高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

Spark® 星火

数学分析

同步辅导及习题精解

（下册 华东师大·第三版）

张天德 韩振来 主编

联系考研，渗透精讲历年考研真题

- 知识图表 清晰梳理考点重点难点
- 典型例题 深入讲解思路方法技巧
- 习题答案 权威提供详尽准确解析
- 同步自测 快速升华应用应试能力

天津科学技术出版社

全新修订 强势出击

高等院校教材同步辅导及考研复习用书系列

- 高等数学辅导（配同济六版）
- 高等数学同步辅导（配同济五版）
- 高等数学习题详解（配同济六版）
- 高等数学习题详解（配同济五版）
- 高等数学辅导及习题精解（上、下册）（配同济六版）
- 高等数学辅导及习题精解（上、下册）（配同济五版）
- 微积分辅导及习题精解（配人大三版）
- 微积分辅导及习题精解（配人大修订本）
- 线性代数辅导及习题精解（配人大三版）
- 线性代数辅导及习题精解（配同济五版）
- 线性代数辅导及习题精解（配同济四版）
- 概率论与数理统计辅导及习题精解（配浙大三版）
- 概率论与数理统计辅导及习题精解（配浙大四版）
- 概率论与数理统计辅导及习题精解（配人大修订本）
- 数学分析同步辅导及习题精解（上、下册）（配华师大三版）
- 西方经济学同步辅导及习题精解（微观部分）（配人大四版）
- 西方经济学同步辅导及习题精解（宏观部分）（配人大四版）

责任编辑 刘丽燕
封面设计 星火视觉设计中心

ISBN 978-7-5308-5193-7
9 787530 851937 >
定价:39.60元（全套两册）
MZ902

Spark® 星火

数学分析

同步辅导及习题精解

（下册 华东师大·第三版）

主　编　张天德　韩振来
副主编　徐化忠　孙凤庆

天津科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析同步辅导及习题精解．下册/张天德，韩振来主编．—天津：天津科学技术出版社，2009.6
ISBN 978-7-5308-5193-7

Ⅰ．数…　Ⅱ．①张…②韩…　Ⅲ．数学分析—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．017

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第114655号

责任编辑：刘丽燕
责任印制：白彦生

天津科学技术出版社出版
出版人：胡振泰
天津市西康路35号　邮编300051
电话(022)23332398(事业部)　23332697(发行)
网址：www.tjkjcbs.com.cn
新华书店经销
莱州市电光印刷有限公司印刷

开本787×960　1/16　印张40　字数830 000
2009年7月第1版第1次印刷
定价：39.60元(全套两册)

前 言

《数学分析》是数学专业最重要的一门基础课，也是报考数学类专业硕士研究生的专业考试科目。华东师范大学数学系主编的《数学分析》是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材，被全国许多院校采用，也是许多学校硕士研究生入学考试的指定教材。华东师范大学数学系主编的《数学分析》（第三版）保持了其一贯的体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点，并根据近代数学发展的潮流，做了相应的调整。该教材保持了原来的优点、特色，进一步强调提高学生的综合素质并激发学生的创新能力。为帮助、指导广大读者学好这门课程，我们编写了这本与华东师范大学数学系主编的《数学分析》（第三版）配套的《数学分析同步辅导及习题精解》，以帮助加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，进而提高学习能力和数学思维水平。

本书共分二十三章，其中上册十一章，下册十二章。章节的划分与教材一致。每章包括五大部分内容：

一、知识结构及内容小结：先用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系，以便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容；然后用表格形式简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行了系统的梳理，并指出理解与应用基本概念、定理、公式时需注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点。

二、经典例题解析：精选部分反映各章基本知识点和基本方法的典型例题——其中部分例题选自历年考研真题，给出了详细解答，以提高读者的综合解题能力。

三、历年考研真题评析：节选全国众多知名高校的研究生入学考试真题，做了精心深入的解答。

四、教材习题全解：对教材里该章节全部习题作详细解答，与市面上习题答案不全的某些参考书有很大的不同。在解题过程中，对部分有代表性的习题，设置了“思路探索”以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；安排有“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。有的习题还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维能力。

