品质成就品牌　品牌创造奇迹

# 名师伴你行

新课标

同步创新版

● 教材知识与基本能力的完美链接
● 轻松课堂与快乐学习的绿色畅想
● 基础训练与综合测试的水乳交融
● 应试技巧与综合素质的立体渗透

丛书主编：张连生

A版

## 高中数学

人教A版/必修①

天津人民出版社

品质成就品牌　　品牌创造奇迹

● 教材知识与基本能力的完美链接
● 轻松课堂与快乐学习的绿色畅想
● 基础训练与综合测试的水乳交融
● 应试技巧与综合素质的立体渗透

# 名师伴你行

A版

丛书主编：张连生

# 高中数学

【人教A版/必修①】

姓　名: ____________________

Q　　Q: ____________________

E-mail: ____________________

天津人民出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

名师伴你行．高中数学：A版．1：必修/张连生主编．
天津：天津人民出版社，2009.6
ISBN 978-7-201-06257-0

Ⅰ．名… Ⅱ．张… Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第101163号

MINGSHIBANNIXING

# 名师伴你行

**天津人民出版社出版**

出版人：刘晓津

（天津市西康路35号　邮政编码：300051）

网址：http：//www.tjrmcbs.com.cn

电子信箱：tjrmcbs@126.com

河间市华联印刷厂 印刷 新华书店 经销

*

2009年6月第1版　2009年6月第1次印刷

880×1230毫米　16开本　8.5印张

字数：272千字　印数：1-10，000

定价：24.00元

丛书主编：张连生
本册主编：孙长征
副 主 编：窦他石　孙向荣
编　　委：孙长征　窦他石　孙向荣　窦一鸣
聂方程　王如月　李洪广　卢一舟
蒋光晴　马辅堂

# 目录 contents

## 第一章　集合与函数概念



## 第二章　基本初等函数(Ⅰ)

# 目录 contents

## 第三章　函数的应用



## 参考答案

# 第一章　集合与函数概念

本章共包括三个单元，分别为集合、函数及其表示和函数的基本性质.第一单元包括集合的含义与表示、集合间的基本关系、集合的基本运算.教材根据小学和初中的数学知识，在对集合有了一定的感性认识的基础上给出了集合的描述性定义，进而给出了集合的两种表示方法：列举法和描述法.集合之间的关系和运算，教材从实例入手，给出了子集的概念，从而对集合间包含、相等关系进行了研究，进而定义了集合之间的交、并、补运算.

集合语言是基本的数学语言，是初等数学的基础，是提高数学交流能力所必备的知识，在中学数学中，集合语言和集合思想将贯彻始终，用集合的思想去揭示事物的内涵和外延，去研究其他数学问题，成为认识事物、解决问题的重要思想方法.因此，集合是高中数学学习的起点.

集合的有关概念、集合的运算是集合学习的重点.有关集合的各个概念的含义以及这些概念间的联系与区别、集合的符号语言是本章的难点.学习集合内容要多联系现实生活中的例子，联系初中学过的代数、几何知识，以帮助我们认识和理解集合及集合间的关系，善于用类比的方法找出相关概念的区别与联系.Venn图是帮助我们直观认识集合的有关概念的有力工具.

第二单元包括函数的概念、函数的表示方法.函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型.高中阶段不仅把函数看成变量之间的依赖关系，同时还用集合与对应的语言刻画函数，搞清函数的表示方法.

第三单元包括单调性与最大(小)值、函数的奇偶性.本单元是学习的重点，也是难点.函数是中学数学的一条主线，是中学数学的重要内容，是学习数学其他知识和分支的基础.

本章知识结构如下：

集合 → 含义

集合 → 集合间的基本关系

集合 → 集合的运算

集合 → 函数

函数 → 函数的概念

函数 → 函数的基本性质

函数 → 映射

映射 → 映射的概念

本章学法如下：

1.注意和初中数学知识的衔接，这就需要重新整理初中数学知识，形成良好的知识基础，如一元二次方程、二元一次方程组、平面几何中常见的平面图形等.在此基础上，再根据本章特点，较快地吸收新知识，形成新的知识结构.

2.认真理解、反复推敲、思考本章各知识点的含义、各种表示方法，容易混淆的知识应仔细辨识、区别，达到熟练掌握，并逐步建立与集合知识相适应的理论体系与思想方法.

3.本章常用的数学思想方法主要有：数形结合的思想(如常借助于数轴、Venn图解决问题)、分类讨论的思想(如一元二次方程根的讨论、集合间的包含关系等).逐步培养用集合的思想来分析问题、解决问题的能力.

4.要从实际背景和定义两个方面理解函数的本质，注意联系实际问题，尝试列举不同类型的函数，构建函数的一般概念，对函数的有关定义、性质要深刻理解，注意灵活运用数形结合思想、函数与方程的思想、函数建模思想解决实际问题.

5.函数的思想方法贯穿于高中数学课程的始终，配方法、换元法、待定系数法等基本方法，特殊化思想、分类讨论思想、数形结合等数学思想在本章中有较大应用.

6.研究基本性质时，一般先从几何直观(观察图象)入手，然后运用自然语言描述函数的图象特征，最后抽象到用数学符号刻画相应的数量特征，这是一个渐进的过程，也是数学中经常使用的方法.

# 1.1 集合

## 学案1 集合的含义与表示

### 要点大整合

#### 知识清仓

1.一般地,我们把研究对象统称为________,把一些元素组成的总体叫做________(简称为________).

2.集合通常用________来表示,而集合中的元素通常用________来表示.如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素,就说________,记作________;如果 $a$ 不是集合 $A$ 中的元素,就说________,记作________.

3.集合中元素具有的性质是________、________、________.

4.常用的数集:

(1)非负整数的全体构成的集合叫________,记作________;

(2)在自然数集内排除零构成的集合叫________,记作________;

(3)整数的全体构成的集合叫________,记作________;

(4)有理数构成的集合叫________,记作________;

(5)实数的全体构成的集合,叫________,记作________.

5.列举法是指________.

6.如果在集合 $I$ 中,属于集合 $A$ 的任意一个元素 $x$ 都具有性质 $p(x)$,而不属于集合 $A$ 的元素都不具有性质 $p(x)$,则性质 $p(x)$ 叫做集合 $A$ 的________.

7.描述法的表示形式为________.

#### 基础演练

1.下列给出的四个对象中,能构成集合的是 ( )

A.高个子的人　B.很大的数

C.聪明的人　D.小于3的实数

2.下列四个关系式中,正确的是 ( )

A.$a\in\{a,b\}$　B.$\{a\}\in\{a,b\}$

C.$a\notin\{a\}$　D.$a\leqslant\{a,b\}$

3.集合 $\{x\in\mathbf{N}^*\mid x-3<2\}$ 的另一种表示法是 ( )

A.$\{0,1,2,3,4\}$　B.$\{1,2,3,4\}$

C.$\{0,1,2,3,4,5\}$　D.$\{1,2,3,4,5\}$

4.若 $A=\{(2,-2),(2,2)\}$,则集合 $A$ 中元素的个数是 ( )

A.1个　B.2个　C.3个　D.4个

5.方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集中,有________个元素.

6.用恰当的符号填空:

(1)0____$\mathbf{N}$;(2)0____$\mathbf{N}_+$;(3)$-6$____$\mathbf{Z}$;(4)$\sqrt{2}$____$\mathbf{Q}$.

