Kongjian Jiexi Jihe

空间解析几何

曹丽娜　李晋枝／编著

中央民族大学出版社
PRESS OF THE CENTRAL UNIVERSITY FOR NATIONALITIES

空间解析几何

曹丽娜 李晋枝 编著

中央民族大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

空间解析几何/ 曹丽娜，李晋枝编著. —北京：中央民族大学出版社，2008. 3
ISBN 978—7—81108—513—6
Ⅰ. 空… Ⅱ. ①曹… ②李… Ⅲ. 空间几何：解析几何
Ⅳ. 0182. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 103055 号

空间解析几何

编　　著　曹丽娜　李晋枝
责任编辑　宁　玉
封面设计　布拉格工作室
出 版 者　中央民族大学出版社
北京市海淀区中关村南大街 27 号　邮编：100081
电话：68472815（发行部）　传真：68932751（发行部）
68932218（总编室）　68932447（办公室）
发 行 者　全国各地新华书店
印 刷 者　北京宏伟双华印刷有限公司
开　　本　880×1230（毫米）　1/32　印张：5. 75
字　　数　140 千字
版　　次　2008 年 3 月第 1 版　2008 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-81108-513-6
定　　价　16 .00 元

前　言

空间解析几何是大学数学专业的一门主要的基础课程。该课程与高中数学的联系紧密,讲授的主要内容同平面解析几何一样，建立形与数之间的联系，通过代数运算，来认识图形的性质及图形间的关系。

本书根据作者近年来在中央民族大学讲授空间解析几何课程的讲义编写。编写的目的之一，是为了适应大学培养方案的调整，在该门课程学时减少的情况下，将传统的空间解析几何内容作了适当的调整，保留了解析几何中最为重要的内容；编写的目的之二，是为了满足那些没有学习过高等代数的读者，在自学空间解析几何时而不受影响。在具体的内容安排上主要考虑了以下几点：

1．贯穿全书的主要思想是数形结合的思想，在第二、三、四章中,清晰的反映了如何根据图形的特点建立相应的代数方程,研究图形的性质及分类。

2．将研究图形所需的代数工具，如向量、矩阵、行列式等内容安排在第一章，以便研究几何图形时使用，且不影响研究思路的连续性。

3．第二章中删掉了传统空间解析几何教材中异面直线公垂线的存在唯一性的讨论;第三章中删掉了圆柱面和圆锥面的讨论。

4．几何图形的分类一直是几何学研究的一个重要内容，在第四章中介绍了利用不变量对空间二次曲线进行分类的思想和方法。

5．第四章与第五章相互呼应，第四章介绍坐标变换，第五章介绍点变换，分析两者间的区别和联系。

6．本书仔细精选了与每节内容配套的习题，有助于读者学习掌握本课的内容，启发学生的思考。

本书可供综合大学和高等师范院校的数学系，作为第一学期周 3 学时使用的教材。

作者特别感谢陈祖荫教授的帮助，他仔细阅读了本书的初稿，并提出了许多宝贵的建议。鉴于作者水平有限，书中难免出错，诚恳地希望读者批评指正。

作者

2008 年 2 月于中央民族大学

目　录

1 向量代数与矩阵计算

空间解析几何是用代数的方法来研究几何，为把代数运算引入到几何中，基本的方法是把空间中的几何结构数量化. 因此本章首先在空间中引进向量及其运算，并且通过向量建立坐标系，使得向量的运算转化为代数运算. 另一方面，矩阵与行列式是研究几何的重要工具，为了本课的需要，本章对矩阵和行列式的有关内容作简单介绍.

1.1 向量及其线性运算

在力学、物理学以及日常生活中，我们经常会遇到许多量，例如温度、时间、质量、密度、面积和体积等，这些量在规定的单位下，都可以由一个确定的数来完全确定，这种只有大小的量叫做数量. 另外，还有一些比较复杂的量，例如位移、力、速度、加速度等，它们不但有大小，而且还有方向，这种量就是向量.

1.1.1 向量的概念

定义 1.1.1 既有大小，又有方向的量，称为**向量**(或矢量). 向量的符号用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 或者 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 表示.

在几何上，一个向量 $\boldsymbol{a}$ 可以用一条有向线段 $\overline{AB}$ 来表示. 这条线段的长度表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小，起点 A 到终点 B 的指向表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向(如图 1-1).

图 1-1

度量向量 $\boldsymbol{a}$（或 $\overline{AB}$ ）的大小的量叫做向量的**模**（也称为向

量的长度)，记为$|\boldsymbol{a}|$（或$|\overrightarrow{AB}|$）.

特别地，模为 1 的向量叫做**单位向量**，与向量 $\boldsymbol{a}$ 具有相同方向的单位向量叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记为 $\boldsymbol{a}^0$.