五、同步自测题及参考答案：精选有代表性、测试价值高的题目（有些题目选自历年考研真题），以检测学习效果，提高应试水平。

全书内容编写系统、新颖、清晰、独到，充分体现了如下三大特色。

一、知识梳理清晰、简洁：直观、形象的图表总结，精炼、准确的考点提炼，权威、独到的方法归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和数学思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、互动：所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出丰富的精选例题、考研例题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、浑然一体，一举完成。

三、联系考研密切、实用：本书既是一本教材同步辅导，也是一本考研复习用书，书中处处联系考研：例题中有考研试题，同步自测中也有考研试题，更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等，为的就是让同学们同步完成考研备考，达到考研要求的水平。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限，书中疏漏与不妥之处，在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

目录

第十二章 数项级数

本章知识结构及内容小结

【本章知识结构】

- 数项级数
  - 级数的收敛性
    - 定义
    - 性质
    - 柯西准则
  - 正项级数
    - 充要条件
    - 比较原则
    - 比式判别法
    - 根式判别法
    - 积分判别法
    - 拉贝判别法
  - 一般项级数
    - 交错级数收敛判别法
    - 绝对收敛级数
      - 绝对收敛
      - 条件收敛
      - 性　　质
    - 阿贝尔判别法
    - 狄利克雷判别法

【知识要点与考点】

1. 数项级数的基本概念

名　称	定　义	说　明
定　义	给定一个数列$\{u_n\}$，把它的各项依次用“+”号连接起来的表达式：$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 称为数项级数或无穷级数(简称级数)，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$	1° 研究级数的首要问题，是判断级数的敛散性. 级数敛散性定义是研究级数的基础. 2° 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则对任意的常数$a$与$b$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(au_n+bv_n)$也收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(au_n+bv_n)=a\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n+b\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 3° 去掉、增加或改变级数的有限项并不改变级数的敛散性. 4° 在收敛级数的项中任意加括号，不改变级数的收敛性，也不改变它的和.
部分和	级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的前$n$项之和，记为$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$称为级数的前$n$项部分和，简称部分和.	
收敛与发散	若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{S_n\}$收敛于$S$，即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则称级数收敛，并称$S$为该级数的和，记为$S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，称$R_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$为该级数的余项和. 否则，称该级数发散.	
绝对收敛	若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert u_n\rvert$收敛，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛.	
条件收敛	若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert u_n\rvert$发散，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛.	

2. 一般项级数敛散性判别法

名　称	定　义	说　明
柯西准则	级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充要条件是：$\forall\varepsilon>0,\exists N$，当$m>N$时，$\forall$ 自然数p，都有 $\lvert u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\rvert<\varepsilon.$	
级数收敛的必要条件	若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.	常用其判别级数发散.
绝对收敛性	若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert u_n\rvert$收敛，则数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$一定收敛.	

名称	定义	说明
阿贝尔判别法	若$\{a_n\}$为单调有界数列，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$一定收敛.	阿贝尔判别法实质上是狄利克雷判别法的特例.
狄利克雷判别法	若$\{a_n\}$为单调趋于零，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$的部分和有界，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$一定收敛.	

3. 正项级数敛散性判别法

名称	内容
充要条件	正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列有界.
比较判别法	设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$是两个正项级数，且$u_n\leqslant v_n$. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散.
比式判别法	若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$，则当$q<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$q>1$或$q=+\infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.
根式判别法	若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，则当$l<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$l>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.
积分判别法	设$f(x)$为$[1,+\infty)$上非负递减函数，则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$与无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$同时收敛或同时发散.
拉贝判别法	设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)=r$，则当$r>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$r<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

4. 交错级数的莱布尼茨判别法

名称	内容
莱布尼茨判别法	设$u_n>0$，且$\{u_n\}$单调递减趋于零，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$收敛.

