 版式设计:冉晓华 责任校对:程俊巧

封面设计:姚毅 责任印制:闫焱

北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2002 年 8 月第 3 版·第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5·6.375 印张·247 千字

44 001—48 000 册

定价:16.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话 (010) 68993821、68326677-2527

封面无防伪标均为盗版

前 言

本教材是根据 2000 年教育部审定的《中等职业学校数学教学大纲》并参考普通高中数学教材的基本要求,在原机械工业出版社出版的数学教材的基础上编写的。

为适应中等职业学校的教学需要,本教材按照模块式编排。其中必学部分涉及四个模块:(一、函数;二、向量与复数;三、几何;四(1)、概率初步),选学部分涉及两个模块(四(2)、统计初步;五、微积分初步),分上、下两册出版。上册:函数、向量、复数;下册:几何、概率与统计初步、微积分初步。

在编写过程中,认真贯彻“加强基础,培养能力,突出应用,增加弹性,适度更新,兼顾体系”的原则,在教学内容、体例安排、教材结构及练习、习题和复习题的设置等方面,力求体现中等职业学校的实际需要,使教材适应面更为广泛。

本教材有以下特点:

1. 注重基础知识

根据新的大纲要求,对传统的初等数学内容进行精选,把在理论上、方法上以及在现代生产与生活 and 各类专业学习中得到广泛应用的基础知识作为必学内容,以保证必要的、基本的数学水准,同时适度更新,增加了逻辑用语、映射、向量等内容,并注意渗透现代的数学思想和方法。

2. 增强教材的使用弹性

本教材采用模块式结构编排,将教材内容分为必学、限定选学(标有※)和选学(标有※※),便于各类学校根据不同专业的不同要求灵活选用,增强了教材的弹性和适用性。

3. 深入浅出,易教易学

针对目前中职学生的数学基础和实际水平,在编写中力求做到降低知识起点,深入浅出、循序渐进、温故知新,并采用数形结合的方法,以图、表直观地讲解概念、定理,使教材易教易学。

4. 突出应用,注意培养学生应用数学的意识与能力

本教材采取分散与集中相结合的方式,编排了有价值的应用题。基本上,章设有应用一节,节设有应用题,引导学生运用所学的数学知识解决日常生活和生产中的简单实际问题。同时,尽量安排通过计算器计算各类数值的例题与习题培养和提高学生使用计算工具的能力。

参加本册编写的有：卢秀慧、岳文宇、李伟、周大娟。本册主编：卢秀慧；副主编：岳文宇；主审：曹成龙。

本册参编学校：渤海船舶职业学院、辽宁省城市建设学校、沈阳市机电工业学校、沈阳市纺织轻工工业学校、哈尔滨机电工程学校。

本书编写过程中，曾得到机械工业出版社的热情关怀和指导，各编、审同志所在学校对编审工作给予了大力支持和协助，在此一并致谢。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，敬请广大从事职业教育的教师和读者批评指正。

中职数学教材编写组

目 录

前言

第一章 集合、不等式与逻辑用语	1
第一节 集合	1
第二节 交集 并集 补集	6
第三节 区间 绝对值不等式的解法	9
第四节 一元二次不等式的解法	12
第五节 逻辑用语	16
复习题一	21
第二章 函数	24
第一节 函数的概念	24
第二节 函数的图象与性质	32
第三节 反函数	37
第四节 函数的应用	40
复习题二	43
第三章 指数函数 对数函数	46
第一节 分数指数	46
第二节 幂函数与指数函数	49
第三节 对数	54
第四节 对数函数	60
复习题三	64
第四章 任意角的三角函数	66
第一节 角的概念的推广 弧度制	66
第二节 任意角的三角函数	72
第三节 同角三角函数的基本关系式	77
第四节 正弦、余弦在单位圆上的表示 正弦、余弦的有界性和周期性	79
第五节 三角函数的简化公式	82
第六节 加法定理	86
第七节 二倍角的正弦、余弦和正切	91
复习题四	94