模为 0 的向量叫做**零向量**，记为 $\mathbf{0}$. 任意的方向都可以看作为零向量的方向.

只有大小、方向, 而无特定起点的向量叫做**自由向量**. 自由向量具有在空间中可以任意平移的性质，我们研究的向量都是自由向量.

定义 1.1.2 如果两个向量的模相等且方向相同，叫做这两个**向量相等**. 所有的零向量都相等. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

例 1.1.1 (如图 1-2)，在▱$ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,

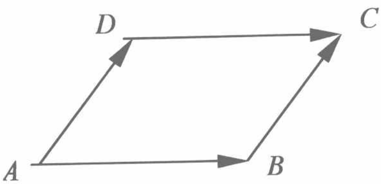

图 1-2

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

定义 1.1.3 模相等且方向相反的两个向量叫做**互为反向量**，向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量记为$-\boldsymbol{a}$.

显然，向量 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

定义 1.1.4 平行于同一直线的向量叫做**共线向量**. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 零向量与任何共线向量组共线.

定义 1.1.5 平行于同一平面的向量叫做**共面向量**. 零向量与任何共面向量组共面.

显然，如果把相互平行的一组向量归结到共同的始点，这组向量一定在一条直线上；同理，如果把平行于同一平面的一组向量归结到共同的始点，这组向量一定在同一个平面上.

1.1.2 向量的加法

在物理学中,我们可以通过平行四边形法则求作用于同一质点的两个不共线的力的合力，即两个力$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$的合力，是以$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形的对角线向量$\overrightarrow{OC}$. 而求两个位移的合成可以应用三角形法则，即通过连接$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$可得位移$\overrightarrow{OB}$. 于是在自由向量的意义下，可以如下定义两个向量的加法.

定义 1.1.6 设向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$,任取一点 A, 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 则$\overrightarrow{AC}$表示的向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 即$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.（如图 1-3）

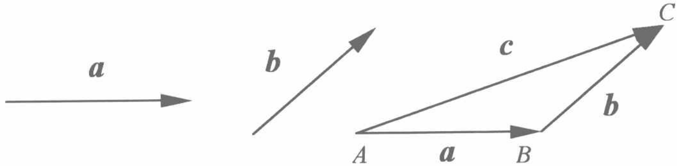

图 1-3

由两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 求和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的运算叫做向量的加法, 这种求和方法叫做三角形法则.

当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线时，任取一点 O 作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 以$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$为边做平行四边形 $OACB$, 则对角线向量$\overrightarrow{OC}$也表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{c}$. 这种求和方法叫做平行四边形法则(如图 1-4）.

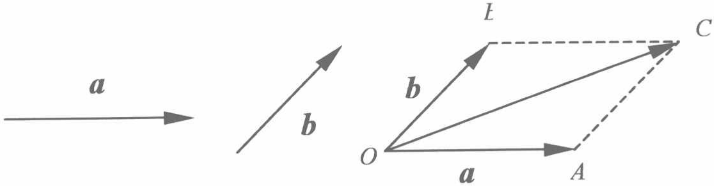

图 1-4

定理 1.1.1 向量加法满足下列运算规律.

(1) 交换律: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) 对任意向量 $\boldsymbol{a}$, 有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(4) 对任意向量 $\boldsymbol{a}$, 有 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

证明 (1) 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 以 OA 和 OB 为边作平行四边形 $OACB$, 则 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 又因为 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$, 所以 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 于是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$, 则

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

因此 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(3) 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$.

(4) 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OO}=\boldsymbol{0}$.

注 两个向量的加法推广到有限多个向量的情形.（如图 1-5）

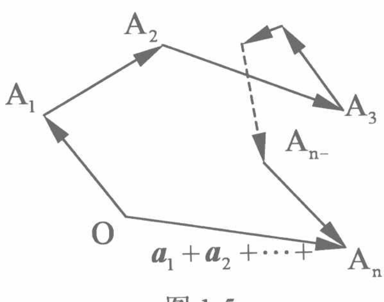

图 1-5

根据向量加法的交换律和结合律，有限多个向量的和 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$ 由三角形法则如下确定：自任意点 O 开始，

作 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，…，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，则$\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}$就是$n$个向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$的和. 这种求和方法叫做多边形法则.

根据反向量，向量的减法可如下定义：

定义 1.1.7 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

由向量加法的三角形法则，有

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA},$$

则

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}.$$

因此可得向量减法的几何作图法. 自空间任意一点O, 作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.(如图 1-6)

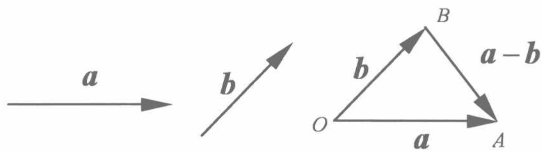

图 1-6

容易看出，对任意的向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 都有不等式（称为三角不等式）

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

当$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$不共线时,它在几何上表示三角形的两边之和大于第三边；当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线且同向时等号成立；当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线但反向时, 取不等号. 这个不等式还可以推广到有限多个向量的情形：

$$|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n|\le|\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|.$$

注 不要把实数和向量混淆，实数是有序的，两个实数可以比较大小，而向量$\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$是没有意义的，只有两个向量的模才可以比较大小.