### 学点大展板

#### 题型排雷

**学点一　集合的概念**

下列各组对象能否构成集合:

(1)小于10的自然数:0,1,2,3,…,9;

(2)满足 $3x-2>x+3$ 的全体实数;

(3)所有直角三角形;

(4)到两定点距离的和等于两定点间的距离的点;

(5)高一(1)班成绩好的同学;

(6)参与中国加入WTO谈判的中方成员;

(7)小于零的自然数;

(8)小于等于零的正整数.

【分析】一组对象能否构成集合,关键在于其是否具有确定性.

【解析】由于研究对象具有确定性,故(1)(2)(3)(4)(6)构成集合;(7)(8)中的元素不存在因构成空集;而(5)中的对象无标准,因成绩是否好是不确定的,不能构成集合.

【评析】要构成集合,必须明确集合中的元素是确定的,模棱两可、似是而非的不确定元素不能构成集合.

**变式探究**

下列各组对象能否构成集合:

(1)所有漂亮的人;

(2)所有大于0的正整数;

(3)不大于3且不小于0的有理数;

(4)所有的正整数;

(5)某校2009年在校的所有成绩好的同学.

**学点二** 元素与集合的关系

若 $M$ 是由 1 和 3 两个数构成的集合，则下列表示方法正确的是（　）

A. $3\notin M$　　B. $1\notin M$

C. $1\in M$　　D. $1\in M$ 且 $3\notin M$

【分析】如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ 属于集合 $A$，记作 $a\in A$；如果 $a$ 不是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ 不属于集合 $A$，记作 $a\notin A$.

【解析】注意集合与元素的关系，正确的使用符号"$\in$"与"$\notin$". 易知 $1\in M,3\in M$.

故应选 C.

【评析】集合与元素之间的关系只能是属于和不属于的关系，即对于集合 $A$ 和某一个元素 $x$，有一个明确的判断标准，即是 $x\in A$，还是 $x\notin A$，两者必居其一，且仅居其一.

**变式探究**

给出下列命题：

① $\mathbf{N}$ 中最小的元素是 1；

② 若 $a\in\mathbf{N}$，则 $-a\notin\mathbf{N}$；

③ 若 $a\in\mathbf{N},b\in\mathbf{N}$，则 $a+b$ 的最小值是 2.

其中所有正确命题的个数为（　）

A. 0 个　B. 1 个　C. 2 个　D. 3 个

**学点三** 集合中元素的性质

已知由 $1,x,x^2$ 三个实数构成一个集合，求 $x$ 应满足的条件.

【分析】$1,x,x^2$ 是集合中的三个元素，则它们是互不相等的.

【解析】根据集合中元素的互异性，得 $\begin{cases}x\neq 1\\x^2\neq 1,\\x\neq x^2\end{cases}$

所以 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq\pm1$ 且 $x\neq 0$.

【评析】解决这类问题的主要依据是集合中元素的性质特征——互异性，列出两两元素的关系式求解，通常要用到分类讨论.

**变式探究**

集合 $\{3,x,x^2-2x\}$ 中，$x$ 应满足的条件是______.

**学点四** 集合的表示

用列举法表示下列集合：

(1) $A=\{x\mid x=|x|,x\in\mathbf{Z}$ 且 $x<8\}$；

(2) $B=\left\{x\mid x=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b},a,b\text{ 为非零实数}\right\}$；

(3) $C=\left\{x\mid \dfrac{6}{3-x}\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{N}_+\right\}$.

【分析】(1) 根据 $x$ 的范围解方程；(2) 根据绝对值的意义化简；(3) 所求的 $x$ 要满足两个条件：① $x$ 是正整数；② 使 $\dfrac{6}{3-x}$ 是整数.

【解析】(1) $\because x=|x|$，$\therefore x\geqslant 0$，

又 $\because x\in\mathbf{Z}$ 且 $x<8$，

$\therefore\{x\mid x=|x|,x\in\mathbf{Z}$ 且 $x<8\}$ 用列举法表示为 $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

(2) 当 $a>0,b>0$ 时，$x=2$；当 $a<0,b<0$ 时，$x=-2$；当 $a,b$ 异号时，$x=0$.

$\therefore B=\{-2,0,2\}$.

(3) 由题意，知 $3-x=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$，$\therefore x=0,-3,1,2,4,5,6,9$，又 $\because x\in\mathbf{N}_+$，

$\therefore C=\{1,2,4,5,6,9\}$.

【评析】掌握集合的两种表示形式的关系和转化.

**变式探究**

用适当的方法表示下列集合：

(1) 方程组 $\begin{cases}2x-3y=14\\3x+2y=8\end{cases}$ 的解集；

(2) 1 000 以内被 3 除余 2 的正整数所组成的集合；

(3) 直角坐标平面上在第二象限内的点所组成的集合；

(4) 所有的正方形；

(5) 直角坐标平面上在直线 $x=1$ 和 $x=-1$ 两侧的点所组成的集合.

**学点五** 数集的应用

用符号"$\in$"或"$\notin$"填空：

$1$____$\mathbf{N}$，$-1$____$\mathbf{N}^*$，$-3$____$\mathbf{N}$，$0.5$____$\mathbf{N}$，$\sqrt{3}$\_\_\_\_$\mathbf{N}$；

$1$____$\mathbf{Z}$，$0$____$\mathbf{Z}$，$-3$____$\mathbf{Z}$，$0.5$____$\mathbf{Z}$，$\sqrt{2}$\_\_\_\_$\mathbf{Z}$；

$1$____$\mathbf{Q}$，$0$____$\mathbf{Q}$，$-3$____$\mathbf{Q}$，$0.5$____$\mathbf{Q}$，$\sqrt{2}$\_\_\_\_$\mathbf{Q}$；

$1$____$\mathbf{R}$，$0$____$\mathbf{R}$，$-3$____$\mathbf{R}$，$0.5$____$\mathbf{R}$，$\sqrt{2}$\_\_\_\_$\mathbf{R}$.

【分析】元素在集合中时，用符号"$\in$"，而元素不在集合中时，用符号"$\notin$".

【解析】$1\in\mathbf{N}$，$-1\notin\mathbf{N}^*$，$-3\notin\mathbf{N}$，$0.5\notin\mathbf{N}$，$\sqrt{3}\notin\mathbf{N}$；$1\in\mathbf{Z}$，$0\in\mathbf{Z}$，$-3\in\mathbf{Z}$，$0.5\notin\mathbf{Z}$，$\sqrt{2}\notin\mathbf{Z}$；$1\in\mathbf{Q}$，$0\in\mathbf{Q}$，$-3\in\mathbf{Q}$，$0.5\in\mathbf{Q}$，$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$；$1\in\mathbf{R}$，$0\in\mathbf{R}$，$-3\in\mathbf{R}$，$0.5\in\mathbf{R}$，$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$.

【评析】数集的范围不明或数集的符号记忆错误是出错的主要原因.

**变式探究**

用符号"$\in$"或"$\notin$"填空：

(1) $0$____$\mathbf{N}^*$；$\sqrt{5}$\_\_\_\_$\mathbf{Z}$；$(-1)^0$____$\mathbf{N}^*$.