第五章 三角函数的图象和性质 解斜三角形	96
第一节 正弦函数的图象和性质	96
第二节 正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	99
第三节 余弦函数的图象和性质	105
第四节 正切函数的图象和性质	108
第五节 已知三角函数值求指定区间内的角	111
第六节 解斜三角形及其应用	115
复习题五	121
第六章 平面向量	124
第一节 平面向量的概念	124
第二节 向量的线性运算	127
第三节 平面向量的坐标表示	132
第四节 向量的数量积	138
复习题六	142
第七章 数列	145
第一节 数列的概念	145
第二节 等差数列	150
第三节 等比数列	155
复习题七	160
第八章 复数	163
第一节 复数的概念	163
第二节 复数的四则运算	169
第三节 复数的三角形式	175
复习题八	180
部分习题答案	182
参考文献	198

第一章 集合、不等式与逻辑用语

集合是现代数学中最基本的概念之一，它已被广泛地运用到数学的各个领域。不等式是数学的一个重要工具，有着广泛的应用。逻辑用语是数学中最常用的语言，是数学中说明问题和论证结论的主要工具。本章将介绍集合的一些初步知识，讨论不等式的解法，并学习一些常用的逻辑用语。

第一节 集 合

一、集合

在初中，我们已经遇到过“集合”一词。如：“正数的集合”，“负数的集合”等。在数学和日常生活中，也经常把某些指定的对象作为一个整体加以研究，例如：

- (1) 一个班里的全体学生；
- (2) 某图书馆的全部藏书；
- (3) 所有的直角三角形；
- (4) 与一个角的两边距离相等的所有点；
- (5) 不等式 $2x-1>3$ 的所有解；
- (6) 某工厂金工车间的所有机床。

它们分别是由一些人、书、图形、点、数和机床组成的。

一般地，我们把某些指定的对象组成的全体叫做集合。简称集。把组成集合的每一个对象叫做这个集合的元素。

例如，上面例子中的(1)是由这个班全体学生组成的集合，班里的每个学生都是这个集合的元素；(5)是由不等式 $2x-1>3$ 的所有解组成的集合，任何一个大于2的实数都是这个集合的元素。

通常用大写字母 A 、 B 、 C 、…来表示集合，用小写字母 a 、 b 、 c 、…来表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，就说“ a 属于集合 A ”，记作 $a \in A$ ；如果 a 不是集合 A 的元素，就说“ a 不属于集合 A ”，记作 $a \notin A$ (或 $a \bar{\in} A$)。

由数组成的集合叫做数集。

下面是一些常用的数集及其记号。

全体非负整数的集合叫做自然数集，用 N 表示；

自然数集内排除0的集合叫做正整数集，用 N_+ (或 N^*) 表示；

全体整数的集合叫做整数集，用 $\mathbf{Z}$ 表示；

全体有理数的集合叫做有理数集，用 $\mathbf{Q}$ 表示；

全体实数的集合叫做实数集，用 $\mathbf{R}$ 表示。

为了方便起见，有时我们还用 $\mathbf{Q}_+$ 表示正有理数集，用 $\mathbf{R}_-$ 表示负实数集，等等。

集合中的元素必须是确定的。这就是说，给定一个集合，任何一个对象是不是这个集合的元素也就确定了，不能模棱两可。例如，给出自然数集 $\mathbf{N}$ ，可以断定 $2 \in \mathbf{N}$ ， $10 \in \mathbf{N}$ ，而 $\sqrt{2} \notin \mathbf{N}$ ， $\frac{1}{3} \notin \mathbf{N}$ 。