5. 重点、难点与考点

重点	正项级数敛散性判别
难点	任意项级数敛散性判别
难点	综合运用级数的概念、性质和有关判别方法，判断级数的敛散性

经典例题解析

基本题型Ⅰ:用定义判断级数敛散性并求和

例1 (华中科技大学)设 $x_0=0,x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n\geqslant 1),\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$,求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x_n+x_{n-1})$ 的和.

【思路探索】 按常规思路求 S_n,会涉及通项 $u_n=a_n(x_n+x_{n-1})$ 拆项,由条件 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,明显可得 $a_n=x_n-x_{n-1}$.

解:因为 $x_0=0,x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n\geqslant 1)$,所以 $a_n=x_n-x_{n-1}$.

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x_n+x_{n-1})$ 的部分和

$$\begin{aligned}S_n&=a_1(x_1+x_0)+a_2(x_2+x_1)+\cdots+a_n(x_n+x_{n-1})\\&=(x_1-x_0)(x_1+x_0)+(x_2-x_1)(x_2+x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})(x_n+x_{n-1})\\&=x_1^2-x_0^2+x_2^2-x_1^2+\cdots+x_n^2-x_{n-1}^2\\&=x_n^2-x_0^2,\end{aligned}$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=b^2-x_0^2=b^2$.

【方法点击】 凡是要求级数和的问题,都可采用定义的方法,只需说明部分和数列 S_n 有极限,并求出即可.一般采用"拆项法",求出 S_n 的极限.定义法常用于求级数的和.

例2 (重庆大学、浙江师范大学)设 $0<a<1$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a+2a^2+3a^2+\cdots+na^n)$.

【思路探索】 若按常规思路求 S_n,会涉及通项 $u_n=na^n$ 拆项问题.直接拆项不容易找到解题思路.考虑到奇数项与偶数项特点,不妨先令 $S_n=a+2a^2+\cdots+na^n$,而 $aS_n=a^2+2a^3+\cdots+na^{n+1}$,两式相减可得 $(1-a)S_n=a+a^2+\cdots+a^n-na^{n+1}$,于是 $S_n=\dfrac{a(1-a^n)}{(1-a)^2}-\dfrac{na^{n+1}}{1-a}$.这样就可以求极限了.

解:令 $S_n=a+2a^2+\cdots+na^n$,$\therefore aS_n=a^2+2a^3+\cdots+na^{n+1}$,$\therefore(1-a)S_n=\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}-na^{n+1}$,

由于 $0<a<1,\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{(1-a)^2}$.

基本题型Ⅱ:用级数的性质判断级数的敛散性

例3 (上海大学)判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n+1}\right)$ 的敛散性.

【思路探索】 通项 $u_n=\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n+1}>\dfrac{1}{2n}$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.通过正项级数的比较判别法可以得出该级数发散.

解：因为 $\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n+1}>\frac{1}{2n}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. 由正项级数比较判别法得，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n+1}\right)$ 发散.

基本题型 Ⅲ：用柯西准则判断级数敛散性

例 4 （上海交通大学）设 $\{na_n\}$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证明：因为 $\{na_n\}$ 收敛，所以对任意的 ε，存在 N，当 $m、n>N$，不妨设 $m>n$，有 $|ma_m-na_n|<\varepsilon$.

又因为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，对上述的 ε，有

$$\begin{aligned}|S_m-S_n| &= |(n+1)a_{n+1}-(n+1)a_n+(n+2)a_{n+2}-(n+2)a_{n+1}+\cdots+ma_m-ma_{m-1}|\\ &=|-na_n-(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{m-1})+ma_m|\\ &\geqslant-|ma_m-na_n|+|a_n+\cdots+a_{m-1}|\end{aligned}$$

所以 $$|a_n+\cdots+a_{m-1}|\leqslant|S_n-S_m|+|ma_m-na_n|<2\varepsilon,$$

从而由 Cauchy 收敛准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

基本题型 Ⅳ：正项级数比较判别法

例 5 （西南师范大学、河北大学）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，证明：

(1) 若存在正数 α 及正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，有 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant1+\alpha$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 若存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，有 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明：(1) 当 $n\geqslant N$ 时，由 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant1+\alpha$ 知，$0<a_n\leqslant\frac{1}{n^{1+\alpha}}$. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛，故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 当 $n\geqslant N$ 时，由 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant1$ 知，$a_n\geqslant\frac{1}{n}$. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

【方法点击】 使用正项级数判别法，关键在于找到比较的对象级数.