(2) $2\sqrt{3}$____$\{x\mid x<\sqrt{11}\}$；$3\sqrt{2}$____$\{x\mid x>4\}$；

$\sqrt{2}+\sqrt{5}$____$\{x\mid x\leqslant 2+\sqrt{3}\}$.

(3) $3$____$\{x\mid x=n^2+1,n\in\mathbf{N}^*\}$；

$5$____$\{x\mid x=n^2+1,n\in\mathbf{N}^*\}$.

(4) $(-1,1)$____$\{y\mid y=x^2\}$；

$(-1,1)$____$\{(x,y)\mid y=x^2\}$.

学点六 集合的应用

已知集合 $A=\{x \mid ax^2+2x+1=0\}$.

(1) 若 $A$ 中只有一个元素,求 $a$ 的取值范围;

(2) 若 $A$ 中至少有一个元素,求 $a$ 的取值范围;

(3) 若 $A$ 中至多有一个元素,求 $a$ 的取值范围.

【分析】理解"只有""至少""至多"的准确含义是解本题的关键.

【解析】(1) $A$ 中只有一个元素 $\Leftrightarrow$ 方程 $ax^2+2x+1=0$ 只有一解.

若 $a\neq 0$,则 $\Delta=0$,解得 $a=1$,此时 $x=-1$.

若 $a=0$,则 $x=-\frac{1}{2}$.

∴ 当 $a=0$ 或 $a=1$ 时,$A$ 中只有一个元素.

(2)① 当 $A$ 中只有一个元素时,由(1)知 $a=0$ 或 $a=1$;

② 当 $A$ 中有两个元素时,需满足条件 $\begin{cases}a\neq 0,\\ \Delta>0.\end{cases}$

得 $a<1$ 且 $a\neq 0$.

综上,得 $a\leqslant 1$.

(3) $A$ 中至多有一个元素 $\Leftrightarrow$ 方程 $ax^2+2x+1=0$ 至多有一解.

∴ $\begin{cases}\Delta=4-4a\leqslant 0\\ a\neq 0\end{cases}$ 或 $a=0$,

∴ $a\geqslant 1$ 或 $a=0$.

∴ 当 $a\geqslant 1$ 或 $a=0$ 时,$A$ 中至多有一个元素.

【评析】本题应用一元二次方程有关根的讨论,将集合语言转化为方程解的问题.本题难点在于如何将集合中元素个数转化为方程系数所需要的条件.

变式探究

已知数集 $A$ 满足条件:若 $a\in A$,则 $\frac{1}{1-a}\in A\ (a\neq 1)$.

(1) 若 $2\in A$,试求出 $A$ 中其他所有元素;

(2) 自己设计一个数属于 $A$,再求出 $A$ 中其他所有元素;

(3) 从(1)(2)中你能发现什么规律,并论证你的发现.

难点清障

1. 解题时如何利用集合中元素的性质?

集合中元素的确定性、互异性、无序性是集合中元素的三个重要性质,要充分理解和认识三个性质,掌握其规律.如在解有关集合相等时,集合中元素间存在相等关系,元素顺序是一个重要因素,利用元素的无序性,可解决此问题.另外在解决了表示集合元素的字母后,应代回集合中检验互异性.

2. 集合的列举法和描述法是如何转换的?

集合的表示形式主要有两种:列举法和描述法.当需要转换表示形式时,可这样实施,由描述法到列举法,只需把满足特征性质的所有元素一一写出来即可,而完成由列举法到描述法时,需由列出的元素找规律,常常用归纳、猜测、计算等方法,要注意元素的一些限制条件.

规律指津

1. 集合和元素是两个不同的概念,符号"$\in$"和"$\notin$"是表示元素和集合关系的.如 $\{1\}\in\{1,2,3\}$ 的写法是错误的,而 $\{1\}\in\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ 的写法就是正确的.

2. 解题时要特别关注集合元素的三个性质,特别是互异性,要进行解题后的检验.

3. 注意将数学语言与集合语言进行相互转化.

4. 列举法与描述法各有其优点,应该根据具体问题确定采用哪种表示法.列举法有直观、明了的优点,但有些集合是不能用列举法表示出来的,如满足 $x>3$ 的 $x$ 的集合.描述法是把集合中元素所具有的特征性质描述出来,具有抽象、概括、普遍性的优点,表示一个集合可认为是进行如下的过程:

$$\text{列举法}\ \underset{\text{根据特征性质找出具体元素}}{\overset{\text{由对元素规律的观察概括出特征性质}}{\rightleftharpoons}}\ \text{描述法}.$$

## 精题大淘金

一、选择题

1. 给出三个命题:① 集合 $\{a,b\}$ 可以写成 $\{b,a\}$;② 方程 $4x^2-4x+1=0$ 的解集可表示为 $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$;③"很小的数"构成一个集合.其中正确命题的个数是 ( )

A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 3个

2. 设 $P,Q$ 为两个非空实数集合,定义集合 $P+Q=\{a+b \mid a\in P,b\in Q\}$.若 $P=\{0,2,5\}$,$Q=\{1,2,6\}$,则 $P+Q$ 中元素的个数是 ( )

A. 9个 B. 8个 C. 7个 D. 6个

3. 由元素 1,2,3 组成的集合是 ( )

A. $\{x=1,2,3\}$

B. $\{x=1,x=2,x=3\}$

C. $\{x \mid x\in \mathbf{N}_+,x<4\}$

D. {6的质因数}

4. 集合 $M=\{(x,y) \mid xy<0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 是 ( )

A. 第一象限内的点集

B. 第三象限内的点集

C. 第四象限内的点集

D. 第二、四象限内的点集

5. 已知集合 $S=\{a,b,c\}$ 中的3个元素是 $\triangle ABC$ 的三边长,那么 $\triangle ABC$ 一定不是 ( )

A. 锐角三角形 B. 直角三角形

C. 钝角三角形 D. 等腰三角形

6. 若 $-3\in\{a-3,2a-1,a^2-4\}$,则实数 $a=$ ( )

A. 0 B. 1 C. 0或1 D. $\pm 1$

7. 直角坐标系中,坐标轴上的点的集合可表示为 ( )

A. $\{(x,y) \mid x=0,y\neq 0$ 或 $x\neq 0,y=0\}$

B. $\{(x,y) \mid x=0$ 且 $y=0\}$

C. $\{(x,y) \mid xy=0\}$

D. $\{(x,y) \mid x,y$ 不同时为零$\}$

8. 有下列结论：

① 集合$\{x \mid ax+b=0\}$是单元素集合；

② 集合$\{x \mid x^2-2x+1=0\}$有两个元素；

③ 集合$\left\{x \mid \frac{100}{x} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{Z}\right\}$为无限集(元素个数无限的集合).

正确结论的个数是 ( )

A. 0个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

9. 如果方程$ax^2+2x+1=0$有负根，则$a$的取值范围是 ( )

A. $\{a \mid 0<a\leqslant 1\}$

B. $\{a \mid a\leqslant 1\}$

C. $\{a \mid 0<a\leqslant 1$或$a<0\}$

D. $\{a \mid 0\leqslant a\leqslant 1\}$

10. 已知$x,y,z$为非零实数，代数式$\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{|xyz|}{xyz}$的值所组成的集合是$M$，则下列判断正确的是 ( )

A. $0\notin M$ B. $2\in M$ C. $-4\notin M$ D. $4\in M$

二、填空题

11. 下列集合是有限集(集合有有限个元素)的为________(只填正确答案序号).

