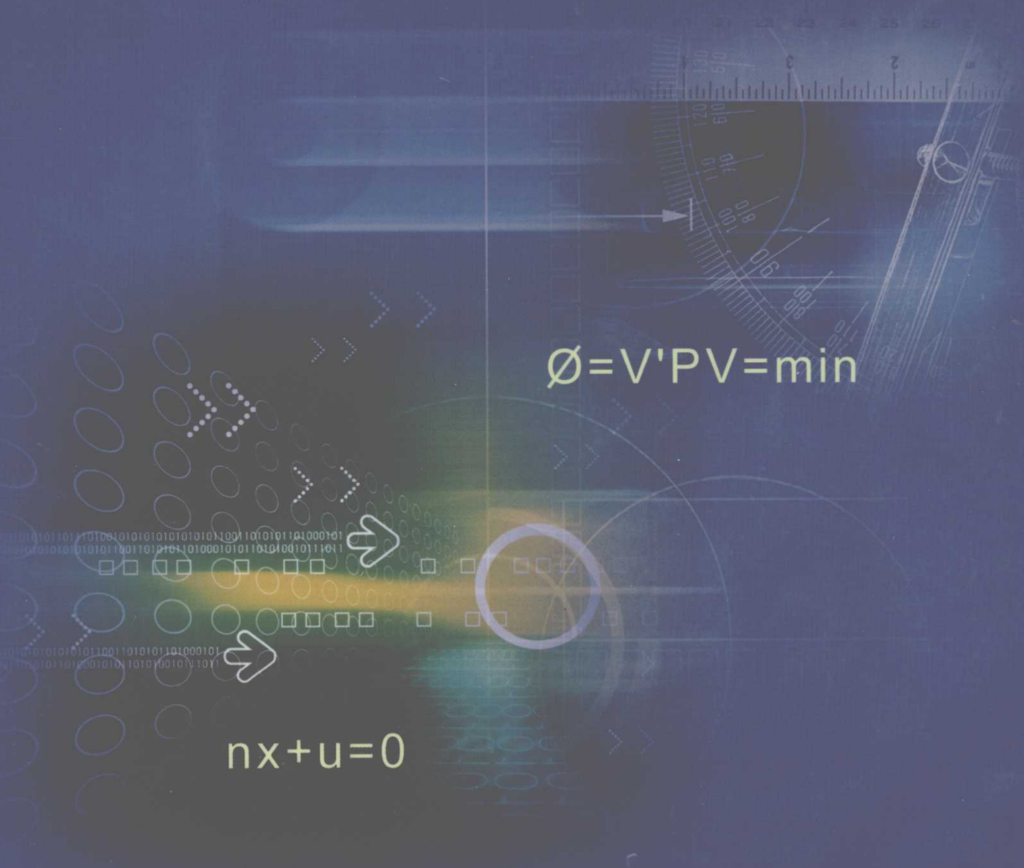
高等学校测绘学科教学指导委员会“十五”高职高专规划教材

测量平差

celiang pingcha

靳祥升 主编



黄河水利出版社

高等学校测绘学科教学指导委员会“十五”高职高专规划教材

测 量 平 差

靳祥升 主编

黄 河 水 利 出 版 社

内 容 提 要

本书是由高等学校测绘学科教学指导委员会指导和组织编写的，是测量工程专业高职高专层次的专业基础课“十五”规划通用教材。该书深入浅出地阐述了测量平差的基本原理和基本平差方法，符合高职高专教育的精神，具有高职高专的特色。全书共分为六章，主要包括：绪论，误差理论与平差原则，条件平差，间接平差，误差椭圆，线性方程组的解算方法等。

本书主要供测绘类专业的高职高专教学使用，也可供相关专业的工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

测量平差/靳祥升主编.—郑州：黄河水利出版社，2005.8

高等学校测绘学科教学指导委员会“十五”高职高专规划教材

ISBN 7-80621-930-7

Ⅰ.测… Ⅱ.靳… Ⅲ.测量平差-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 082473 号

出 版 社：黄河水利出版社

地址：河南省郑州市金水路 11 号　　邮政编码：450003

发行单位：黄河水利出版社

发行部电话：0371-66026940　　传真：0371-66022620

E-mail：yrcp@public.zz.ha.cn

承印单位：河南省瑞光印务股份有限公司

开本：787 mm×1 092 mm　1/16

印张：10

字数：231 千字　　印数：1—4 100

版次：2005 年 8 月第 1 版　　印次：2005 年 8 月第 1 次印刷

书号：ISBN 7-80621-930-7/P·43　　定价：17.00 元

高等学校测绘学科教学指导委员会“十五”高职高专规划教材审定委员会

主　任　宁津生

副主任　陶本藻　王　依

委　员　赵文亮　方源敏　李晓桓

序

我国的高职高专教育经历了十余年的蓬勃发展，获得了长足的进步，如今已成为我国高等教育的重要组成部分，在国家的经济、社会和科技发展中发挥着积极的服务作用，我们测绘类专业的高职高专教育也是如此。为了加深高职高专教育自身的改革，并使其高质量地向前发展，教育部决定组建高职高专教育的各学科专业指导委员会。国家测绘局受教育部委托，负责组建和管理高职高专教育测绘类专业指导委员会，并将其设置为高等学校测绘学科教学指导委员会下的一个分委员会。第一届分委员会成立后的第一件事就是根据教育部的要求，研讨和制定了我国高职高专教育的测绘类专业设置，新设置的专业目录已上报教育部和国家测绘局。随后组织委员和有关专家按照新的专业设置制订了“十五”期间相应的教材规划。在广泛征集有关高职高专院校意见的基础上，确定了规划中各本教材的主编和参编院校及其编写者，并规定了完成日期。为了保证教材的学术水平和编写质量，教学指导分委员会还针对高职高专教材的特点制定了严格的教材编写、审查及出版的流程和规定，并将其纳入高等学校测绘学科教学指导委员会统一管理。

经过各相关院校编写教师们的努力，现在第一批规划教材正式出版发行，其他教材也将会陆续出版。这些规划教材鲜明地突出了高职高专教育中专业设置的职业性和教学内容的应用性，适应高职高专人才的职业需求，必定有别于高等教育的本科教材，希望在高职高专教育的测绘类专业教学中发挥很好的作用。

这里要特别指出，黄河水利出版社在获悉我们将出版一批规划教材后，为了支持和促进测绘类专业高职高专教育的发展，经与教学指导委员会协商，今后高职高专测绘类专业的全部规划教材都将由该社统一出版发行。这里谨向黄河水利出版社表示感谢。

由教学指导委员会按照新的专业目录，组织、规划和编写高职高专测绘类专业教材还是初次尝试，希望有测绘类专业的各高职高专院校能在教学中使用这些规划教材，并从中发现问题，提出建议，以便修改和完善。

高等学校测绘学科教学指导委员会主任

中国工程院院士

宁津生

2005年7月10日于武汉

前言

本书是在高等学校测绘学科教学指导委员会的指导下，以全国高等学校测绘学科教学指导委员会“十五”高职高专规划教材研讨会上制定的《测量平差》教学大纲为主要依据，在总结多年教学经验的基础上编写完成的。重点介绍了测量误差知识、测量平差的原理和基本平差方法，并结合一定的测量实例说明了测量平差方法的应用。本教材具有如下特点：

(1)每一章的前面给出了该章的教学目的，概述了章节的重点内容，既有利于教师教学，又便于学生的学习。

(2)深入浅出，通俗易懂，强调理论联系实际，突出基本理论和基本概念。

(3)遵循高职高专的特点，强调实用性和应用性，在理论体系完整的前提下，舍去了较为繁琐的推证，重点讲述平差原理和方法的实际应用。

(4)增加了线性方程组常用的几种解算方法，并用 Visual Basic 语言编写了相应的解算程序，与后续课《Visual Basic 测绘程序设计》更好地相衔接。

(5)每一章节后都有一定数量针对性非常强的思考题和习题，便于学生做作业，加强对章节内容的理解。

参加本书编写的人员有：黄河水利职业技术学院靳祥升(第一章、第二章)，东南大学交通学院潘国锋(第三章)，武汉电力职业技术学院蒋紫蕊(第四章)，平顶山工学院魏亮(第五章、第六章)。全书由靳祥升统一修改定稿。

全书完成后，由高等学校测绘学科教学指导委员会责成武汉大学测绘学院陶本藻教授进行认真细致的审稿，提出了许多宝贵意见，修改后，通过了高等学校测绘学科教学指导委员会“十五”高职高专规划教材审定委员会的审定，作为测绘学科高职高专院校统编教材，供高等职业教育测绘类专业使用。在此，对陶本藻教授和教材审定委员会的各位专家表示感谢！在本书编写的过程中，杨中利老师提出许多宝贵的建议，在此表示感谢！同时对黄河水利出版社为本教材顺利出版给予的大力支持表示感谢。

由于编者水平有限，不当之处在所难免，热忱希望广大读者对本书中缺点错误给予批评指正。

编　者

2005 年 4 月

目　录

第一章　绪　论

教学目的

通过本章学习，使同学们了解观测值、观测值误差的概念，认识到观测条件对观测值质量的影响，熟知测量平差的任务，掌握误差的分类，学会区分偶然误差及系统误差。

第一节　观测误差

1　观测值

通过测量仪器、工具等任何手段获得的以数字形式表示的空间信息，称为观测值，例如用仪器观测地面上两点的角度值、距离值、高差值等。

观测值的类型很多，不同的划分方法可得到不同的分类。按观测信息性质的不同可将观测值划分为几何观测值（面积、体积、高差、距离等）和物理观测值（温度、气压、折光等）；按观测值所在投影面的不同可将观测值分为平面观测值和竖直面观测值；按观测对象所在位置的不同可将观测值分为空间观测值、陆地观测值、海洋观测值等；按观测对象本身的动静态性质可分为静态观测值和动态观测值；按观测对象能否直接得到可将观测值分为直接观测值和间接观测值。

2　观测误差与观测条件

任何观测量，客观上总是存在一个能反映其真正大小的数值，这个数值称为观测量的真值或理论值。然而，测量是一个有变化的过程，观测值是不能准确得到的，总是与观测量的真值有一定的差异，在测量上称这种差异为观测误差，用 Δ 表示。

若用 L 表示观测值，$\widetilde{L}$ 表示真值，则观测误差 Δ 的定义为

$$\Delta = \widetilde{L} - L$$

观测误差产生的原因是多种多样的，但由于任何观测值的获取都要具备人、仪器、外界环境这三种要素，所以观测误差产生的原因可归结为下列三方面。

2.1　仪器误差的影响

仪器误差的影响可分为两个方面来理解，一是仪器本身固有的误差，给观测结果带来误差影响。如，用只有厘米分划的水准尺进行水准测量时，就很难保证在厘米以下的读数准确无误。二是仪器检校时的残余误差，如水准仪的视准轴不平行于水准轴而产生的 i 角误差等。

2.2 观测者的影响

由于观测者感觉器官的鉴别能力有一定的局限性，所以在仪器的安置、照准、读数等方面都会产生误差。同时，观测者的工作态度和技术水平，也是对观测成果质量有直接影响的重要因素。

2.3 外界环境的影响

观测时所处的外界条件，如温度、湿度、风力、大气折光等因素都会对观测结果直接产生影响；同时，随着温度的高低、湿度的大小、风力的强弱以及大气折光的不同，它们对观测结果的影响也随之不同，因而在这样的客观环境下进行观测，就必然使观测的结果产生误差。

上述仪器、观测者、外界环境三方面的因素是引起误差的主要来源。因此，我们把这三方面的因素综合起来称为观测条件。不难想像，观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系。当观测条件好时，观测中产生的误差平均说来就可能相对小些，因而观测质量就会高些。反之，观测条件差时，观测成果的质量就会低些。如果观测条件相同，观测成果的质量也就可以说是相同的。所以说，观测成果的质量高低也就客观地反映了观测条件的优劣，也可以说，观测条件的好坏决定了观测成果质量的高低。

但是，不管观测条件如何，在整个观测过程中，由于受到上述因素的影响，观测的结果就会产生这样或那样的误差。从这个意义上来说，在测量中产生误差是不可避免的，即误差存在于整个观测过程中，称为误差公理。

3 观测误差的分类及处理

根据观测误差对观测结果影响的性质，可将误差分为系统误差和偶然误差（随机误差）两种。

3.1 系统误差

在相同的观测条件下进行一系列观测，如果误差在大小、符号上表现出系统性，或者在观测过程中按一定的规律变化，或者为一常数，那么，这种误差就称为系统误差。

例如，水准尺的刻划不准、水准仪的视准轴误差、温度对钢尺量距的误差、尺长误差等均属于系统误差。

系统误差具有累计性，对成果的影响较大，应当设法消除或减弱它的影响。采用的方法一般有两种：一是在观测的过程中采取一定的措施；二是在观测结果中加入改正数。其目的就是消除或减弱系统误差的影响，使其达到忽略不计的程度。

3.2 偶然误差

在相同的观测条件下进行一系列的观测，如果误差在大小和符号上都表现出偶然性，即从单个误差看，该系列误差的大小和符号没有规律性，但就大量误差的总体而言，具有一定的统计规律，这种误差称为偶然误差。例如，观测时的照准误差，读数时的估读误差等，都属于偶然误差。

如果各个误差项对其总和的影响都是均匀小，即其中没有一项比其他项的影响占绝对优势时，那么它们的总和将是服从或近似地服从正态分布的随机变量。因此，偶然误差就其总体而言，都具有一定的统计规律，所以，有时又把偶然误差称为随机误差。

在测量工作的整个过程中，除了上述两种性质的误差以外，还可能发生错误。错误的发生，大多是由于工作中的粗心大意造成的。错误的存在不仅大大影响测量成果的可靠性，而且往往造成返工浪费，给工作带来难以估量的损失。因此，必须采取适当的方法和措施，保证观测结果中不存在错误。所以一般地来说，错误不算作观测误差。

观测结果不可避免地包含偶然误差，它是不可消除的，也是我们测量平差主要研究的对象，但可以选择较好的观测条件减弱它。

第二节　测量平差的任务

由于观测结果不可避免地存在着偶然误差的影响，因此在实际工作中，为了提高最后结果的质量，同时也为了检查和及时发现观测值中有无错误存在，通常要使观测值的个数多于未知量的个数，也就是要进行多余观测。例如，对一条导线边，测量一次就可得出其长度了，但实际上总要测量两次或两次以上。一个三角形，只需观测其中的两个内角，即可决定其形状，但通常是观测三个内角。由于观测误差的存在，通过多余观测必然会发现在观测结果之间不相一致或不符合应有关系而产生的不符值。因此，必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理，以便消除这些不符值，同时还要使消除不符值后的结果可以认为是被观测量的最可靠的结果。根据具有不符值的原始观测值，如何求出被观测量的最可靠结果，这就是测量平差的一个主要任务。测量平差的另一任务，就是评定观测值以及最可靠结果的精度。既然观测有误差，就必须知道这些误差对测量成果的影响，考核测量成果的质量是否满足生产建设工作的要求。

概括起来说，测量平差的任务就是：

(1)对一系列带有偶然误差的观测值，采用合理的方法来消除它们之间的不符值，求出未知量的最可靠值。

(2)运用合理的方法来评定测量成果的精度。

思　考　题

1-1　什么是观测误差？产生的原因有哪些？

1-2　观测条件包括哪些？

1-3　根据观测误差对观测结果的影响，将观测误差区分成哪几类？

1-4　观测条件与观测质量之间的关系是什么？

1-5　在相同的观测条件下，对同一个量进行了若干次观测，这些观测值的精度是否相同？误差小的观测值比误差大的观测值的精度高吗，为什么？

1-6　根据本书的观点，真误差属什么误差？

1-7　测量平差的任务是什么？

习　　题

1-1　在角度测量中，用正倒镜观测；在水准测量中，使用前后距离相等，这些措施是

为了消除什么误差？试加以分析。

1-2 在水准测量中，有下列几种情况使水准尺读数带有误差，试判断误差的性质及对读数的影响。

(1)视准轴与水准轴不平行　　(2)仪器下沉

(3)读数时估读不准确　　(4)水准尺下沉

第二章　误差理论与平差原则

教学目的

通过本章的学习使同学们理解偶然误差的统计规律及测量平差原则；熟知测量精度指标、权、协因数等概念；掌握误差、权倒数、协因数传播律及其在测量中的应用。

第一节　偶然误差的统计规律

1　描述偶然误差分布的三种方法

设有一组观测值 $L_1, L_2, \cdots, L_n$，其相应的真值为 $\widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2, \cdots, \widetilde{L}_n$，真误差为 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$，设其为偶然误差。从表面上看，这组误差的大小和符号没有规律，但对大量误差进行统计分析，却呈现出一定的统计规律性，而且随着误差个数的增多这种规律性表现得越明显。我们可以用三种方法来描述一组观测误差的分布规律性。

1.1　列表法

在相同观测条件下，对某测区 781 个三角形的内角进行了观测，并按下式求出内角和的真误差为

$$\Delta_i = 180^\circ - (L_1 + L_2 + L_3)_i \qquad (i = 1,2,\cdots,781) \tag{2-1}$$

式中：180°为三角形内角和的真值，其相应的观测值为 $L_1 + L_2 + L_3$，真误差为 Δ_i，角标 i 表示第 i 个三角形。设各 Δ_i 相互之间是互相独立的偶然误差。所谓独立，是指各个误差在数值的大小和符号上互不影响，与这一组误差相对应的观测值称为互相独立的观测值。

设以 $\mathrm{d}\Delta$ ~~表示误差区间并令~~其等于 0.5″，将上述 781 个误差分别按正误差和负误差重新排列，统计误差出现在各区间的个数 μ_i，计算出误差出现在某区间内的频率 μ_i/n，其结果列于表 2-1 中。

从表 2-1 中可以看出，该组误差表现出这样的分布规律：绝对值较小的误差比绝对值较大的误差多；绝对值相等的正误差个数与负误差个数相近；误差的绝对值有一定限度，最大不超过 3.5″。

1.2　绘图法

为了形象地表达偶然误差的分布规律，根据表 2-1 的数据，以误差 Δ 的数值为横坐标，以$\dfrac{\mu/n}{\mathrm{d}\Delta}$为纵坐标可绘制出直方图，如图 2-1 所示，每一误差区间上的长方形面积表示

表 2-1

误差区间	为负值的 Δ		为正值的 Δ	
	个数 μ_i	相对个数 μ_i/n	个数 μ_i	相对个数 μ_i/n
0.0″~0.5″	123	0.158	116	0.149
0.5″~1.0″	99	0.127	98	0.125
1.0″~1.5″	72	0.092	74	0.095
1.5″~2.0″	51	0.065	48	0.061
2.0″~2.5″	22	0.028	27	0.035
2.5″~3.0″	16	0.020	16	0.020
3.0″~3.5″	10	0.013	9	0.012
3.5″以上	0	0	0	0
和	393	0.503	388	0.497

误差在该区间出现的相对个数。误差较小的长方形较高,其面积较大,即误差出现的相对个数较多;反之,误差较大的长方形较矮,其面积较小,即出现误差的相对个数较少。所有长方形基本上对称于纵坐标轴,这说明绝对值相等的正误差和负误差出现的相对个数很接近。误差绝对值大于 3.5″的长方形没有,表明其面积为零,即出现的相对个数为零,亦即不会出现。还需指出,所有长方形面积之和等于 1。

1.3 密度函数法

当误差个数 n 无限增多,并无限缩小误差区间时,图 2-1 中各个小长方条顶边的折线就变成一条光滑的曲线,如图 2-2 所示,我们称这条曲线为误差分布的概率密度曲线或误差分布密度曲线,简称为误差曲线,它与正态分布曲线极为接近。由此可以看出,偶然误差的分布随着 n 的无限增大是以正态分布为其极限分布的。因此,偶然误差 Δ 是服从正态分布的连续型随机变量。由概率论知,正态分布的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{2-2}$$

式中:x 为正态随机变量 X 的取值;a 和 σ^2 分别为 X 的数学期望和方差,是正态分布的两个参数。参数 a 和 σ^2 的正态分布可简记为 $N(a,\sigma^2)$。参数 a 和 σ^2 决定了曲线的位置和形状。

已知偶然误差 Δ 是服从正态分布的随机变量,它的数学期望和方差分别为

$$E(\Delta) = 0 \tag{2-3}$$

$$D_\Delta = \sigma^2 \tag{2-4}$$

故 Δ 的密度函数为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{2-5}$$

2 偶然误差的分布特性

通过以上讨论,我们可用概率的术语来描述偶然误差所具有的统计特性。

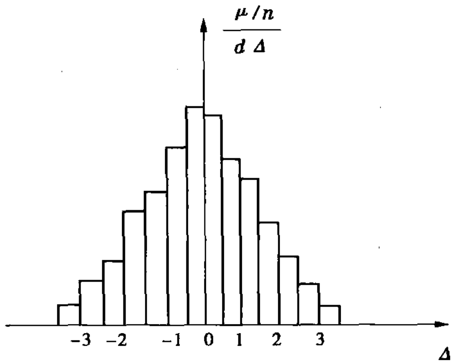


图 2-1

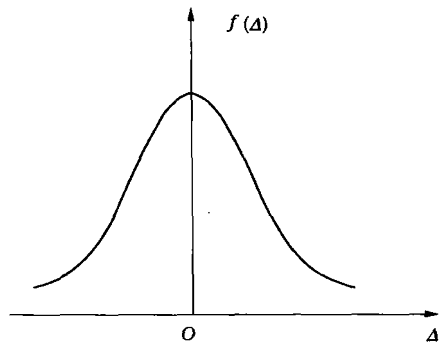


图 2-2

(1)在一定的观测条件下,误差的绝对值不会超过一定的限值,或偶然误差的绝对值大于某个值的概率为零,或表述为:观测误差的绝对值小于某个值的概率恒等于1。该特性称为偶然误差的有界性。

(2)绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率要大,该特性称为偶然误差的聚中性。

(3)绝对值相等的正负误差出现的概率相等,该特性称为偶然误差的对称性。

(4)偶然误差的数学期望或偶然误差的算术平均值的极限值为0,该特性称为偶然误差的抵偿性。

3 由偶然误差特性引出的两个测量依据

3.1 制定测量限差的依据

由偶然误差的有界性可知:在一定的观测条件下,若仅有偶然误差的影响,误差的绝对值必定会小于一定的限值。我们在实际工作中,就可依据观测条件确定一个误差限值,若观测值的误差绝对值小于该限值,认为观测值合乎要求,否则,应剔除或重测。

3.2 判断系统误差(粗差)的依据

由偶然误差的对称性和抵偿性可知,误差的理论平均值为零,即观测值的期望值为其真值,观测值中不含有系统误差和粗差。若误差的理论平均值不为零,且数值较大,说明观测成果中含有系统误差和粗差。

第二节 衡量精度的指标

测量平差的基本内容之一就是衡量测量成果的精度。本节将首先说明精度的含义,然后给出衡量精度的指标。

1 精度的含义

前一节讲过,在一定的观测条件下进行的一组观测,它对应着一种确定不变的误差分布。如果分布较为密集,则表示该组观测质量较好,也就是说,这一组观测精度较高;反

之,如果分布较为离散,则表示该组观测质量较差,也就是说,这一组观测精度较低。

因此,所谓精度,就是指误差分布的密集或离散的程度。倘若两组观测成果的误差分布相同,便是两组观测成果的精度相同;反之,若误差分布不同,则精度也就不同。

在相同的观测条件下所进行的一组观测,由于它是对应着同一种误差分布,因此对于这一组中的每一个观测值,都称为是同精度观测值。例如,表 2-1 中所列的 781 个观测结果是在相同观测条件下测得的,各个结果的真误差彼此并不相等,有的甚至相差很大(例如有的出现于 0.0″～0.5″区间,有的出现于 3.0″～3.5″区间)。由于它们所对应的误差分布相同,真误差彼此间的差异仅是偶然误差性质的结果。因此,这些结果彼此是同精度观测值。

2 衡量精度的指标

为了衡量观测值的精度高低,当然可以按前节所述的三种方法,把一组相同条件下得到的误差,用误差分布表、绘成直方图或绘出误差分布曲线的方法来比较。但在实际工作中,这样做既不方便,对精度也得不到一个数字概念,只能定性地反映观测结果的好坏,无法定量精确表示。

前已提及,精度是指一组误差的分布密集或离散的程度。分布愈密集,则表示在该组误差中,绝对值较小的误差所占的相对个数愈大。在这种情况下,该组误差绝对值的平均值就一定小。由此可见,精度虽然不是代表个别误差的大小,但是,它与这一组误差绝对值的平均大小显然有着直接关系。因此,用一组误差的平均大小作为衡量精度高低的指标,是完全合理的。用一组误差的平均大小作为衡量精度的指标,可有多种不同的定义,下面介绍几种常用的精度指标。

2.1 方差与中误差

设有一组同精度的独立观测值,其相应的一组真误差为 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$,定义这组独立误差平方的平均值的极限为该组观测值的方差,用 σ^2 表示,即

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta]}{n} \tag{2-6}$$

方差的算术平方根称为中误差(统计学中称为标准差),用 σ 表示,测量中也常用 m 表示,即

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{2-7}$$

式中:$[\Delta\Delta]$表示$\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2$,[ ]为取和的符号,注意 σ 恒为正值。

说明:上两式中的 Δ 既可以是同一个量的观测值的真误差,也可以不是同一个量的观测值的真误差,但必须都是同精度且同类性质观测量的真误差,即是在相同条件下得到的观测值,n 是Δ 的个数。

上述方差及中误差都是在 $n\to\infty$的情况下定义的,但在实际工作中,观测次数不能无限多,总是有限的,一般只能得到方差和中误差的估计值,即

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n} \tag{2-8}$$

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{2-9}$$

顺便指出的是，由于分别采用了不同的符号已区别方差和中误差的理论值和估值，以后就不再强调“估值”的意义，也将“中误差的估值”简称为“中误差”。

【例 2-1】 某测区的 16 个三角形内角和的误差如下，试求三角形内角和中误差。

$-5.2''$	$+3.1''$	$0.0''$	$-0.2''$	$+1.1''$	$-1.7''$	$+0.1''$	$+1.2''$
$-0.6''$	$+2.2''$	$-3.2''$	$+1.4''$	$-0.8''$	$+1.0''$	$-0.2''$	$+1.0''$

解：将三角形内角和的真误差代入式(2-9)，可得三角形内角和的中误差

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{(-5.2)^2+(+3.1)^2+(0.0)^2+\cdots+(+1.0)^2+(-0.2)^2+(+1.0)^2}{16}}=1.97''$$

2.2 极限误差

前已述及观测成果中不能含有粗差。那么，如何来判定观测误差中的粗差呢？必须要有一个判定标准，超过这个标准的误差就列入粗差，相应的观测值应予剔除或返工重测，这个标准就是极限误差，所谓极限误差就是最大误差。由偶然误差的特性可知，在一定条件下，偶然误差不会超过一个界值，这个界值就是所说的极限误差，但这个界值很难确定，一般规定极限误差的根据是误差出现在某一范围内的概率的大小，即误差 Δ 出现在$(-k\sigma,+k\sigma)$内的概率。经计算，误差出现在区间$(-\sigma,+\sigma)$，$(-2\sigma,+2\sigma)$，$(-3\sigma,+3\sigma)$内的概率分别为 68.3%、95.5%、99.7%。可见，大于三倍中误差的误差，其出现的概率只有 0.3%，是小概率事件，在一次观测中，可认为是不可能发生的事件。因此，可规定三倍中误差为极限误差，即

$$\Delta_{限}=3\sigma \tag{2-10}$$

若对观测要求较严，也可规定两倍中误差为极限误差，即

$$\Delta_{限}=2\sigma \tag{2-11}$$

如例 2-1 中，若取两倍中误差作为极限误差，则内角和的极限误差为

$$\Delta_{限}=2\times1.97''=3.94''$$

2.3 相对误差

有时，单靠中误差还不能完全表达观测质量的好坏，例如，在同一观测条件下，用尺子丈量了两段距离，一段为 500m，一段为 1 000m，这两段距离的中误差均为 2.0cm，虽然二者中误差相同，但由于不同的距离长度，丈量的尺段数不同，就同一单位长度而言，二者精度并不相同。显然，后者的单位长度的精度比前者高。我们把这种衡量单位长度的精度叫做相对精度。相对精度包括相对真误差、相对中误差、相对极限误差，它们分别是真误差、中误差和极限误差与其观测值之比。如上述两段距离，前者的相对中误差为 1/25 000，而后者则为 1/50 000。

相对误差是个无名数，在测量中经常将分子化为 1，分母化为整数 N，即用$\frac{1}{N}$表示。一般来说，当观测误差随着观测量的大小而变化时，用相对误差来描述其精度。为了与相对误差相区别，真误差、中误差和极限误差统称为绝对误差。