集合中的元素又是互异的，即集合中的元素是不能重复出现的，任何两个相同的元素在同一个集合中时，只能算作一个元素。

集合中的元素是没有顺序的。例如，由三个数字 4, 5, 6 组成的集合和由 5, 6, 4 组成的集合是同一个集合。

含有有限个元素的集合叫做有限集合。上面 (1)、(2)、(6) 这三个集合都是有限集合；含有无限个元素的集合叫做无限集合。上面集合 (3)、(4)、(5) 都是无限集合。

二、集合的表示法

1. 列举法

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号 $\{ \}$ 内，这种表示集合的方法叫做列举法。

例如，由方程 $x^2 - 1 = 0$ 的所有解组成的集合（简称解集），可以表示为 $\{-1, 1\}$ 。又如，地球上的四大洋组成的集合可以表示为 $\{\text{太平洋}, \text{大西洋}, \text{印度洋}, \text{北冰洋}\}$ 。

2. 描述法

把集合中元素的共同性质描述出来，写在大括号 $\{ \}$ 内，这种表示集合的方法叫做描述法。

通常在大括号内先写出这个集合中元素的一般形式，再画一条竖线，在竖线右边写出集合中元素所具有的共同性质。

例如，方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的解集，可以表示为

$$\{x | x^2 - 3x - 4 = 0\}$$

由所有 2 的正整倍数所组成的集合，可以表示为

$$\{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}_+\}$$

有些集合用描述法表示时，可以省去竖线和它的左边部分。例如，由所有直角三角形所组成的集合，可以表示为

$$\{\text{直角三角形}\}$$

以上所述列举法和描述法是集合的两种不同表示方法，实际运用时究竟选用哪种表示法，要看具体问题而定。

例 1 用列举法或描述法表示下列集合：

- (1) 大于 4 而小于 17 的偶数；
- (2) 某校的所有电脑；
- (3) 一次函数 $y=3x-1$ 图象上所有的点。

解 (1) 用列举法表示为 $\{6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ ；用描述法表示为 $\{x|x=2n, 2<n\leq 8, n\in\mathbb{N}\}$ ，或 $\{\text{大于 4 而小于 17 的偶数}\}$ 。

(2) 用描述法表示为 $\{\text{某校的所有电脑}\}$ 。

(3) 用描述法表示为 $\{(x, y) | y=3x-1\}$ 或 $\{\text{一次函数 } y=3x-1 \text{ 图象上的点}\}$ 。

只含有一个元素的集合，叫做单元素集合，简称单元素集。例如， $\{a\}$ 是单元素集。

不含任何元素的集合叫做空集合，简称空集，记作 $\emptyset$ 。

应当注意： a 与 $\{a\}$ 不同。 a 表示一个元素， $\{a\}$ 表示由一个元素 a 组成的集合。

空集 $\emptyset$ 与集合 $\{0\}$ 不同。 $\emptyset$ 指的是不含任何元素的集合， $\{0\}$ 是由一个元素 0 组成的单元素集。

为了形象地表示集合，我们常常画一条封闭的曲线，用它的内部来表示一个集合。

例如，图 1-1 表示任意一个集合 A ；图 1-2 表示集合 $\{6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ 。

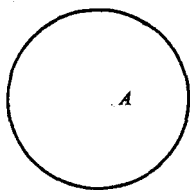


图 1-1

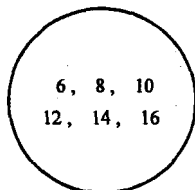


图 1-2

三、子集、真子集、集合的相等

1. 子集

观察集合 $A = \{0, 2, 3\}$ 与集合 $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 。容易发现，集合 A 中的每一个元素都是集合 B 的元素。对于两个集合间的这种关系，给出下面定义。

定义 对于两个集合 A 和 B ，如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集。记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ ，读作“ A 包含于 B ”或

“B 包含 A”。

集合 A 包含于 B 可用图 1-3 来表示。

例如, $\{0, 2, 3\} \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $\mathbf{Z} \supseteq \mathbf{N}$; $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$ 。