例 1.1.2 在平行四边形$ABCD$中, 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, (如图 1-7) M 是平行四边形对角线的交点. 试用向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MD}$和$\overrightarrow{MC}$.

解　由于 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，
则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，

所以 $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

$\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

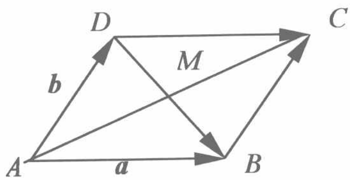

图 1-7

$\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{MD}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

例 1.1.3　设两两不共线的三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$，试证明顺次将它们的终点与始点相连而成一个三角形的充要条件是它们的和是零向量.

证明　必要性　设三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可以构成 ΔABC(如图 1-8)，则 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{c}$，于是

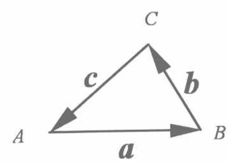

图 1-8

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0},$$

即
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

充分性　设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 由 $\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$.
因此不共线的三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可以构成 ΔABC.

例 1.1.4　用向量的方法证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证明　设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于 M 且互相平分，(如图 1-9)可以看出：

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}$$
$$=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DC},$$

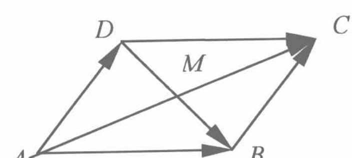

图 1-9

因此 $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{DC}$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，
即四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

1.1.3 向量的数量乘法

定义 1.1.8 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同; 当 $\lambda<0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反;当 $\lambda=0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 这时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向可以是任意的.

设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，因为 $||\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^{-1}|\boldsymbol{a}|=1$, 所以 $\boldsymbol{a}^0=|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a}$，即把一个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 乘以它的模的倒数，便得到一个与它同向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$，这一过程称为把 $\boldsymbol{a}$ 单位化.

向量与数量的乘法有如下的运算规律:

定理 1.1.2 对于任意的向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 和任意实数 λ，μ 有

(1) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$, $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$;

(2)结合律: $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(3)分配律: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$; (1.1.1)

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}. \tag{1.1.2}$$

证明 (1), (2)可以由定义 1.1.8 直接证明. 下面证明(3). 先证明(1.1.1)式.

若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或者 λ,μ 有一个为零时，等式(1.1.1)显然成立. 下面设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且 λ,μ 都不为零. 分 $\lambda\mu>0$ 和 $\lambda\mu<0$ 两种情况进行讨论.

若 $\lambda\mu>0$, $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 方向相同，且

$$\begin{aligned}|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|&=|(\lambda+\mu)|\,|\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)\,|\boldsymbol{a}|\\&=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|+|\mu|\,|\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|\\&=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|,\end{aligned}$$

所以 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

若 $\lambda\mu<0$, 不失一般性，可设 $\lambda>0$, $\mu<0$. 若 $\lambda+\mu=0$，等式(1.1.1)显然成立.

若 $\lambda+\mu>0$，$-\mu>0$, 则

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu)\boldsymbol{a}=[(\lambda+\mu)+(-\mu)]\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a},$$

所以
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}-(-\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

接下来，我们证明(1.1.2)式.

若 $\lambda=0$，或者 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个为零时，则等式(1.1.2)显然成立. 下面设 $\lambda\neq 0$, 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向时，令 $\mu=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$；当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向时，令 $\mu=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，因此有 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$. 于是

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\lambda(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a})=\lambda[(1+\mu)\boldsymbol{a}]\\&=(\lambda+\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+(\lambda\mu)\boldsymbol{a}\\&=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，那么当 $\lambda>0$ 时，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；作 $\overrightarrow{OC}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CD}=\lambda\boldsymbol{b}$，(如图 1-10)

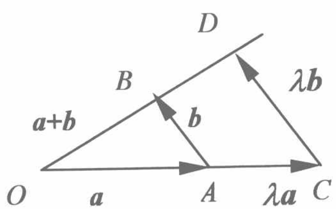

图 1-10

则 $\Delta OAB\sim\Delta OCD$, 从而 D 在直线 OB 上, $\overrightarrow{OD}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;
又由三角形法则 $\overrightarrow{OD}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，
所以
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

当 $\lambda<0$ 时，可以作类似的讨论.

例 1.1.5 设 AM 是 $\triangle ABC$ 的中线，求证

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

证明 (如图 1-11)，有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM},$$