① 不超过10的非负偶数的集合；

② 大于10的所有自然数组成的集合；

③ 方程$x^2-4=0$的解集；

④ 在平面上，到两定点$A,B$距离相等的点的集合.

12. 可以表示方程组$\begin{cases}x+y=3\\x-y=-1\end{cases}$的解集的序号是________.

①$\{x=1,y=2\}$；②$\{1,2\}$；③$\{(1,2)\}$；④$\{(x,y) \mid x=1$或$y=2\}$；⑤$\{(x,y) \mid x=1$且$y=2\}$；⑥$\left\{(x,y) \mid \begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\right\}$；⑦$\{(x,y) \mid (x-1)^2+(y-2)^2=0\}$.

13. 已知集合$M=\left\{a \mid \frac{6}{5-a}\in \mathbf{N}，且a\in \mathbf{Z}\right\}$，则$M=$________.

三、解答题

14. 设$A$表示集合$\{2,3,a^2+2a-3\}$，$B$表示集合$\{|a+3|,2\}$，已知$5\in A$，且$5\notin B$，求$a$的值.

15. 用列举法把下列集合表示出来：

(1)$A=\left\{x\in \mathbf{N} \mid \frac{6}{6-x}\in \mathbf{N}\right\}$；

(2)$B=\left\{\frac{6}{6-x}\in \mathbf{N} \mid x\in \mathbf{N}\right\}$；

(3)$C=\{y \mid y=-x^2+4, x\in \mathbf{N}, y\in \mathbf{N}\}$；

(4)$D=\{(x,y) \mid y=-x^2+4, x\in \mathbf{N}, y\in \mathbf{N}\}$；

(5)$E=\left\{x \mid \frac{p}{q}=x, p+q=5, p\in \mathbf{N}, q\in \mathbf{N}_+\right\}$.

16. 用描述法表示下列集合：

(1) 正偶数集；

(2)$\{1,-3,5,-7,\cdots,-39,41\}$；

(3) 被3除余2的正整数的集合；

(4) 坐标平面内第一、三象限角平分线上的点的集合.

## 检测大阅兵

(20分钟，30分)

1. (5分) 下列命题：

①$\{2,3,4,2\}$是由四个元素组成的；

② 集合$\{0\}$表示仅一个数“零”组成的集合；

③ 集合$\{1,2,4\}$与$\{4,1,2\}$是同一集合；

④ 集合$\{$小于1的正有理数$\}$是一个有限集.

其中正确的是 ( )

A. ③④ B. ②③ C. ①② D. ②

2. (5分) 下列集合中表示同一集合的是 ( )

A. $M=\{(3,2)\}, N=\{(2,3)\}$

B. $M=\{3,2\}, N=\{2,3\}$

C. $M=\{(x,y) \mid x+y=1\}, N=\{y \mid x+y=1\}$

D. $M=\{1,2\}, N=\{(1,2)\}$

3. (5分) 设$5\in\{x \mid x^2-ax-5=0\}$，则集合$\{x \mid x^2-4x-a=0\}$中所有元素之和为________.

4. (5分) 已知集合$A=\{x \mid x^2+px+q=x\}$，集合$B=\{x \mid (x-1)^2+p(x-1)+q=x+3\}$，当$A=\{2\}$时，则集合$B=$________.

5. (10分) 已知集合$A=\{x \mid kx^2-8x+16=0\}$只有一个元素，试求实数$k$的值，并用列举法表示集合$A$.

# 学案 2 集合间的基本关系

## 要点大整合

### 知识清仓

1. 一般地，对于两个集合 $A,B$，如果集合 $A$ 中任意一个元素都是集合 $B$ 中的元素，我们就说这两个集合有包含关系，称集合 $A$ 为集合 $B$ 的________，记作________.

2. (1) 对于两个集合 $A,B$，若________，且________，则称集合 $A$ 与集合 $B$ 相等.

(2) 如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$，且 $x\notin A$，则称集合 $A$ 是集合 $B$ 的________，记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

(3) 不含任何元素的集合叫做________，记作________，并规定：空集是任何集合的子集.

3. 任何一个集合是它本身的________，即 $A$ ________ $A$；对于集合 $A,B,C$，如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，那么 $A$ ________ $C$.

### 基础演练

1. 设集合 $A=\{x\mid x=2n+1,n\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=2n-1,n\in \mathbf{Z}\}$，则集合 $A$ 与 $B$ 的关系为 ( )

A. $A\subsetneqq B$　　B. $B\subsetneqq A$

C. $A=B$　　D. 无法确定

2. 下列命题中，正确的是 ( )

A. 空集没有子集

B. 空集是任何一个集合的真子集

C. 空集的元素个数为零

D. 任何一个集合必有两个或两个以上的子集

3. 集合 $\{a,b\}$ 的子集个数是 ( )

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

4. 设 $A=\{x\mid 1<x<2\}$，$B=\{x\mid x<a\}$，若 $A\subsetneqq B$，则 $a$ 的取值范围是 ( )

A. $a\geqslant 2$　　B. $a\leqslant 1$　　C. $a\geqslant 1$　　D. $a\leqslant 2$

5. 若集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2,1\}$，且 $B\subseteq A$，则满足条件的实数 $x$ 的个数是________.

6. 集合 $M$ 满足 $\{a\}\subseteq M\subsetneqq\{a,b,c\}$，则集合 $M$ 有________个.

## 学点大展板

### 题型排排队

#### 学点一 集合间的关系

集合 $A=\left\{(x,y)\mid y=\dfrac{x^2-1}{x+1}\right\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid y=x-1\}$，集合 $A,B$ 有什么关系？

【分析】本题主要考查集合与集合之间关系的判断能力.

【解析】集合 $A$ 的元素是函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1(x\neq -1)$ 图象上的点，是一条直线上去掉了点 $(-1,-2)$ 后剩余的所有点，集合 $B$ 的元素是函数 $y=x-1(x\in \mathbf{R})$ 图象上的所有点.

显然，集合 $A$ 的所有元素都在集合 $B$ 中，即有 $A\subseteq B$，而集合 $A\neq B$，所以有 $A\subsetneqq B$，即 $A$ 是 $B$ 的真子集.

【评析】判断 $A$ 是否为 $B$ 的真子集应严格执行两步：一是 $A\subseteq B$，即 $A$ 的元素全在 $B$ 中；二是 $A\neq B$，即 $B$ 中至少有一个元素不在 $A$ 中，两者缺一不可.

**变式探究**

判断下列集合 $A$ 与 $B$ 的关系：

(1) $A=\{x\mid 0<x<5\}$，$B=\{x\mid -1<x<5\}$；

(2) $A=\{(x,y)\mid xy>0\}$，$B=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$；

(3) $A=\{a\in \mathbf{R}\mid a\geqslant 0\}$，$B=\{a\in \mathbf{R}\mid$ 方程 $x^2+x-a=0$ 有实根$\}$.

#### 学点二 子集

写出集合 $\{a,b,c\}$ 的子集.

【分析】按集合中元素的个数分类写，以防遗漏、重复.