若 A 不包含于 B, 记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$ 。如若 $A = \{0, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 5, 6\}$, 则 $A \not\subseteq B$ 。

对于一个非空集合 A, 因为它的任何一个元素都是集合 A 的元素, 所以 $A \subseteq A$ 。也就是说, 任何一个集合是它本身的子集。

此外, 我们规定: 空集是任何集合 A 的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$ 。

2. 真子集

定义 如果集合 A 是集合 B 的子集, 且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A, 那么集合 A 叫做集合 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$ 。

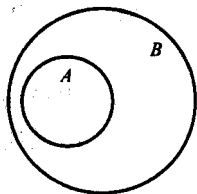


图 1-3

例如, $\{0, 2, 3\} \subsetneq \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z}$ 。

显然, 空集是任何非空集合的真子集。

例 2 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集与真子集。

解 集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集是: $\emptyset$ 、 $\{a\}$ 、 $\{b\}$ 、 $\{c\}$ 、 $\{a, b\}$ 、 $\{a, c\}$ 、 $\{b, c\}$ 、 $\{a, b, c\}$ 。除 $\{a, b, c\}$ 外, 其余都是真子集。

例 3 讨论集合 $\{x|x-2=0\}$ 与 $\{x|x^2+x-6=0\}$ 的关系。

解 设集合 $A = \{x|x-2=0\}$, 集合 $B = \{x|x^2+x-6=0\}$, 方程 $x-2=0$ 的解为 $x=2$, 即 $A = \{2\}$; 方程 $x^2+x-6=0$ 的解为 $x_1=-3$, $x_2=2$, 即 $B = \{-3, 2\}$, 所以 A 是 B 的真子集, 即 $A \subsetneq B$ 。

3. 集合的相等

已知集合 $A = \{x|(x+1)(x+2)=0\}$, $B = \{-1, -2\}$ 。它们的元素完全相同, 只是表示方法不同。

定义 如果两个集合 A 与 B 的元素完全相同, 那么我们就说这两个集合相等, 记作 $A=B$ 。

例 4 指出以下两个集合之间的关系:

(1) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 5\}$;

(2) $C = \{x|x^2=1\}$, $D = \{-1, 1\}$;

(3) $P = \{\text{偶数}\}$, $Q = \{\text{整数}\}$ 。

解 (1) $B \subsetneq A$ (2) $C=D$ (3) $P \subsetneq Q$

练习

1. 写出下列集合中的所有元素:

(1) $\{x|x \text{ 大于 } 3 \text{ 小于 } 11 \text{ 的偶数}\}$;

- (2) {中国的直辖市};
 (3) {联合国安理会的常任理事国};
 (4) {一年中有 31 天的月份}。

2. 设 $A = \{x | x \text{ 为一位正奇数}\}$, 在下列各题中指出哪个是空集, 哪个是单元素集:

- (1) $B = \{x | x \in A, x > 9\}$;
 (2) $C = \{x | x \in A, x \text{ 是除以 3 余 2 的整数}\}$ 。

3. 用符号 $\in$ 、 $\notin$ 、 $=$ 、 $\neq$ 、 $\subseteq$ 填空:

- (1) $1 \in \mathbf{N}$; (2) $0 \in \mathbf{Z}$;
 (3) $-2 \in \mathbf{Q}$; (4) $\frac{3}{4} \in \mathbf{Q}$;
 (5) $\pi \notin \mathbf{Q}$; (6) $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$;
 (7) $\{1, 2\} \subseteq \{2, 1\}$; (8) $\{3, 5\} \subseteq \{1, 3, 5\}$;
 (9) $\{2, 4, 6, 8\} \supseteq \{2, 8\}$; (10) $\emptyset \subseteq \{1, 2, 3\}$ 。

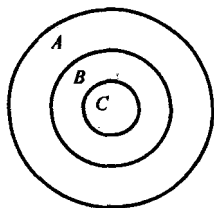


图 1-4

4. 图 1-4 中 A、B、C 表示集合, 说明它们之间的关系。

习 题 1-1

1. 写出下列集合中的所有元素:

- (1) 一年的四个季节的集合;
 (2) 自然数中小于 20 的质数的集合;
 (3) 我国古代四大发明的集合;
 (4) 方程 $x^2 - 11x + 28 = 0$ 的解的集合;
 (5) 太阳系的九大行星的集合。

2. 用列举法或描述法表示下列集合:

- (1) 大于 0 的偶数;
 (2) 方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的解;
 (3) 直线 $y = kx + b$ 上所有的点;
 (4) 所有的矩形;
 (5) 组成中国国旗图案的颜色;
 (6) 世界上最高的山峰。

3. 用适当的符号 $\in$ 、 $\notin$ 、 $=$ 、 $\neq$ 填空:

- (1) $0 \in \mathbf{N}$, $-3 \notin \mathbf{Q}$, $\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$, $\sqrt{3} \notin \mathbf{R}$;
 (2) $a \in \{a, b\}$, $a \notin \{b, c, d\}$, $(2, 4) \in \{(2, 4)\}$;
 (3) $\emptyset \subseteq \{a\}$, $a \in \{a\}$, $\mathbf{Q}_+ \subseteq \mathbf{R}_+$;
 (4) $\{1, 2\} \subseteq \{0, 1, 2\}$, $\{a, b, c\} \subseteq \{c, a, b\}$ 。

4. 写出集合 $\{1, 3, 5\}$ 的所有子集。

5. 把下列集合用另一种方法表示出来:

- (1) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$;
 (2) {目前世界乒乓球锦标赛的七个比赛项目}。

6. 设 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 4, 6\}$, 写出由 A 和 B 所有元素组成的集合 C 。

7. 设 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$, 写出由 A 和 B 的公共元素组成的集合 C 。

第二节 交集 并集 补集

一、交集

设集合 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 容易看出, 集合 $\{3, 6\}$ 是由属于 A 且属于 B 的所有元素 (即 A 、 B 的公共元素) 组成的, 对于这样的集合给出下面定义。

定义 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 读作“ A 交 B ”, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

集合 A 与 B 的交集 $A \cap B$ 可用图 1-5 中的阴影部分表示。

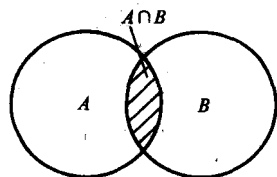


图 1-5

例 1 设 $A = \{2, 5, 7, 8\}$, $B = \{5, 6, 8, 10\}$, 求 $A \cap B$ 。

解 $A \cap B = \{2, 5, 7, 8\} \cap \{5, 6, 8, 10\} = \{5, 8\}$

例 2 设 $A = \{(x, y) | 2x + y = 5\}$, $B = \{(x, y) | x + 2y = 7\}$ 。

求 $A \cap B$ 。

解 $A \cap B = \{(x, y) | 2x + y = 5\} \cap \{(x, y) | x + 2y = 7\}$
 $= \{(x, y) | 2x + y = 5 \text{ 且 } x + 2y = 7\}$
 $= \{(1, 3)\}$

例 3 设 $A = \{\text{等腰三角形}\}$, $B = \{\text{直角三角形}\}$, 求 $A \cap B$ 。

解 $A \cap B = \{\text{等腰三角形}\} \cap \{\text{直角三角形}\}$
 $= \{\text{等腰直角三角形}\}$

例 4 设 $A = \{\text{奇数}\}$, $B = \{\text{偶数}\}$, $Z = \{\text{整数}\}$, 求 $A \cap Z$, $B \cap Z$, $A \cap B$ 。

解 $A \cap Z = \{\text{奇数}\} \cap \{\text{整数}\} = \{\text{奇数}\} = A$
 $B \cap Z = \{\text{偶数}\} \cap \{\text{整数}\} = \{\text{偶数}\} = B$
 $A \cap B = \{\text{奇数}\} \cap \{\text{偶数}\} = \emptyset$