例 6 （武汉理工大学）讨论正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+2)}{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}(a>0)$ 的敛散性.

解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\ln(n+2)}{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{\ln(n+2)}}{a+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{a}$，所以当 $a>1$ 时收敛，当 $0<a<1$ 时发散；当 $a=1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+2)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=+\infty$，故发散.

例 7 （东南大学）证明：$\sum\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]$ 收敛.

证明：因为 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，所以

$$\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})},$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{2},$$

而$\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故$\sum\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]$收敛.

基本题型 Ⅴ：利用级数的性质证明数列极限

例 8　试证数列 $x_n=\frac{11\cdot 12\cdot 13\cdots(n+10)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}(n=1,2,3,\cdots)$ 有极限，并求此极限.

证明：当 $n\geqslant 6$ 时，可证$\frac{n+10}{3n-1}<1$，故$\{x_n\}$当 $n\geqslant 6$ 时为单调减小，且有下界 0，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，

再考虑正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+11}{3n+2}=\frac{1}{3}<1$，由此可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，故

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

基本题型 Ⅵ：判别级数条件收敛

例 9　（东南大学）证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)$ 条件收敛.

【思路探索】　验证级数条件收敛的条件.

证明：因为$\sqrt[n]{n}-1>0$，故该级数为交错级数. 令 $y=x^{\frac{1}{x}}$，$y'=\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1-\ln x)$，故当 $x>\mathrm{e}$ 时，y 单调递减，所以当 $n>3$ 时，$\{\sqrt[n]{n}-1\}$ 单调递减，且$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$，由 Leibniz 判别法知

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)$ 收敛. 但是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)}{-\frac{1}{x^2}}=+\infty,$$

而$\sum\frac{1}{n}$发散，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$ 发散，所以该级数条件收敛.

基本题型 Ⅶ：判别级数绝对收敛

例 10　（华东师范大学）证明：若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 亦必绝对收敛.

【思路探索】　验证级数绝对收敛的条件.

证明：记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，所以存在 $M>0$ 使得

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|<M,n>0,$$

从而

$$|a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)|\leqslant M|a_n|,n>0,$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，故由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 亦必绝对收敛.

历年考研真题评析

1.（华东师范大学）设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

解：记级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$的前$n$项和$S_n$. 则

$$S_n=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})=a_1+a_2+\cdots+a_n-na_{n+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-(n+1)a_{n+1}.$$

对上式两边取极限，从而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k-(n+1)a_{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

2.（云南大学）设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}$仍收敛. 其中$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k=r_n$.

【思路探索】 考虑前n项部分和，并注意分母有理化.

证明：令$b_n=\dfrac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}$，则$b_n=\dfrac{a_n(\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n})}{r_{n-1}-r_n}=\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}$.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k})=\sqrt{r_0}-\sqrt{r_n},$$

对上式两边取极限得

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{r_0}-\sqrt{r_n})=\sqrt{r_0}$. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}$收敛到$\sqrt{r_0}$.

3.（西安电子科技大学）设$f(x)$是在$(-\infty,+\infty)$内的可微函数，且满足：

(1) $f(x)>0$； (2) $|f(x)|\leqslant m|f(x)|$，其中$0<m<1$.

任取a_0，定义$a_n=\ln f(a_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$. 证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛.

【思路探索】 考虑比值判别法.

证明：$|a_{n+1}-a_n|=|\ln f(a_n)-\ln f(a_{n-1})|=\left|\dfrac{f'(\xi_n)}{f(\xi_n)}(a_n-a_{n-1})\right|\leqslant m|a_n-a_{n-1}|$.