【解析】(1) $\varnothing$；

(2) 一个元素的子集：$\{a\},\{b\},\{c\}$；

(3) 两个元素的子集：$\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$；

(4) 三个元素的子集：$\{a,b,c\}$.

综上，$\{a,b,c\}$ 的子集有 $\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$.

【评析】(1) 写出集合的所有子集时，一定按顺序、规律写出，避免遗漏或重复；(2) 一般地，如果一个集合有 $n$ 个元素，则子集有 $2^n$ 个，非空子集有 $2^n-1$ 个.

**变式探究**

已知集合 $M=\{a,b,c,d\}$，$N=\{P\mid P\subseteq M\}$，则集合 $N$ 的元素个数为 ( )

A. 4 个　　B. 8 个　　C. 16 个　　D. 32 个

#### 学点三 集合的相等

含有三个实数的集合可表示为 $\left\{a,\dfrac{b}{a},1\right\}$，也可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$，求 $a,b$.

【分析】依题意所给两个集合相等，依集合相等的条件列式求解，但应注意元素的顺序可以不同.

【解析】由集合中元素的确定性，得

$$\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}=\{a^2,a+b,0\} \quad ①$$

从而有 $0\in\left\{a,\dfrac{b}{a},1\right\}$.

$\because a\neq 0$，

$\therefore \dfrac{b}{a}=0$，

$\therefore b=0$.

将 $b=0$ 代入①得 $\{a,0,1\}=\{a^2,a,0\}$.

易知 $a^2=1$，$\therefore a=\pm 1$.

当 $a=1$ 时，$\left\{a,\dfrac{b}{a},1\right\}=\{1,0,1\}$ 与集合中元素的互异性矛盾，舍去；

当 $a=-1$ 时，$b=0$.

$\therefore a=-1,b=0$.

【评析】两集合相等指元素个数不但相同，而且元素还完全相等，求解此类问题要注意集合性质的运用.

变式探究

已知 $M=\{2,a,b\}$，$N=\{2a,2,b^2\}$，且 $M=N$. 求 $a,b$ 的值.

学点四　子集的应用

设集合 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,a\in\mathbf{R}\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 $a$ 的值.

【分析】$B\subseteq A$ 可分为 $B\subsetneqq A$，$B=A$ 两种情况. $A=\{0,-4\}$，因此，关键是对 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的根的情况讨论.

【解析】$A=\{x\mid x^2+4x=0\}=\{-4,0\}$，

$\because B\subseteq A$，$\therefore$ 分 $B=A$，$B\subsetneqq A$ 两种情况讨论.

(1) 当 $A=B$ 时，$B=\{-4,0\}$，

即 $-4,0$ 是方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的两根，于是得 $a=1$.

(2) 当 $B\subsetneqq A$ 时，若 $B=\varnothing$，则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，解得 $a<-1$；若 $B\neq\varnothing$，则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=0$，解得 $a=-1$，

验证知 $B=\{0\}$ 满足条件.

综上可知，所求实数 $a$ 的值为 $a=1$ 或 $a\leqslant -1$.

【评析】(1) 当 $B\subsetneqq A$ 时，要特别注意 $B=\varnothing$ 的情况不能漏掉，否则就会得出 $a=\pm 1$ 的错误结论.

(2) 分类讨论要结合实际，做到不重、不漏. 此题既有集合的讨论，又有一元二次方程根的讨论，有时需对结果进行验证.

变式探究

设集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid ax-2=0\}$，若 $B\subsetneqq A$，求实数 $a$ 组成的集合.

## 难点清障

**1. 本学案需要注意什么问题？**

本学案在学习中应注意以下几个问题：

(1) 由于空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集，所以在看到类似"$A\subseteq B$""$A\subsetneqq B$""$B\neq\varnothing$"这种相关条件时，要注意讨论 $A=\varnothing$ 和 $A\neq\varnothing$ 的情况.

(2) 要注意区分一些容易混淆的符号.

①"$\in$"与"$\subseteq$"的区别：$\in$ 表示元素与集合之间的从属关系，例如 $1\in\mathbf{N}$，$-1\notin\mathbf{N}$ 等；$\subseteq$ 表示集合与集合之间的包含关系，例如 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$，$\varnothing\subseteq\mathbf{R}$ 等.

②"$a$"与"$\{a\}$"的区别：一般地，$a$ 表示一个元素，而 $\{a\}$ 表示只有一个元素 $a$ 的集合.

③"$\{0\}$"与"$\varnothing$"的区别："$\{0\}$"是含有一个元素 0 的集合，$\varnothing$ 是不含任何元素的集合，因此，$\varnothing\subseteq\{0\}$，不能写成 $\varnothing=\{0\}$，$\varnothing\in\{0\}$.

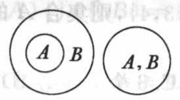
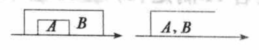
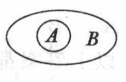
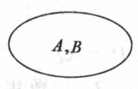
④子集、真子集的区别：如果 $A$ 是 $B$ 的子集，即 $A\subseteq B$，那么存在两种情况：一是 $A=B$，一是 $A\subsetneqq B$，二者必居其一；反之，若 $A\subsetneqq B$，也可以说 $A\subseteq B$；$A=B$ 也可以说成 $A\subseteq B$.

(3) 非空集合 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 有 $2^n$ 个子集，有 $2^n-1$ 个真子集，有 $2^n-2$ 个非空真子集.

**2. 怎样用 Venn 图和数轴来理解集合的关系？**

用 Venn 图表示集合具有直观、形象的特点，这种方法严格地说应称为示意法，有一定的局限性，但它的直观性能帮助人们思考，是集合问题的一种解法，要在后面学习中不断体会它的重要性.

图示如下：

| 概念 | Venn 图 | 数轴 |
|---|---|---|
| 子集 |  |  |
| 真子集 |  |  |
| 集合相等 |  |  |

## 规律指津

1. 理解子集、真子集的概念，正确运用有关的术语、符号和图示方法，正确区分术语"包含于"与"包含"以及符号"$\subseteq$"与"$\subsetneqq$"的不同意义.

2. 空集就是不含任何元素的集合，空集对高中数学的"危害"不亚于数"0"对初中数学的"危害"，要处处设防，时刻提高警惕，才不致于掉进空集这一陷阱之中，另外还要注意 0，$\varnothing$，$\{0\}$ 三者之间的区别和联系. 即 0 是元素，$\varnothing$，$\{0\}$ 是两个集合；$0\notin\varnothing$，$0\in\{0\}$，$\varnothing$ 和 $\{0\}$ 是两个不同的集合.

3. 掌握子集的有关性质：

(1) $\varnothing\subseteq A$（空集是任何集合的子集，当然也是空集的子集，且是任何非空集合的真子集）；

(2) $A\subseteq A$(任何非空集合$A$都有两个特殊的子集$\varnothing$,$A$);

(3) 传递性:若$A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则$A\subseteq C$;

(4) 相等:若$A\subseteq B$,且$B\subseteq A$,则$A=B$(即相等的两个集合的元素完全相同).

4. 有些集合问题比较抽象,解题时若借助Venn图进行数形分析,或利用数轴、图象采取数形结合的思想方法,往往可将问题直观化、形象化,使问题简捷的获解.

5. 对于和实数有关的集合问题,借助于数轴将集合语言转化为图形语言,观察图形使问题获解. 可见,数形结合思想是解决数学问题的重要思想方法.

## 精题大淘金

一、选择题

1. 已知集合$A=\{x\in \mathbf{Z}\mid 2x^2-x-1=0\}$,满足条件$B\subseteq A$的所有集合$B$的个数为 ( )

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

2. 设$A=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$,$B=\{x\mid x>a\}$,若$A\subsetneqq B$,则$a$的取值范围是 ( )

A. $\{a\mid a\geqslant 3\}$ B. $\{a\mid a\leqslant -1\}$
C. $\{a\mid a>3\}$ D. $\{a\mid a<-1\}$

3. 已知集合$A=\{x\mid -3<x\leqslant 5\}$,$B=\{x\mid a+1\leqslant x<4a+1\}$,若$B\subsetneqq A$,则实数$a$的取值范围是 ( )

A. $0<a\leqslant 1$ B. $a\leqslant 0$
C. $a>0$ D. $a\leqslant 1$

4. 若$A=\{x\mid 1<x<2\}$,$B=\{x\mid x^2>0\}$,则$A$,$B$的关系是 ( )

A. $A\not\subseteq B$ B. $B\subsetneqq A$ C. $A=B$ D. $A\subsetneqq B$

5. 集合$A=\{x\mid 0\leqslant x<3,x\in \mathbf{N}\}$的真子集个数为( )

A. 16个 B. 8个 C. 7个 D. 4个

6. 集合$A$满足$\{1\}\subsetneqq A\subsetneqq\{1,2,3,4\}$,则集合$A$的个数为 ( )

A. 5个 B. 6个 C. 8个 D. 15个

7. 已知集合$A=\{(x,y)\mid y=|x|\}$,集合$B=\{(x,y)\mid x\in \mathbf{R},y>0\}$,则$A$与$B$的关系是 ( )

A. $A\subsetneqq B$ B. $A\subseteq B$
C. $B\subsetneqq A$ D. 以上答案都不对

8. 设集合$P=\{m\mid -1<m<0\}$,$Q=\{m\in \mathbf{R}\mid mx^2+4mx-4<0$对任意实数$x$恒成立$\}$,则下列关系成立的是 ( )

A. $P\subsetneqq Q$ B. $Q\subsetneqq P$ C. $P=Q$ D. $P\not\subseteq Q$

9. 数集$M=\{x\mid x=(2n+1)\pi,n\in \mathbf{Z}\}$与数集$N=\{x\mid x=(4k\pm 1)\pi,k\in \mathbf{Z}\}$之间的关系是 ( )

A. $M\subsetneqq N$ B. $M=N$ C. $N\subsetneqq M$ D. $M\not\subseteq N$

10. 集合$A=\{x\mid 0\leqslant x<4$,且$x\in \mathbf{N}^*\}$的非空真子集的个数是 ( )

A. 16个 B. 8个 C. 6个 D. 7个

二、填空题

11. 若$\{x\mid 2x-a=0\}\subsetneqq\{x\mid -1<x<3\}$,则$a$的取值范围是______.

12. 已知集合$A=\{x\in \mathbf{R}\mid ax^2-5x+6=0\}$,若集合$A$至少有一个非空子集,则实数$a$的取值范围是______.

13. 已知集合$A=\{-1,3,2m-1\}$,集合$B=\{3,m^2\}$,若$B\subseteq A$,则实数$m=$______.

14. 设$A$,$B$为两个集合. 下列三个命题:

①$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意$x\in A$,有$x\in B$;

②$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$;

③$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 存在$x\in A$,使得$x\notin B$.

其中正确命题的序号是______.(把符合要求的命题序号都填上)

15. 集合$A=\{x\mid x=a^2-4a+5,a\in \mathbf{R}\}$,$B=\{y\mid y=4b^2+4b+3,b\in \mathbf{R}\}$,则$A$与$B$的关系为______.

三、解答题

16. 设$A=\{x,x^2,xy\}$,$B=\{1,x,y\}$,且$A=B$,求$x^{2009}+y^{2010}$的值.

17. 设$A=\{x\mid x^2-8x+15=0\}$,$B=\{x\mid ax-1=0\}$,若$B\subseteq A$,求实数$a$组成的集合.

## 检测大阅兵

(20分钟,30分)

1. (5分)如果集合$A=\left\{x\mid x>\frac{1}{2}\right\}$,那么①$0\subseteq A$;②$\varnothing\subseteq A$;③$\{0\}\subsetneqq A$;④$\mathbf{N}\subseteq A$;⑤$\left\{\frac{1}{3}\right\}\subsetneqq A$,以上各式中正确的个数是 ( )

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

2. (5分)设$A=\{0,a\}$,且$B=\{x\mid x\in A\}$,则集合$A$与集合$B$的关系是 ( )

A. $A\subsetneqq B$ B. $A\subseteq B$ C. $A=B$ D. $A\in B$

3. (5分)已知$A=\{x\mid x<3\}$,$B=\{x\mid x<a\}$.

(1) 若$B\subseteq A$,则$a$的取值范围是______;

(2) 若$A\subsetneqq B$,则$a$的取值范围是______.

4. (5分)已知$A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,2\}$. 定义集合$A$,$B$之间的运算"*":$A*B=\{x\mid x=x_1+x_2,x_1\in A,x_2\in B\}$,则集合$A*B$中最大的元素是______;集合$A*B$的所有子集的个数为______.

5. (10分)已知集合$A=\{x\mid x^2+(2-a)x+1=0,x\in \mathbf{R}\}$,若$A\subseteq\{x\mid x>0\}$,求实数$a$的取值范围.

# 学案 3 集合的基本运算

## 要点大整合

### 知识清仓

1. 一般地，由所有属于集合 $A$ 或属于集合 $B$ 的元素组成的集合，称为集合 $A$ 与 $B$ 的________，记作________，即 $A\cup B=$________.

2. 一般地，由属于集合 $A$ 且属于集合 $B$ 的所有元素组成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的________，记作________，即 $A\cap B=$________.

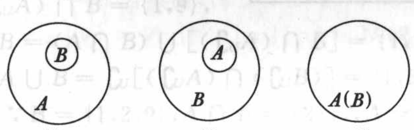
3. (1) 一般地，如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素，那么就称这个集合为________，通常记作________.

(2) 对于一个集合，由全集 $U$ 中不属于集合 $A$ 的所有元素组成的集合称为集合 $A$ 相对于全集 $U$ 的________，记作________，即 $\complement_U A=$________.

4. (1) 对于任意的集合 $A,B$，有 $A\cup A=$________，$A\cap A=$________，$A\cup\varnothing=$________，$A\cap\varnothing=$________. 若 $A\cup B=B$，则 $A$________$B$；若 $A\cap B=B$，则 $B$________$A$.

(2) 由补集的定义可知，对任意集合 $A$，有 $A\cup(\complement_U A)=$________，$A\cap(\complement_U A)=$________.

5. 用集合语言描述下面几个图：




(1) (2) (3)

(1)$A$________$B$，$A\cap B=$________，$A\cup B=$________；
(2)$A$________$B$，$A\cap B=$________，$A\cup B=$________；
(3)$A$________$B$，$A\cap B=$________，$A\cup B=$________.