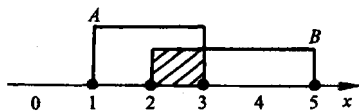


图 1-6

例 5 设 $A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | 2 \leq x \leq 5\}$, 求 $A \cap B$ 。

解 $A \cap B = \{x | 1 \leq x \leq 3\} \cap \{x | 2 \leq x \leq 5\} = \{x | 2 \leq x \leq 3\}$ 如图 1-6 所示。

对于任何集合 A 、 B , 显然下式成立:

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cap A = A \quad A \cap B = B \cap A$$

二、并集

设集合 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 容易看出, 集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 是由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的, 对于这样的集合给出下面定义。

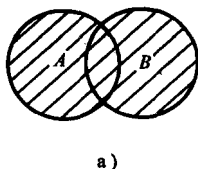
定义 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 读作“ A 并 B ”, 即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。

集合 A 与 B 的并集 $A \cup B$ 可用图 1-7a、b 的阴影部分表示。

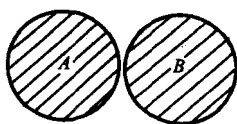
由并集的定义和图 1-7 可以看出, 集合 A 、 B 都是它们并集的子集, 即 $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$ 。

对于任意一个集合 A , 显然有

$$A \cup \emptyset = A \quad A \cup A = A \quad A \cup B = B \cup A$$



a)



b)

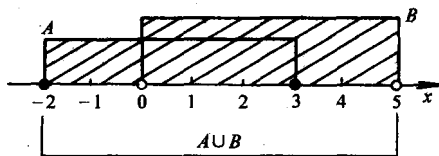


图 1-7

图 1-8

例 6 设 $A = \{2, 4\}$, $B = \{-2, 0, 2\}$, 求 $A \cup B$ 。

解 $A \cup B = \{2, 4\} \cup \{-2, 0, 2\} = \{-2, 0, 2, 4\}$

例 7 如图 1-8 所示, 设 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | 0 < x < 5\}$, 求 $A \cup B$ 。

解 $A \cup B = \{x | -2 \leq x \leq 3\} \cup \{x | 0 < x < 5\}$
 $= \{x | -2 \leq x < 5\}$

例 8 设 $A = \{\text{锐角三角形}\}$, $B = \{\text{钝角三角形}\}$, 求 $A \cup B$ 。

解 $A \cup B = \{\text{锐角三角形}\} \cup \{\text{钝角三角形}\}$
 $= \{\text{斜三角形}\}$

例 9 设 $A = \{x | -3 < x < -1\}$, $B = \{x | x \geq -1\}$, 求 $A \cup B$, $A \cap B$ 。

解 $A \cup B = \{x | -3 < x < -1\} \cup \{x | x \geq -1\}$
 $= \{x | x > -3\}$
 $A \cap B = \{x | -3 < x < -1\} \cap \{x | x \geq -1\}$
 $= \emptyset$

三、全集与补集

设集合 I 是全班同学的集合, 集合 A 是班上所有参加校运动会的同学的集合, 而集合 B 是班上所有没参加校运动会的同学的集合, 那么这三个集合有什么关系呢? 容易看出, 集合 B 就是集合 I 中所有不属于 A 的元素所组成的集合。

定义 设 I 是一个集合, A 是 I 的一个子集 (即 $A \subseteq I$), 由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做集合 A 在 I 中的补集, 记作 $\complement_I A$ 。通常 I 可省去, 简记为