即$\left|\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}\right|\leqslant m<1$，由比值判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛.

这里$\xi_n\in(\min\{a_n,a_{n-1}|,\max|a_n,a_{n-1}|\})$

4.（西北师范大学）对函数$f(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ $(s>1)$，证明：$f(s)=s\int_1^{+\infty}\dfrac{[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$，其中$[x]$为$x$的整数部分.

【思路探索】 积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x$.

证明：$s\int_1^{+\infty}\dfrac{[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\dfrac{ns}{x^{s+1}}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-x^{-s}\cdot n\,|_n^{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n^s}-\dfrac{n}{(n+1)^s}\right)$

$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^s}-\frac{n+1}{(n+1)^s}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

所以 $f(s)=s\int_1^{+\infty}\frac{[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$.

5. (上海交通大学) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot a_n)=1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛?试证之.

解:已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^{-2n\sin\frac{1}{n}}}=1$,又 $0\leqslant n^{-2n\sin\frac{1}{n}}=\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}<\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{3}{4}}$(当 n 充分大时),

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{3}{4}}$ 收敛,由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-2n\sin\frac{1}{n}}$ 收敛,再由比较判别法的极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

本章教材习题全解

§1 级数的收敛性

1. 证明下列级数的收敛性,并求其和数.

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$;

(2) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$.

【思路探索】 注意到第(1)~(4)题的特点,可考虑用拆项的技巧按级数收敛的定义证明,第(5)小题写出它的前 n 项和后,发现 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k}{2^k}$ 可利用错位相减法得到,从而原级数的前 n 项和也可求得.

证明:(1) $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

$$=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right).$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5}\left(1-\dfrac{1}{5n+1}\right)=\dfrac{1}{5}$,所以原级数收敛,且和数 $S=\dfrac{1}{5}$.

(2) $S_n=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)\right]=\dfrac{3}{2}$,所以原级数收敛,且和数 $S=\dfrac{3}{2}$.

(3) $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$,

$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$,所以原级数收敛,且和数 $S = \frac{1}{4}$.

(4) $a_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$= \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$,

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1-\sqrt{2}$,所以原级数收敛,且和数 $S = 1-\sqrt{2}$.

(5) 考察

$$S'_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n},$$

$$\frac{1}{2}S'_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}},$$

两式相减得 $\frac{1}{2}S'_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$,

$$S'_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n},$$

故原级数的前 n 项和

$$S_n = 2S'_n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^n}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 3$,所以原级数收敛且和数 $S = 3$.

2. 证明:若级数 $\sum u_n$ 发散,$c \neq 0$,则 $\sum cu_n$ 也发散.

【思路探索】 利用反证法结合定理 12.2 即可证明.

证明: 设 $\sum cu_n$ 收敛.因 $c \neq 0$,故级数

$$\sum \frac{1}{c}(cu_n) = \sum u_n$$

收敛,这与题设 $\sum u_n$ 发散矛盾,所以若 $\sum u_n$ 发散,$\sum cu_n$ 也发散($c \neq 0$).

3. 设级数 $\sum u_n$ 与级数 $\sum v_n$ 都发散,试问 $\sum(u_n + v_n)$ 一定发散吗?又若 u_n 与 $v_n (n = 1,2,\cdots)$ 都是非负数,则能得出什么结论?

解:(1) 当 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散时,$\sum(u_n + v_n)$ 不一定发散.如

$$\sum u_n = \sum(-1)^n, \sum v_n = \sum(-1)^{n+1}$$

两级数均发散,但 $\sum(u_n + v_n) = \sum 0 = 0$,即 $\sum(u_n + v_n)$ 收敛.

又如,$\sum u_n = \sum v_n = \sum \frac{1}{n}$,两级数均发散,且 $\sum(u_n + v_n) = \sum \frac{2}{n}$ 发散.

(2) 当 u_n 与 $v_n (n = 1,2,\cdots)$ 均非负时,则 $\sum(u_n + v_n)$ 一定发散.这是因为: