

根据教育部新课程标准编写

BOOK
二天下图书二

小学数学

XIAOXUE SHUXUE
MINGSHI
PEIYOU JINGDIAN



名师

培优经典



4 年级

丛书顾问◎单 增

丛书主编◎张承宇

本册主编◎张正华 裴小华



金牌教练指点迷津



助你赢在起跑线上

携手跨入重点中学



重庆出版集团 重庆出版社



丛书主编简介

张承宇，安徽南陵县人。曾就读于湖北大学和中国科技大学，获理学硕士学位。现为深圳中学数学高级教师，南粤优秀教师，中国数学学会会员，中国高等教育学会教育数学专业委员会常务理事，中国数学奥林匹克高级教练员。

自1987年以来发表数学论文和数学教育论文30余篇，其中《角谷猜想的推广》一文，代表着中国学者对“角谷猜想”（又名Collatz猜想）问题的开拓和研究。

在深圳中学所教的两届初中超常班和两届高中超常班中，有40余人获全国初中数学联赛一等奖，30余人获高中数学联赛一等奖，6人进冬令营，3人进国家集训队，康嘉引同学获第46届国际数学奥林匹克金牌（2005年，墨西哥），王烜同学获第48届国际数学奥林匹克金牌（2007年，越南），两位同学的培养均为一对一辅导。在2004年高考中，所教超常班数学平均分达760分（标准分），16人在800分以上，2人获得满分900分，17人被北大、清华录取，其中深圳市数学单科前10名中，有9人是他的学生，取得了深圳中学高考的历史性突破。

互动平台：<http://www.szmo.cn>

BOOK
二天下一图二

ISBN 978-7-5366-9910-6



9 787536 699106 >

定价：25.00元

根据教育部新课程标准编写

小学 数学

XIAOXUE SHUXUE
MINGSHI
PEIYOU JINGDIAN

名师

培优经典

4 年 级



丛书顾问 单 增

丛书主编 张承宇

本册主编 张正华 袁小华

副 主 编 刘汉文 陶祥生 陈宝宏

编委名单 (以下排名不分先后)

张承宇	刘汉文	朱心武	胡小军	程全喜
陶祥生	胡志兵	辛 宇	郝进喜	胡良晟
肖平嘉	刘 辉	付小梅	孙红英	夏玉珍
彭 娟	甘荣芳	周升武	张正华	陈 柳
沈 平	陈玉叶	袁小华	马立友	王炬红
陈宝宏	吴伟平	张鸿莺	高 敏	

重庆出版集团 重庆出版社

图书在版编目(CIP)数据

小学数学名师培优经典·4 年级/张正华, 裘小华主编.
—重庆: 重庆出版社, 2008.7
ISBN 978-7-5366-9910-6

I. 小… II. ①张… ②裘… III. 数学课—小学—
教学参考资料 IV. G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 101089 号

小学数学名师培优经典·4 年级

XIAOXUE SHUXUE MINGSHI PEIYOU JINGDIAN · SINIANJI

丛书主编: 张承宇 本册主编: 张正华 裘小华

出 版 人: 罗小卫

责任编辑: 丁华全

封面设计: 杨 峰

版式设计: 蒋成平



重庆出版集团 出版
重庆出版社

重庆市长江二路 205 号 邮政编码: 400016 <http://www.cqph.com>

重庆市联谊印务有限公司印刷

重庆市天下图书有限责任公司发行

重庆市渝中区双钢路 3 号科协大厦 14 楼

邮政编码: 400013 电话: 023-63658853

全国新华书店经销

开本: 787mm × 1 092mm 1/16 印张: 15 字数: 279 千

版次: 2008 年 7 月第 1 版 印次: 2008 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1~10 000 册

书号: ISBN 978-7-5366-9910-6

定价: 25.00 元

版权所有, 侵权必究

前言

陈省身先生预言：“中国将在 21 世纪成为数学大国。”要成为数学大国，不可能一蹴而就，还需要坚持不懈的努力。为广大的少年儿童编写一套好的数学读物，就是为中国的数学教育事业添砖加瓦。国际奥赛金牌教练、数学高级教师张承宇和原黄冈市教研室副主任、数学特级教师刘汉文，携手深圳市和奥数金牌之乡黄冈市各重点小学的骨干教师（还特邀了安徽泾县的王炬红及宣州市的陈宝宏），编写了这套丛书。它以小学数学教学内容为依托，在此基础上进行拓展；以数学新课标和《中小学数学奥林匹克竞赛大纲》为准绳，旨在培养学生灵活运用知识的能力；以思维训练为核心，着重培养学生的自主探究能力。

该书设计有以下栏目：

[知识要点] 简要介绍本讲所涉及的知识内容及主要的数学思想方法。

[典例剖析] 每讲例题大多精选自近几年的全国竞赛试题，由浅入深的分析，从不同的角度启发学生探究解题规律，提高解题能力和数学素质。

[例题解答] 我们特地把思维过程与解答过程分开，以提高学生的动手能力。

[名师点拨] 集一批名师多年教学经验之精华，不拘形式，或点拨知识形成过程中的“关键点”，或点拨解决数学问题策略的“关节点”，或归纳总结方法技巧，或问题的引申与推广，等等。用简洁的语言引导和启迪学生，开发智力，提高思维能力。

[规律总结] 全面总结解题形式、解题方法（特殊方法和解题通法），教会学生如何寻找解题突破口，以及如何灵活运用某些数学思想方法，等等。

[培优训练] 题型多样，题目新颖，是对课本知识的强化与拓展。通过这些题型的训练，达到迅速提高学生解题能力的目的。

[竞赛提升] 学有余力的同学，可以试着去解这组竞赛题，有了前面的诸多铺垫，你不会再感到竞赛题难做，反而有一种水到渠成的感觉。

[智力趣题] 每讲最后都配了一两道趣味题。兴趣是促进学习的最佳动力，兴趣可以使得学习变得事半功倍。

[答案与提示] 给出了所有训练题的详细解答。能使学生深受启发，有茅塞顿开之感！

本丛书以“立足培优，服务竞赛”为宗旨，既帮助学生学好教科书，打好基础，又使学生在学科竞赛中展现才能，可谓“鱼”和“熊掌”兼得，“培优”与“竞赛”兼顾。因此，本丛书是目前此类图书中覆盖知识最广、教学内容最全、学习效果最好、适用面最广、可读性最强的小学数学培优竞赛学习用书。

我看好这套《小学数学名师培优经典》，乐意向老师、家长和喜欢数学的同学们推荐它！

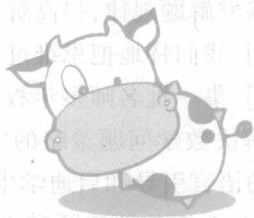
中国数学奥林匹克委员会委员
全国华罗庚金杯赛主试委员会委员

朱华伟

2008 年 6 月 26 日 于广州

目录

- 1 第一讲 学会找规律
- 9 第二讲 定义新运算
- 14 第三讲 巧数图形
- 22 第四讲 数字谜
- 31 第五讲 长方形和正方形的面积
- 38 第六讲 倍数问题
- 45 综合能力测试(一)
- 48 第七讲 周期问题
- 57 第八讲 行程问题(一)
- 66 第九讲 数阵和幻方
- 77 第十讲 页码问题
- 84 第十一讲 最优化问题
- 92 综合能力测试(二)
- 94 第十二讲 速算与巧算
- 101 第十三讲 年龄问题
- 109 第十四讲 盈亏问题
- 116 第十五讲 行程问题(二)
- 124 第十六讲 剪拼图形
- 133 第十七讲 排列与组合
- 141 综合能力测试(三)
- 143 第十八讲 包含与排除
- 150 第十九讲 奇数与偶数
- 157 第二十讲 简单推理
- 168 第二十一讲 巧算时间
- 175 第二十二讲 整数计算
- 181 综合能力测试(四)
- 183 答案与提示



第一讲

学会找规律



知识要点

寻找规律一般分为从数字排列中找规律,从数表排列中找规律和从图形排列中找规律。

我们把按照一定顺序排列的数叫做数列,数列中的每一个数都叫做这个数列的项。通过观察已知的项,找出所给数列的排列规律。对于数列中的规律,一般是观察前后两个数的变化情况。

把一些数按一定的规律排成一个形状,就叫做数表。数表的排列规律往往是比较隐蔽的,需要我们仔细观察,开拓思路。对于数表中的规律,往往是寻找几个数之间的变化规律。

图形的变化规律往往比较复杂,我们可以从图形的形状、位置、方向、数量、大小、颜色等方面入手,从中寻找规律。



典例剖析

例 1 找出下面数列的规律,并根据规律在括号里填出适当的数。

(1) 1, 5, 11, 19, 29, (), 55, ……

(2) 1, 2, 3, 6, 12, 23, 44, (), 164

(3) 6, 1, 8, 3, 10, 5, 12, 7, (), (), ……

指点迷津 (1) 先计算相邻两数的差, $5-1=4$, $11-5=6$, $19-11=8$, $29-19=10$, 由此可以推知这些差依次为 4, 6, 8, 10, 12, 14。那么括号里的数应比 29 多 12, 比 55 少 14。

(2) 从第 5 个数开始, 每个数等于前 4 个数之和, 所以, 括号里的数应是前面 4 个数的和。

(3) 仅从相邻的两个数难以看出这列数的排列规律。这时我们



名师点拨

观察、分析数列的规律, 就要从各项的性质, 相邻项(两项或三项)之间的关系进行归纳。还可以把一个数列分解成两个或两个以上的数

不妨隔着一个数来观察,把数列中的数隔一个抽一个,分成两组:

$$6, 8, 10, 12, \dots$$
 $1, 3, 5, 7, \dots$

很明显地可以看出,第1组是从6开始的偶数排列,第2组是奇数排列。

例2 把自然数按以下规律分组：

$$(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), \dots$$

其中第1组有1个数,第2组有3个数,第3组有5个数,第4组有7个数,……,求第11组所有数之和。

指点迷津 不难发现每组的数的个数等于它的组序号的 2 倍减 1。就是说第 k 组有 $(2k-1)$ 个数。先计算前 10 组所有数的个数。

$$1+3+5+\cdots+(2\times10-1)=[1+(2\times10-1)]\times10\div2=100。$$

第 11 组的第 1 个数是 101, 共有 $(2 \times 11 - 1) = 21$ 个数。最后一个数是 $100 + (2 \times 11 - 1) = 121$ 。

求第 11 组所有数之和,就是求从 101 开始排列到 121 的自然数列之和。

误区警示➡

本题数列的排列规律很容易看出,关键是要找每组数的个数的排列规律,如果不去找每组数的个数的排列规律,就很容易走进误区。

例 3 先找规律,再按规律填空。

5	4	6	1	3	7	8	8	7	9	10	
15		1		16		59				45	

指点迷津 这些数结合成一组一组的,并依组按顺序排列。我们仔细观察前4组数,不难发现每组数中的3个数之间都满足一个共同的关系:上面两个数的积减去下面的一个数都等于5。根据这个规律,我们就可以填出第5组和第6组中的空格。

例 4 按下面的排列规律,第 10 行最左边的数是几?

			1					第 1 行
		2	3	4				第 2 行
	5	6	7	8	9			第 3 行
10	11	12	13	14	15	16		第 4 行
.....								



名师点拨

列,再来观察。开始可能是一种猜测,在猜测的基础上再进行检验。

指点迷津 从排列的数表看,易知每行数的个数成等差数列排列,分别为 1,3,5,7,9,……。我们可以先求出第 9 行共有几个数,再求从第 1 行到第 9 行共有的个数,这个数就是第 9 行最后的一个数,从而可以求出第 10 行的第 1 个数,也就是第 10 行最左边的数。

例 5 将自然数按下列规律排列,每一行比前一行多一个数,如右表所示。第 100 行第 3 个数是多少?

指点迷津 先将每一行的第一个数列出来得到一个数列:

$$1=1$$

$$2=1+1$$

$$4=1+2+1$$

$$7=1+2+3+1$$

$$11=1+2+3+4+1$$

……

那么,第 100 行的第一个数为 $(100-1)$ 个自然数的和再加上 1。

$$1+2+3+4+\cdots+(100-1)+1$$

$$=(1+100-1)\times(100-1)\div 2+1$$

$$=4951$$

由此可求出第 100 行的第 3 个数。

第 1 行	1
第 2 行	2,3
第 3 行	4,5,6
第 4 行	7,8,9,10
第 5 行	11,12,13,14,15
……	……

名师点拨

先找出每一行的第 1 个数的规律,再求出第 100 行的第 1 个数。

变式题

一列自然数 0,1,2,3,……,2005,……,2024,第 1 个数是 0,从第 2 个数开始,每一个都比它前一个大 1,最后一个是 2024。现在将这列自然数排成以下数表,规定横排为行,竖排为列。则 2005 在数表中位于第()行和第()列。

0	3	8	15	……
1	2	7	14	……
4	5	6	13	……
9	10	11	12	……
……	……	……	……	……

指点迷津 观察每一列的第 1 个数 0,3,8,15,……,由于 $1^2-1=0$, $2^2-1=3$, $3^2-1=8$, $4^2-1=15$,……,由此可知每列的第 1 个数为这

个列的列数的平方减去 1。而 $45^2-1=2024$, $44^2-1=1935$, 又 $1935 < 2005 < 2024$, 所以 2005 必在第 45 列。2005 所在的行数为 $2024-2005+1=20$ (行), 即得 2005 位于第 20 行和第 45 列。

例 6 图 1-1 中的图是按一定规律排列的, 请仔细观察, 并在“?”处画上合适的图形。

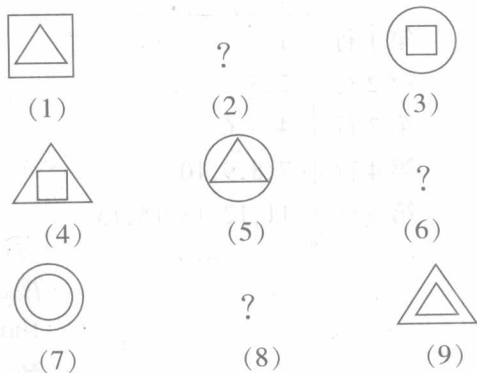


图 1-1

指点迷津 从第 1 列(1)(4)来看, 里面的图形变为外面的图形, 外面的图形变为里面的图形, 所以(2)处应是(5)处的里面与外面的图形的互换, (6)处应是(3)处的里面与外面的图形的互换。由第 1 列和第 3 列可知(8)处应为里面和外面都是正方形。

例 7 图 1-2 是用火柴棍摆出一系列三角形图案。按这种方式摆下去, 当 $N=5$ 时, 共需要摆火柴棍多少根?

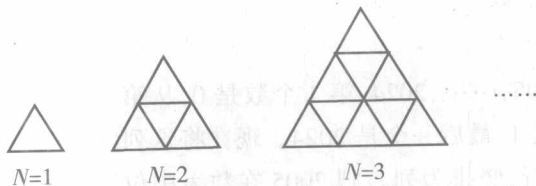
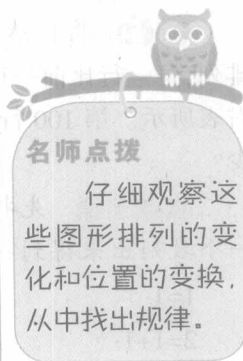


图 1-2

指点迷津 当 $N=1$ 时, 需要 3 根火柴; 当 $N=2$ 时, 需要 9 根火柴; 当 $N=3$ 时, 需要 18 根火柴。观察可得火柴的根数为: 3, 9, 18, …… , 这个数列相邻两个数的差组成等差数列: 6, 9, 12, ……。由此可以求出第 5 个图案所需火柴棍的根数。



名师点拨

仔细观察这些图形排列的变化和位置的变换, 从中找出规律。



例题解答

例 1

(1) $29+12=41$ 。 (2) $6+12+23+44=85$ 。 (3) 14, 9。

例 2

前 10 组所有数的个数 $1+3+5+\cdots+(2\times 10-1)=[1+(2\times 10-1)]\times 10\div 2=100$, 第 11 组的第 1 个数是 101, 共有 $(2\times 11-1)=21$ 个数。最后一个数是 $100+(2\times 11-1)=121$, 第 11 组所有数之和 $101+102+\cdots+121=(101+121)\times 21\div 2=2331$ 。

例 3

第 5 个数组中, 下面的方格里应填 $7\times 9-5=58$; 在第 6 个数组中, 右边的方格里应填 $(45+5)\div 10=5$ 。

例 4

第 9 行有 $1+(9-1)\times 2=17$ 个数, 从第 1 行到第 9 行共有 $(1+17)\times 9\div 2=81$ 个数, 即第 9 行最后的一个数为 81, 从而第 10 行的第一个数为 82。

例 5

第 100 行的第一个数为: $1+2+3+4+\cdots+(100-1)+1$
 $= (1+100-1)\times (100-1)\div 2+1$
 $= 4951$

那么第 100 行的第 3 个数为 4953。

例 6

(2) 处应画 , (6) 处应画 , (8) 处应画 .

例 7

当 $N=5$ 时, 需要火柴的根数为 $18+12+15=45$ (根)。



规律总结

解决找规律的问题, 我们应从以下几个方面来考虑:

1. 找数列的规律, 需要我们灵活地用整数的有关知识, 加、减、乘、除的计算法则及它们之间的关系, 并进行合理的推理, 认真分析题目中所给数据与未知数据的关系, 从中发现规律。有时还须将一列数分成两个数列, 分别找出它们各自的变化规律。

2. 找数表中的规律, 要从行与行之间和列与列之间的情况加以考虑, 尤其值得注意的是第一行的数所组成的数列规律和第一列的数所组成的数列规律。

3. 找图形排列的规律, 要从观察、猜测、实验、推理等活动中发现图形的变化规律。



培优训练

1. 在下面各数列中填入合适的数。

(1) 9, 11, 15, 21, 29, (), 51。

(2) 3, 4, 5, 8, 7, 16, 9, 32, (), ()。

2. 按照规律, 在括号里填入合适的数。

(1) 2, 4, 8, 16, 32, (), …… () 第 10 个。

(2) 0, 3, 8, 15, 24, (), …… () 第 10 个。

(3) 1, 3, 6, 10, 15, (), …… () 第 200 个。

3. 有一列由 3 数组成的数组, 它们依次是 (1, 5, 10), (2, 10, 20), (3, 15, 30), ……。问: 第 8 个数组内 3 个数分别是多少?

4. 有一组加法算式: $4+2$, $5+8$, $6+14$, $7+20$, ……。按这规律排的第 10 个加法算式是怎样的? 它的结果是多少?

5. 看表填出所缺数字。

(1)

15	18	66	39
38	41		62

(2)

8	16	14
5	15	12
7		

6. 已知下表第 1 行中 5 个数的和是 25, 观察数表规律, 迅速求出第 2 行、第 5 行的 5 个数的和各是多少?

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49

7. 下面是按一定的规律排列的数字三角形, 请你按规律填上空缺的数字。

```

      1
    2  4
  3  6  9
4  8 12 16
5 10 15 ( ) 36
6 12 18 ( ) 30 36
    
```

9. 如图 1-3, 根据前 3 幅图的规律, 接下去该怎样画?

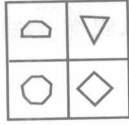
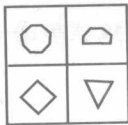
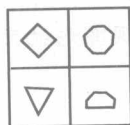


图 1-3



1. 观察右面的 5 个数: 19, 37, 55, A, 91 排列的规律, 推知 $A =$ _____。
2. $3+12, 6+10, 12+8, 24+6, 48+4, \dots$ 是按一定规律排列的一串算式。其中第 6 个算式的计算结果是 _____。

3. 如图 1-4, 用同样大小的正三角形, 向下逐次拼接出更大的正三角形, 其中最小的三角形顶点的个数 (重合的顶点只计一次) 依次为: 3, 6, 10, 15, 21, $\dots$ 。这列数中的第 9 个数是多少?

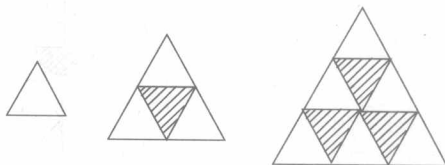


图 1-4

4. 找规律: $(1, 2, 3, 4), (2, 4, 6, 8), (3, 6, 9, 12), \dots$, 那么第 200 个数组的和是多少?

5. 如图 1-5 所示, 在 2×2 方格中, 画一条直线最多穿过 3 个方格; 在 3×3 方格中, 画一条直线最多穿过 5 个方格。那么在 5×5 方格中, 画一条直线, 最多穿过多少个方格?

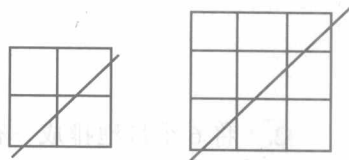


图 1-5

6. 从 1 开始的自然数按如图 1-6 所示的规则排列, 并用一个平行四边形框出 9 个数, 能否使这 9 个数的和等于 (1) 1993; (2) 1143; (3) 1989。若能办到, 请写出平行四边形框内的最大数和最小数; 若不能办到, 说明理由。

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40

.....

图 1-6

7. 把自然数依次排成右边数阵。如果规定横为行, 纵为列 (如 8 在第 2 行第 3 列)。第 10 行第 5 列排的是哪个数?

8. 观察图 1-7, 并按照变化规律在“?”处填上合适的图形。

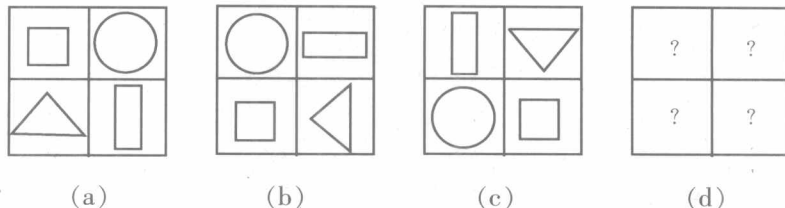


图 1-7

1, 2, 4, 7, $\dots$
 3, 5, 8, $\dots$
 6, 9, $\dots$
 10, $\dots$
 $\dots$



智力趣题

1. 图 1-8 是由几何图形组成的帆船图形,你能按照一定的规律,在标号处画出符合规律的小帆船吗?

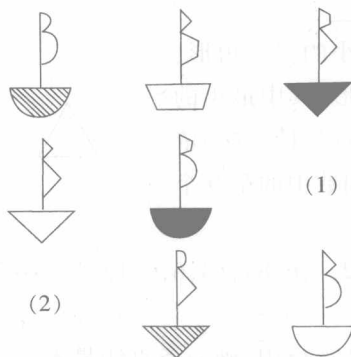


图 1-8

2. 将 6 个灯泡排成一行,用○和●表示灯亮和灯不亮,图 1-9 是这一行灯的 5 种情况,分别表示 5 个数字:1,2,3,4,5。那么○●●○●○表示的数是多少?

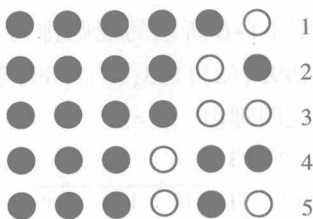


图 1-9

第二讲 定义新运算



知识要点

我们学过的运算有加、减、乘、除等,如: $8+2=10$, $8-2=6$, $8\times 2=16$, $8\div 2=4$ 。这里两个数都是 8 和 2,为什么运算结果不同呢?主要是运算方式不同,实际是对应法则不同。可见,一种运算实际就是两个数与一个数的一种对应方法,对应法则不同就是不同的运算。当然,这个对应法则应该是对任意两个数,通过这个法则都有一个唯一确定的数与它们对应。只要符合这个要求,不同的法则就是不同的运算。在这一讲中,我们定义了一些新的运算形式,它们与我们常用的“+”、“-”、“ $\times$ ”、“ $\div$ ”运算不相同。

这里所说的定义新运算,是按照某种约定(规定),给这种新运算一个明确的含义。只要弄明白这种含义,就可以正确地计算出有关算式的结果。



典例剖析

例 1 设 A, B 都表示数,规定 $A \ast B = 5 \times A - 3 \times B$ 。

- (1) 求 $6 \ast 4, 4 \ast 6$ 。
- (2) 思考:这个运算“ $\ast$ ”有交换律吗?
- (3) 求 $(19 \ast 6) \ast 2, 19 \ast (6 \ast 2)$ 。
- (4) 思考:这个运算“ $\ast$ ”有结合律吗?
- (5) 如果已知 $14 \ast B = 13$,求 B 是多少?

指点迷津 这道题规定的运算的本质是:符号前面的数的 5 倍减去符号后面的数的 3 倍。(1)用 6 的 5 倍减去 4 的 3 倍,用 4 的 5 倍减去 6 的 3 倍。(2)比较(1)的两个结果就知道运算“ $\ast$ ”是否满足交换律。(3)要计算 $(19 \ast 6) \ast 2$,先要计算括号里的数,分两步进行,同理要计算 $19 \ast (6 \ast 2)$ 也要分两步进行。(4)比较(3)中的两个结果就知道运算“ $\ast$ ”是否满足结合律。(5)根据 14 的 5 倍减去 B 的 3 倍的差等于 14,列出方程: $5 \times 14 - 3 \times B = 13$,再求出 B 。



名师点拨

解决定义新运算的关键是抓住定义的本质。

例 2 如果 a, b, c 是 3 个整数, 且它们满足加法交换律和结合律, 即:

$$(1) a+b=b+a。$$

$$(2) (a+b)+c=a+(b+c)。$$

现在规定一种运算“ $*$ ”, 它对于整数 a, b, c, d 满足:

$$(a, b)*(c, d)=(axc+bx d, axc-bx d)。$$

例: $(4, 3)*(7, 5)=(4 \times 7+3 \times 5, 4 \times 7-3 \times 5)=(43, 13)$ 。请你举例说明, “ $*$ ”运算是否满足交换律、结合律。

指点迷津 首先弄清楚新运算的本质是什么, 再举例计算。如计算 $(2, 1)*(4, 3)$ 和 $(4, 3)*(2, 1)$, 看计算结果是否相同就知道“ $*$ ”运算是否满足交换律。同理, 计算 $[(2, 1)*(6, 5)]*(4, 3)$ 和 $(2, 1)*[(6, 5)*(4, 3)]$, 看计算结果是否相同就知道“ $*$ ”运算是否满足结合律。

例 3 有一个数学符号“ $\star$ ”, 使下列算式成立: $2 \star 4=8, 5 \star 3=13, 3 \star 5=11, 9 \star 3=21$ 。请计算 $8 \star 7$ 。

指点迷津 仔细观察和分析这几个算式, 可以发现 $2 \star 4=2 \times 2+4=8, 5 \star 3=5 \times 2+3=13, 3 \star 5=3 \times 2+5=11, 9 \star 3=9 \times 2+3=21$, 不难看出符号“ $\star$ ”定义的运算规律是: $A \star B=2A+B$, 即符号前面的数的 2 倍加上符号后面的数。按照这个规律, 可以求出 $8 \star 7$ 。

变式题 $\rightarrow$

有一个数学符号“ $\odot$ ”, 使下列算式成立: $1 \odot 2=5, 2 \odot 3=11, 3 \odot 4=19, 4 \odot 5=29$ 。按此规律计算 $5 \odot 6$ 。

指点迷津 仔细观察和分析这几个算式, 可以发现 $1 \odot 2=1 \times 2+1+2=5, 2 \odot 3=2 \times 3+2+3=11, 3 \odot 4=3 \times 4+3+4=19, 4 \odot 5=4 \times 5+4+5=29$ 。得出运算符号“ $\odot$ ”定义的运算规律是: $A \odot B=A \times B+A+B$, 按照这个规律就可以计算 $5 \odot 6$ 。

$$5 \odot 6=5 \times 6+5+6=41。$$

例 4 规定: $a \odot b=a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+b-1)$, 其中 a, b 表示自然数。若 $x \odot 10=75$, 求 x 。

$$\begin{aligned} \text{指点迷津 } x \odot 10 &= x+(x+1)+(x+2)+\cdots+(x+10-1) \\ &= 10x+(1+2+3+\cdots+9) \\ &= 10x+45 \end{aligned}$$

再建立方程 $10x+45=75$, 从而可求出 x 的值。

名师点拨

找出运算符号“ $\star$ ”定义的是一个什么样的运算。

名师点拨

如果定义中有未知数, 可以先根据已知条件, 建立简单的方程, 再将这个未知数求出来。

例 5 已知:当 $a \geq b$ 时,规定 $a \ast b = 3 \times a + 2 \times b$;当 $a < b$ 时,规定 $a \ast b = 2 \times a + 3 \times b$ 。如果 $x \ast 10 = 32$,求 x 的值。

指点迷津 根据 x 与 10 的大小,分两种情况讨论。当 $x \geq 10$ 时,建立一个方程,并求出 x 的值,把 x 与 10 比较,看是否符合要求;当 $x < 10$ 时,又建立一个方程,并求出 x 的值,把 x 与 10 比较,看是否符合要求。

 误区警示 →

求出 x 的值后,不知道与 10 进行比较,误认为求出的 x 值就是结果。

例 6 有 A, B, C, D 四种装置,将一个数输入一种装置后会输出另一个数。装置 A:将输入的数加上 5;装置 B:将输入的数除以 2;装置 C:将输入的数减去 4;装置 D:将输入的数乘以 3。这些装置可以连接,如装置 A 后面连接装置 B 就写成 A? B,输入 1 后,经过 A? B,输出 3。

- (1) 输入 9,经过 A? B? C? D,输出几?
- (2) 经过 B? D? A? C,输出的是 46,输入的是几?
- (3) 输入 7,输出的还是 7,用尽量少的装置该怎样连接?

指点迷津 (1) 将 9 先加上 5,后除以 2,再减去 4,最后乘 3。
(2) 逆向思考:将 46 先加上 4,后减去 5,再除以 3,最后乘 2。(3) 7 减去 4 得 3,3 乘 3 得 9,9 加 5 得 14,14 除以 2 得 7。

名师点拨

要认识到 4 种装置实际上就是 4 种新运算。



例题解答

例 1

- (1) 18, 2。 (2) 运算“ $\ast$ ”没有交换律。 (3) 77, 23。
(4) 运算“ $\ast$ ”没有结合律。 (5) 19。

例 2

(1) 因为 $(2, 1) \ast (4, 3) = (2 \times 4 + 1 \times 3, 2 \times 4 - 1 \times 3) = (11, 5)$, $(4, 3) \ast (2, 1) = (4 \times 2 + 3 \times 1, 4 \times 2 - 3 \times 1) = (11, 5)$, 所以“ $\ast$ ”运算满足交换律。

(2) 因为 $[(2, 1) \ast (6, 5)] \ast (4, 3) = (17, 7) \ast (4, 3) = (89, 47)$, $(2, 1) \ast [(6, 5) \ast (4, 3)] = (2, 1) \ast (39, 9) = (87, 69)$, 所以“ $\ast$ ”运算不满足结合律。

例 3

$$8 \star 7 = 8 \times 2 + 7 = 23。$$

例 4

$x \odot 10 = x + (x+1) + (x+2) + \cdots + (x+10-1) = 10x + 45$, 即 $10x + 45 = 75$, 得 $x = 3$ 。