### 基础演练

1. 设集合 $A=\{x\mid -5\leqslant x<1\}$，$B=\{x\mid x\leqslant 2\}$，则 $A\cup B$ 等于（　　）

A. $\{x\mid -5\leqslant x<1\}$　B. $\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 2\}$
C. $\{x\mid x<1\}$　D. $\{x\mid x\leqslant 2\}$

2. 若 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. 3　B. $\{3\}$
C. 1,2,3,4,5　D. $\{1,2,3,4,5\}$

3. 设集合 $A=\{1,2\}$，则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 $B$ 的个数是（　　）

A. 1 个　B. 3 个　C. 4 个　D. 8 个

4. 设全集 $U=\{a,b,c,d,e\}$，$A=\{c,e\}$，$B=\{a,d\}$，则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$（　　）

A. $\{a,b,d,e\}$　B. $\{a,b,c,e\}$
C. $\{a,b\}$　D. $\{a,b,c,d,e\}$

5. 设集合 $A=\{(x,y)\mid x+3y=7\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y=-1\}$，则 $A\cap B=$________.

6. 设全集 $U=\{1,3,5,7\}$，集合 $M=\{1,a-5\}$，$M\subseteq U$，$\complement_U M=\{5,7\}$，则 $a$ 的值为________.

## 学点大展板

### 题型排雷

**学点一　基本概念的考查**

已知 $U=\{1,2,3,\cdots,8\}$，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$. 求：

(1)$A\cap B$；　(2)$A\cup(\complement_U B)$；
(3)$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$；　(4)$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

【分析】由集合的交、并、补概念直接求解.

【解析】∵$U=\{1,2,3,\cdots,8\}$，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，

∴ $\complement_U A=\{5,6,7,8\}$，$\complement_U B=\{1,6,7,8\}$.

∴(1)$A\cap B=\{1,2,3,4\}\cap\{2,3,4,5\}=\{2,3,4\}$.

(2)$A\cup(\complement_U B)=\{1,2,3,4\}\cup\{1,6,7,8\}=\{1,2,3,4,6,7,8\}$.

(3)$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{5,6,7,8\}\cap\{1,6,7,8\}=\{6,7,8\}$.

(4)$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{5,6,7,8\}\cup\{1,6,7,8\}=\{1,5,6,7,8\}$.

【评析】集合的简单运算可由基本概念直接求解.

### 变式探究

已知集合 $S=\{x\mid 1<x\leqslant 7\}$，$A=\{x\mid 2\leqslant x<5\}$，$B=\{x\mid 3\leqslant x<7\}$. 求：

(1)$(\complement_S A)\cap(\complement_S B)$；
(2)$\complement_S(A\cup B)$；
(3)$(\complement_S A)\cup(\complement_S B)$；
(4)$\complement_S(A\cap B)$.

学点二 交集

已知集合$M=\{x\mid y^2=x+1\}$,$P=\{x\mid y^2=-2(x-3)\}$,那么$M\cap P=$ ( )

A. $\left\{(x,y)\mid x=\frac{5}{3},y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$

B. $\{x\mid -1<x<3\}$

C. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$

D. $\{x\mid x\leqslant 3\}$

【分析】由集合的定义,集合$M$表示方程$y^2=x+1$中$x$的范围,集合$P$表示方程$y^2=-2(x-3)$中$x$的范围,故应先化简集合$M,P$.

【解析】$\because M=\{x\mid y^2=x+1\}=\{x\mid x+1\geqslant 0\}$

$=\{x\mid x\geqslant -1\}$,

$P=\{x\mid y^2=-2(x-3)\}=\{x\mid x\leqslant 3\}$,

$\therefore M\cap P=\{x\mid x\geqslant -1$,且$x\leqslant 3\}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$.

故应选C.

【评析】理解集合的表示形式,掌握其意义,利用交集定义可解决所给问题.

变式探究

设集合$A=\{(x,y)\mid 2x+y=1,x,y\in\mathbf{R}\}$,$B=\{(x,y)\mid a^2x+2y=a,x,y\in\mathbf{R}\}$,若$A\cap B=\varnothing$,求$a$的值.

学点三 并集

设$A=\{4,5,6,8\}$,$B=\{3,5,7,8\}$,下列集合中与$A\cup B$相等的集合是 ( )

A. $\{4,5,6,7,8\}$　　B. $\{3,4,6,7,10,16\}$

C. $\{3,4,5,6,7,8,9\}$　　D. $\{3,4,5,6,7,8\}$

【分析】注意到集合$A$与集合$B$的并集的定义中:(1)集合$A\cup B$中的元素必须是集合$A$或集合$B$的元素,(2)集合$A\cup B$包含集合$A$与集合$B$中的所有元素.

【解析】A. $3\in B$,但$3\notin\{4,5,6,7,8\}$,$\{4,5,6,7,8\}\subsetneqq A\cup B$;

B. $10\notin A$,$10\notin B$,$16\notin A$,$16\notin B$,$\{3,4,6,7,10,16\}\neq A\cup B$;

C. $9\notin A$,$9\notin B$,$A\cup B\subsetneqq\{3,4,5,6,7,8,9\}$;

D. 显然$A\cup B=\{3,4,5,6,7,8\}$.

故应选D.

【评析】在判定或书写集合$A$与集合$B$的并集时,既不能遗漏元素,也不能增添元素,要严格地理解、掌握并集的定义.

变式探究

已知$A=\{x\mid x\leqslant -1$或$x\geqslant 3\}$,$B=\{x\mid a<x<4\}$,若$A\cup B=\mathbf{R}$,则实数$a$的取值范围是 ( )

A. $3\leqslant a<4$　　B. $-1<a<4$

C. $a\leqslant -1$　　D. $a<-1$

学点四 补集与全集

设$A=\{0,2,4,6\}$,$\complement_U A=\{-1,-3,1,3\}$,$\complement_U B=\{-1,0,2\}$,求$B$.

【分析】由$A\cup(\complement_U A)=U$确定全集$U$,则$B$可求.

【解析】$\because A=\{0,2,4,6\}$,$\complement_U A=\{-1,-3,1,3\}$,

$\therefore U=\{-3,-1,0,1,2,3,4,6\}$,

又$\because \complement_U B=\{-1,0,2\}$,$\therefore B=\{-3,1,3,4,6\}$.

【评析】解决与补集有关的问题时,应明确全集是什么,同时注意补集的有关性质:$\complement_U\varnothing=U$,$\complement_U U=\varnothing$,$\complement_U(\complement_U A)=A$等.

变式探究

设全集$U=\{2,3,a^2+2a-3\}$,$A=\{|2a-1|,2\}$,且$\complement_U A=\{5\}$,求实数$a$的值.

学点五 交集的应用

已知集合$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$,$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$,若$A\cup B=A$,求实数$m$的取值范围.

【分析】由$A\cup B=A$得$A\supseteq B$,故应从$B\subseteq A$入手讨论,但考虑到$B$是$A$的子集,因此,不要忘记$B=\varnothing$的情况.

【解析】由题意,$A\cup B=A$,$\therefore B\subseteq A$.

(1) 若$B=\varnothing$,则$m+1>2m-1$,即$m<2$,此时总有$A\cup B=A\cup\varnothing=A$成立.

