面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

线性代数

XIAN XING DAI SHU

主编 陈宪喜 庞淑萍 丛国华

哈尔滨地图出版社

面向 21 世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

线 性 代 数

XIAN XING DAI SHU

主编 陈宪喜 庞淑萍 丛国华

哈尔滨地图出版社

•哈尔滨•

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／陈宪喜，庞淑萍，丛国华主编. —哈尔滨：
哈尔滨地图出版社，2009.4
ISBN 978-7-5465-0035-5

Ⅰ.线… Ⅱ.①陈…②庞…③丛… Ⅲ.线性代数 Ⅳ.
0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第049286号

哈尔滨地图出版社出版发行
（地址:哈尔滨市南岗区测绘路2号　邮编:150086）
东煤地质局哈尔滨测试研究中心印刷厂印刷
开本:787 mm×1 092 mm　1/16　印张:11　字数:260千字
ISBN 978-7-5465-0035-5
2009年4月第1版　2009年4月第1次印刷
印数:1～2 000　定价:20.00元

内 容 提 要

本书是作者经过20多年教学实践和在吸收我国“十五”“十一五”期间高等学校经管类专业线性代数课程教改成果的基础上编写而成的．本书在内容安排及编写格式上，充分考虑到高等学校学生的特点，紧密联系实际，并把数学知识与教学方法融合为一体，通俗易懂，简明适用，便于自学．本书力求简洁，坚持贯彻以应用为目的，书中列举了一些日常生活中有趣的实例，以提高学生的学习兴趣和运用数学知识解决实际问题的能力；编者坚持理论“以必需、够用为度”的原则，突出三个基本，即“基本概念、基本思想、基本方法”，力求使学生在较为系统地掌握数学概念、思想和方法的同时，掌握数学的基本理论，为他们今后的工作与学习打下必要的数学基础与良好的数学素质．在编写过程中，我们努力使教材成为学生易学、教师易教的实用性较强的教材．

本书涵盖了行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值及相似矩阵、二次型及其标准形、投入产出数学模型简介等内容．节末精心安排了思考题、练习题，以帮助学生进一步理解本节的内容，章末还有习题和自测题，以帮助学生进一步巩固本章的内容，书后还附有各章的习题与自测题的参考答案．

本书既适合全日制普通高等学校、高职高专院校使用，也适合成人教育学院、广播电视大学及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用，还可以作为经济管理人员自学或参考用书．

前　　言

为了适应高等院校培养精理知文的应用型、复合型高级专门人才，更好地将数学课程与实际经济管理专业教学相结合，为适应培养 21 世纪经济技术人才对数学的要求，我们按照原国家教委关于系列课程改革的精神，多年来在数学教学改革方面进行了探索，取得了一定的成效，在此基础上，编写了这本教材．本教材在编写内容上既涵盖了教育部颁布的高等财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲中线性代数部分的全部基本要求，又参考了全国高等教育自学考试《线性代数》考试大纲，可以满足全日制普通高等院校、成人院校以及自学考试中经济类、管理类各专业对《线性代数》课程的要求．

本教材的编写力求具有以下特色：

1．将各门课程的内容有机结合、融会贯通，既保证了教学质量的提高，又压缩了教学时数．

2．注重对学生能力的培养，注意提高学生基本素质．对基本概念、理论、思想方法的阐述准确、简洁、透彻、深入．精选内容，突出重点，强调应用，注意奠定学生创新能力的基础．

3．例题和习题丰富，特别是综合性和实际应用性的题较多，有利于学生掌握所学内容、培养学生的科学精神、创新意识和综合运用数学解决实际问题的能力．

4．在每章、每节的开始，概括点题，以使学生了解本章或本节所研究问题的来龙去脉，起到承上启下的作用，增加可读性．

5．每节之后配有思考题和练习题：通过思考题试图达到使学生能从新的角度理解概念，掌握运算；练习题难度较低，主要为学生巩固知识提供素材．每章后有习题和自测题，习题可作为本章的综合练习题；自测题可作为每章学完后的小测验．

本书由陈宪喜、庞淑萍、从国华共同担任主编．其中，鹤岗广播电视大学的陈宪喜编写了第 1～3 章；哈尔滨金融高等专科学校的庞淑萍编写了第 4～5 章；哈尔滨商业大学的从国华编写了第 6 章．全书的结构安排、统稿、定稿工作由陈宪喜承担．

由于编者水平有限，教材中缺点和疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正．

编　者

2009 年 1 月

目 录

第一章　行　列　式

在经济管理活动中，许多变量之间存在着或近似存在着线性关系，使得对这种关系的研究显得尤为重要，许多非线性关系也可转化为线性关系．线性代数是高等数学的又一个重要内容，而行列式理论是线性代数的重要组成部分，是研究线性方程组解法的重要工具，它在自然科学、工程技术、生产实际和经济管理中有着广泛的应用．本章首先以二元和三元线性方程组的求解为背景引进行列式的概念，然后介绍行列式的一些基本性质和计算方法，最后给出用行列式解线性方程组的方法——克莱姆（Gramer）法则．

第一节　n阶行列式的定义

行列式是在讨论线性方程组时建立起来的一个数学概念，是解线性方程组的一个有力工具．所谓线性方程组是指未知数的最高次数是一次的方程组．为此，我们回顾初等代数中的二、三元线性方程组的求解过程，从中引出二、三阶行列式的概念，然后把这些概念推广，得到n阶行列式的概念．

一、二元线性方程组与二阶行列式

设含有两个未知量x_1，x_2的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

利用加减消元法，当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，得到唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1-2}$$

方程组（1-2）就是方程组（1-1）的求解公式．为便于研究，我们可以将（1-2）式的分

母记为
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-3}$$

称为**二阶行列式**. 其中横排称为**行**，纵排称为**列**.

二阶行列式的计算方法可用图 1-1 来帮助记忆. 即实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1-1

二阶行列式表示的代数和，也可用对角线法则来表述，即二阶行列式等于它主对角线（从左上角到右下角的对角线）上的元素之积减去它次对角线（从右上角到左下角的对角线）上的元素之积. 例如，$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2$.

利用上述定义，（1-2）式中的分子可以分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{21} \tag{1-4}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21} \tag{1-5}$$

因此，对二元线性方程组（1-1），在行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \ x_2 = \frac{D_2}{D} \tag{1-6}$$

显而易见，D_1，D_2 是由方程组（1-1）的右端常数列分别取代 D 的第 1 列、第 2 列而得到的两个二阶行列式.

例 1.1 解二元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$.

解 根据二元线性方程组的求解公式（1-6），有

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

于是方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{-7}{2} = -\dfrac{7}{2} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{10}{2} = 5 \end{cases}$.

二、三元线性方程组与三阶行列式

为求解含有三个未知数 x_1，x_2，x_3 的三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1-7}$$

我们将 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-8}$$

称为**三阶行列式**. 等式右端称为三阶行列式的展开式.

三阶行列式的计算方法可用图 1-2 来帮助记忆.

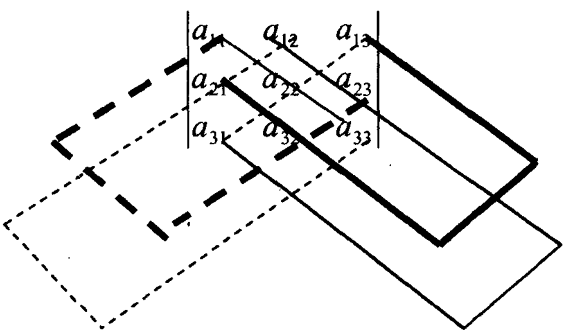

图 1-2

图 1-2 表明：沿各实线上三个元素的乘积带有正号；沿虚线上三元素的乘积带有负号. 它们的代数和就是三阶行列式的值.

由此关于三元线性方程组（1-7），当行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，如果记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则方程组(1-7)有唯一解,即 $x_1=\dfrac{D_1}{D}, x_2=\dfrac{D_2}{D}, x_3=\dfrac{D_3}{D}$. (1-9)

一般地，称 D 为方程组（1-7）的**系数行列式**，而 D_1，D_2，D_3 是分别把 D 中的第 1 列、第 2 列、第 3 列中的各数换成常数项 b_1，b_2，b_3 构成的.

例 1.2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 7 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix}$.

解 $D=1\begin{vmatrix} -4 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

$=1\times(-12-49)-2\times(-3-21)+3\times(-7+12)$

$=-61+48+15=2$.

例 1.3 当 x 为何值时，行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2$.

解 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 5 & x \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 2 & x \\ 2 & 2 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$=3(10-3x)-(4-2x)-(6-10)$

$=30-7x=2$

解得 $x=4$

故当 $x=4$ 时，行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2$.

例 1.4 解线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3-5=0 \\ 4x_2+x_3-2=0 \\ 2x_1+2x_2+1=0 \end{cases}$.

解 将方程组化为一般形式：

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=5 \\ 4x_2+x_3=2 \\ 2x_1+2x_2=-1 \end{cases}$$

因为

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=12\neq 0，\quad D_1=\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-27$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=21，\quad D_3=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-60$$

故方程组有唯一解，由（1-9）式可知

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-27}{12}=-\dfrac{9}{4} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{21}{12}=\dfrac{7}{4} \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{-60}{12}=-5 \end{cases}.$$

三、n 阶行列式的概念

在实际问题中往往会遇到未知数多于三个的线性方程组，为了研究它们的解的情况，还需要引进 n 阶行列式的概念．为此我们用记号 a_{ij} 表示行列式中位于第 i 行第 j 列上的元素，这样与（1-8）类似地，可用三阶行列式来定义四阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

如此递推下去，在$(n-1)$阶已经定义的情况下，可以得出n阶行列式的定义：

定义 1.1 由n^2个数$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成n行n列，两边各加上一条竖直线段则

构成一个算式，即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-10}$$

称其为**n阶行列式**，常用字母D表示，其中数a_{ij}称为行列式的第i行第j列元素．划去元素a_{ij}所在的第i行和第j列后，剩下$(n-1)^2$个元素按原来的顺序组成的$n-1$阶行列式称为a_{ij}的**余子式**，记为M_{ij}；在它的前面冠以符号因子$(-1)^{i+j}$后，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素a_{ij}的**代数余子式**．按如下规定计算n阶行列式的值：

(1) 当$n=1$时，规定$D=|a_{11}|=a_{11}$．即，一阶行列式是数a_{11}本身．

注意：一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$不要与绝对值符号混淆．

(2) 设$n-1$阶行列式已经定义，则n阶行列式

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \tag{1-11}$$

即，n阶行列式D等于它的第一行元素与其代数余子式乘积的代数和．

若将（1-11）式的右端完全展开，其展开式共有$n!$项，其中有$\frac{n!}{2}$个是正项，$\frac{n!}{2}$个是负项，每一项都是取自不同行不同列的n个元素的乘积．

例如，当$n=2$时，$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，

与二阶行列式的对角线法则之结果完全一致．

例 1.5 写出行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$中元素$a_{43}$的余子式和代数余子式．

解　元素a_{43}的余子式为划去第4行和第3列后，剩下的元素按原来顺序组成的三阶行列式，而元素a_{43}的代数余子式为余子式前面冠以$(-1)^{4+3}$，即

$$M_{43}=\begin{vmatrix}1&2&-3\\-1&4&0\\2&3&-6\end{vmatrix},\quad A_{43}=(-1)^{4+3}M_{43}=-M_{43}=-\begin{vmatrix}1&2&-3\\-1&4&0\\2&3&-6\end{vmatrix}.$$

式（1-11）称为n阶行列式D按第一行展开式，事实上有如下定理：

定理 1.1　n阶行列式D (1-10)等于它的任意一行元素与它们各自的代数余子式乘积之和

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \tag{1-12}$$

（其中$i=1,2,\cdots,n$）. 式（1-12）称为n阶行列式按行展开式.

证明从略. 如果行列式的元素$a_{ij}=0$，称a_{ij}为零元素. 定理 1.1 告诉我们，如果行列式第i行零元素最多，则按第i行展开将使计算简便. 特别地，若行列式有一行元素全为零，则行列式等于零.

例 1.6　计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&0&\cdots&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解　由（1-11）式，得

$$D=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&0&\cdots&0\\a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&0&\cdots&0\\a_{43}&a_{44}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n3}&a_{n4}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-2,n-2}\begin{vmatrix}a_{n-1,n-1}&0\\a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-2,n-2}a_{n-1,n-1}a_{nn}.$$

我们把从左上到右下的对角线称为**主对角线**. 这种主对角线上（下）方元素全为零的行列式称为下（上）三角形行列式. 由上例可知，下三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积. 由下节中例1可知，上三角形行列式的值也等于主对角线上元素的乘积.

可见，上（下）三角形行列式是最容易计算的，这是个非常有用的结果. 特别地，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这种主对角线以外的元素全为零的行列式称为对角形行列式．即上（下）三角形行列式、对角形行列式的值都等于主对角线上各元素的乘积．

例 1.7 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}$.

解 两次按第一行展开，有

$$D=a\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}=ab\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}=abcd.$$

思考题 1.1

1．任意两个行列式能比较大小吗?

2．主对角线上元素都为零的行列式的值一定等于零吗?

练习题 1.1

1．设 $D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$，求 M_{11},M_{12},M_{13} 与 A_{11},A_{12},A_{13}，并计算行列式的值.

2．计算行列式的值：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix}$，（2）$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$，

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$，（4）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

第二节　n阶行列式的性质

按定义计算行列式是一种较复杂的运算方法，下面学习的n阶行列式性质，能简化行列式的计算．为简明起见，我们这里介绍的一般n阶行列式的性质，仅以三阶行列式为例加以说明，不过这些性质对任何阶行列式均成立．

首先给出行列式转置的定义．

定义 1.2　设$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则称$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$为$D$的**转置行列式**(简称$D$的转置)，它是把$D$的第$i$行改为第$i$列（其中$i=1,2,\cdots,n$）（即行列互换）所得到的$n$阶行列式．

性质 1　行列式D与其转置行列式D^{T}的值相等．

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D^{\mathrm{T}}.$$

即：行列互换，其值不变．

例如，$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2$．

由性质 1 知，行列式中的行与列具有同等的地位，所以行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立；反之亦然．因此，有如下关于行列式按列展开定理．

推论 1　n阶行列式D(1-10)等于它的任意一列元素与它们各自的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \tag{1-13}$$

（其中$j=1,2,\cdots,n$），即：行列式可以按任一行（列）展开．

性质 2　行列式中，互换两行（列）的对应元素，行列式的值仅变号．即：两行对调，改变符号．

例如，

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

如果行列式D中有两行的对应元素完全相同，那么，当交换这两行后，一方面行列式的元素实际上并未改变；另一方面，由性质 2 知，行列式的值应反号，即得$D=-D$，因此得$D=0$．即有：

推论 2 行列式若有两行(列)对应元素相同，则该行列式等于零．即：两行（列）相同，其值为零．

例如，行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$=(3-4)-(6-6)+(4-3)=0.$$

性质 3 行列式中，如果某一行(列)的所有元素都有公因子k，则k可以提到行列式符号之外．

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如，
$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

推论 3 行列式中，若有两行(列)对应元素成比例，则该行列式的值等于零．

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$