$\complement A$, 读作“A补”, 即

$$\complement A = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$$

集合 A 在 I 中的补集 $\complement A$ 可用图 1-9 的阴影部分表示出来。图中的矩形内部表示全集 I , 圆内部分表示集合 A 。

补集是对全集而言的, 即使是同一个集合 A , 由于所取的全集不同, 它的补集也是不同的。

例如, 设 $I = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $A = \{0, 2, 4\}$, 则 $\complement A = \{6, 8, 10\}$; 若 $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{0, 2, 4\}$, 则 $\complement A = \{1, 3, 5\}$ 。

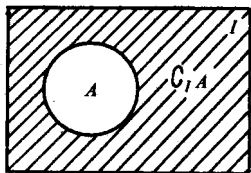


图 1-9

例 10 设 $I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A = \{1, 5, 7\}$, $B = \{1, 7, 9\}$, 求 (1) $(\complement A) \cap (\complement B)$; (2) $(\complement A) \cup (\complement B)$; (3) $\complement(A \cup B)$ 。

解 (1) 因为 $\complement A = \{3, 9\}$, $\complement B = \{3, 5\}$, 所以 $(\complement A) \cap (\complement B) = \{3, 9\} \cap \{3, 5\} = \{3\}$;

(2) $(\complement A) \cup (\complement B) = \{3, 9\} \cup \{3, 5\} = \{3, 5, 9\}$;

(3) 因为 $A \cup B = \{1, 5, 7\} \cup \{1, 7, 9\} = \{1, 5, 7, 9\}$, 所以 $\complement(A \cup B) = \{3\}$ 。

例 11 设 $I = \{\text{三角形}\}$, $\complement A = \{\text{锐角三角形和直角三角形}\}$, 求 A 。

解 $A = \{\text{钝角三角形}\}$

练 习

1. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$ 。
2. 设 $A = \{\text{矩形}\}$, $B = \{\text{菱形}\}$, 求 $A \cap B$ 。
3. 设 $A = \{x | -2 < x < 0\}$, $B = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$, 求 $A \cup B$ 。
4. 图 1-10 中 I 是全集, A 、 B 是 I 的两个子集, 用阴影表示
(1) $(\complement A) \cup (\complement B)$ (2) $(\complement A) \cap (\complement B)$

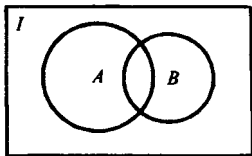


图 1-10

5. 设 $I = \{\text{不大于 10 的自然数}\}$, $A = \{1, 2, 4, 5, 9\}$, 求 $\complement A$ 。

习 题 1-2

1. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$ 。
2. 设 $A = \{(x, y) | 3x + 2y = 1\}$, $B = \{(x, y) | x - y = 2\}$, 求 $A \cap B$ 。
3. 学校开运动会, 设 $A = \{\text{参加百米赛跑的同学}\}$, $B = \{\text{参加跳高比赛的同学}\}$, 求 $A \cap B$ 。

4. 设 $A = \{x | -2 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 < x \leq 2\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, 并在数轴上表示出来。

5. 某商店进了两批货。第一批货品种的集合 $A = \{\text{彩电, 冰箱, 微波炉, 热水器}\}$, 第二批货品种的集合 $B = \{\text{彩电, 冰箱, 空调, 电风扇}\}$ 。求两批货中相同品种的集合 C 及所有品种的集合 D 。

6. 设 S_1 表示某校全体学生的集合, S_2 表示该校全体男生的集合, S_3 表示该校全体女生的集合, S_4 表示该校全体教工的集合。

(1) S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 中, 哪两个集合的交集是非空集合?

(2) 求 $S_2 \cup S_3$;

(3) 求 $S_1 \cup S_4$;

(4) S_2 、 S_3 、 S_4 中, 哪些集合是 S_1 的真子集?

7. 设 $I = \{\text{小于 9 的正整数}\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement A$, $\complement B$ 。

8. 设 $I = \mathbf{R}$, $A = \{x | -3 < x < 2\}$, $B = \{x | -1 < x < 5\}$, 求 $(\complement A) \cap B$, $(\complement A) \cap (\complement B)$ 。

第三节 区间 绝对值不等式的解法

一、区间

设 a 、 b 是两个实数, 且 $a < b$ 。我们规定:

(1) 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间, 记作 $[a, b]$ 。

(2) 满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫做开区间, 记作 (a, b) 。

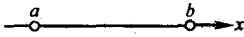
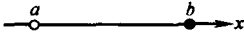
(3) 满足不等式 $a < x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做左开区间, 记作 $(a, b]$ 。

(4) 满足不等式 $a \leq x < b$ 的实数 x 的集合叫做右开区间, 记作 $[a, b)$ 。

左开区间与右开区间统称为半开区间, 这里的实数 a 与 b 叫做相应区间的端点。称区间 $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ 、 $(a, b]$ 为有限区间。

在数轴上, 这些区间都可以用一条以 a 和 b 为端点的线段来表示(如表 1-1 所示)。在表中, 用实心点表示端点包括在区间内, 用空心点表示端点不包括在区间内。

表 1-1

定 义	名 称	符 号	数 轴 表 示
$\{x a \leq x \leq b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x a < x < b\}$	开区间	(a, b)	
$\{x a \leq x < b\}$	右开区间	$[a, b)$	
$\{x a < x \leq b\}$	左开区间	$(a, b]$	

实数集 $\mathbf{R}$ 也可用区间 $(-\infty, +\infty)$ 表示, 符号 “ ∞ ” 读作 “无穷大”, 其中 “ $-\infty$ ” 读作 “负无穷大”, “ $+\infty$ ” 读作 “正无穷大”。它们不是数, 仅是记号。

我们还可以把满足 $x \geq a, x > a, x \leq b, x < b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, b)$, 称这些区间为无限区间。

例 1 用区间表示下列集合:

(1) $\{x | -1 \leq x \leq 6\}$; (2) $\{x | x \geq 5\}$; (3) $\{x | 1 < x < 2\}$; (4) $\{x | x \in \mathbf{R}, x \neq 1, x \neq 2\}$ 。

解 各集合用区间表示为 (1): $[-1, 6]$; (2) $[5, +\infty)$; (3) $(1, 2)$; (4) $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$ 。

二、绝对值不等式的解法

1. $|x| < a, |x| > a (a > 0)$ 型不等式

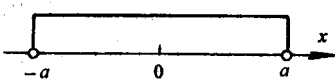
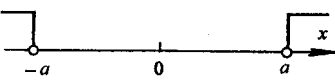
我们知道, 在实数集 $\mathbf{R}$ 中, 有

$$|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

例如 $|3| = 3, |0| = 0, |-3| = -(-3) = 3$ 。

$|x| < a, |x| > a (a > 0)$ 是最简单的绝对值不等式。依据绝对值的定义可知, $|x|$ 是数轴上表示 x 的点到原点的距离。因此, 从数轴上看, $|x| < a$ 的解集就是与原点的距离小于 a 的点的集合; $|x| > a$ 的解集就是与原点的距离大于 a 的点的集合。见表 1-2。

表 1-2

绝对值不等式	解集	数轴表示
$ x < a (a > 0)$	$\{x -a < x < a\}$	
$ x > a (a > 0)$	$\{x x < -a \text{ 或 } x > a\}$	

例 2 解不等式 $|x| < 3$ 。

解 这个不等式可归结为表 1-2 中的 $|x| < a$ 型。由原不等式可得: $-3 < x < 3$, 解集为 $\{x | -3 < x < 3\}$, 如图 1-11 所示。

例 3 解不等式 $|x| > 5$ 。

解 这个不等式可归结为上表中的 $|x| > a$ 型。由原不等式可得 $x < -5$ 或 $x > 5$, 解集为

$$\{x | x < -5 \text{ 或 } x > 5\} = \{x | x < -5\} \cup \{x | x > 5\}$$

见图 1-12。