(2) 若$B\neq\varnothing$,则$\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\-2\leqslant m+1,\\2m-1\leqslant 5,\end{cases}$

解得$2\leqslant m\leqslant 3$.

综合(1)(2)知,$m$的取值范围是$\{m\mid m<2\}\cup\{m\mid 2\leqslant m\leqslant 3\}=\{m\mid m\leqslant 3\}$.

【评析】由$A\cup B=A$可得$B\subseteq A$,而$B\subseteq A$包括两种情况,即$B=\varnothing$和$B\neq\varnothing$.本题常犯的错误是把$B=\varnothing$漏掉而只讨论$B\neq\varnothing$这一种情况.

**变式探究**

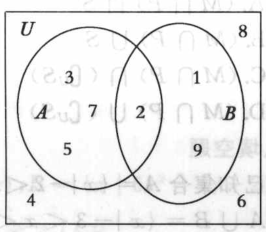
设集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，$A\cap B=\{-3\}$，求实数 $a$ 的值.

**学点六** Venn 图的应用

若集合 $U=\{x\mid x$ 是小于 10 的正整数$\}$，$A\subseteq U$，$B\subseteq U$，且 $(\complement_U A)\cap B=\{1,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{4,6,8\}$，试求 $A$ 与 $B$.

【分析】关于集合的交、并、补的问题，通常可以由分析法找出集合中一定有或一定没有的元素，对它们逐一检验；或利用 Venn 图，把元素一一放入图中相应位置，从而写出所求集合.

【解析】解法一：利用 Venn 图，在图中标出各个元素的相应位置，可以直接写出 $A$ 与 $B$，$A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{1,2,9\}$.




解法二：$\because A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{1,9\}$，

$\therefore B=(A\cap B)\cup[(\complement_U A)\cap B]=\{1,2,9\}$.

$\because A\cup B=\complement_U[(\complement_U A)\cap(\complement_U B)]=\{1,2,3,5,7,9\}$，

又 $\because B=\{1,2,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\therefore A=\{2,3,5,7\}$.

【评析】事实上，在解决这类问题时，将 Venn 图的使用与分析法相结合更准确简捷.

**变式探究**

设 $A,B$ 都是不超过 8 的正整数组成的全集 $U$ 的子集，$A\cap B=\{3\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,8\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{4,6\}$，求集合 $A,B$.

**学点七** 集合运算的应用

已知集合 $S=\{1,3,x^3+3x^2+2x\}$，$A=\{1,|2x-1|\}$，如果 $\complement_S A=\{0\}$，则这样的实数 $x$ 是否存在？若存在，求出 $x$；若不存在，说明理由.

【分析】解决此问题的关键是正确理解 $\complement_S A=\{0\}$ 的意义，它有两层含义，即 $0\in S$，但 $0\notin A$，这样解题思路就清楚了.

【解析】$\because \complement_S A=\{0\}$，$\therefore 0\in S$，但 $0\notin A$，

$\therefore x^3+3x^2+2x=0$，即 $x(x+1)(x+2)=0$，

解得 $x_1=0$，$x_2=-1$，$x_3=-2$.

当 $x=0$ 时，$|2x-1|=1$，$A$ 中已有元素 1，不满足集合的性质；

当 $x=-1$ 时，$|2x-1|=3$，$3\in S$；

当 $x=-2$ 时，$|2x-1|=5$，但 $5\notin S$.

$\therefore$ 实数 $x$ 的值存在，且它只能是 $-1$.

【评析】解答此题时，我们由 $\complement_S A=\{0\}$ 求出 $x_1=0$，$x_2=-1$，$x_3=-2$ 之后，验证其是否符合题目的隐含条件 $A\subsetneqq S$ 是必要的，否则就会误认为 $x_1=0$ 或 $x_3=-2$ 也是所求的实数 $x$，从而得出错误的结论. 集合概念及其基本理论是近、现代数学的最基础的内容之一，学好这部分知识的目的之一就是在于应用. 因此，一定要学会读懂集合的语言和符号，并能运用集合的观点研究、判断和处理简单的实际问题.

**变式探究**

设 $A,B$ 是两个非空集合，定义 $A$ 与 $B$ 的差集为 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

(1) 试举出两个数集 $A,B$，求它们的差集；

(2) 差集 $A-B$ 与 $B-A$ 是否一定相等？并说明你的理由；

(3) 已知 $A=\{x\mid x>4\}$，$B=\{x\mid |x|<6\}$，求 $A-(A-B)$ 及 $B-(B-A)$，由此你可以得到什么更一般的结论？(不必证明)

## 难点清障

1. 在解题时如何用好集合语言?

解集合问题,不仅仅是运用集合语言,更重要的是明确集合语言所蕴含的真实的数学含义,集合语言的转换过程,实质就是在进行数学问题的等价转换时,向着我们熟悉的能够解决的问题转化.

2. 在学习时应注意什么问题?

(1) 对于交集、并集、全集、补集等概念的理解,要注意教材中的实例和 Venn 图的直观作用.

(2) 要善于将三者进行比较记忆,找出它们之间的联系与区别.

(3) 注意在集合运算中,运用 Venn 图,借助于数轴等几何方法直观理解.

(4) 学会集合语言的运用,并逐渐学会用集合的观点研究事物的内涵与外延.

3. 怎样理解全集和补集?

全集并非包罗万象,含有任何元素的集合,它仅仅含有我们所要研究的问题中所涉及的所有元素,如研究方程实根,全集取为 $\mathbf{R}$;研究整数,全集取为 $\mathbf{Z}$.同时,要理解补集的定义的用法.

## 规律指津

1. 交集与并集是集合的两种不同运算,对它们概念的理解要特别注意"且"与"或"的区别. 交集和并集的符号"$\cap$""$\cup$"既有相同的地方,但又完全不同,不要混淆.

2. 对于交集"$A\cap B=\{x\mid x\in A,且x\in B\}$",不能简单地认为 $A\cap B$ 中的任一元素都是 $A$ 与 $B$ 的公共元素,或者简单地认为 $A$ 与 $B$ 的公共元素都属于 $A\cap B$,这是因为并非任何两个集合总有公共元素.

3. 对于并集"$A\cup B=\{x\mid x\in A,或x\in B\}$",不能简单地理解为 $A\cup B$ 是由 $A$ 的所有元素与 $B$ 的所有元素组成的集合,这是因为 $A$ 与 $B$ 可能有公共元素.

4. Venn 图在研究集合与元素、集合与集合关系中有广泛的应用,它主要体现在用图示帮助我们加强问题的理解,是数形结合在集合中的具体体现,特别是在解决列举法给出的集合运算中应用广泛.

5. 解决集合问题,应从元素入手进行分析处理. 在顺向思维受阻时,改用逆向思维,可能"柳暗花明",从这个意义上讲,补集思想具有转换研究对象的功能,这是转化思想的又一体现.

## 精题大淘金

一、选择题

1. 已知全集 $I=\{x\in\mathbf{N}_+\mid -2<x<9\}$,$A=\{3,4,5\}$,$B=\{1,3,6\}$,那么 $\{2,7,8\}=$ ( )

A. $A\cup B$　　B. $A\cap B$

C. $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)$　　D. $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)$

2. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,$P=\{1,2,3,4,5\}$,$Q=\{3,4,5,6,7\}$,则 $P\cap(\complement_U Q)=$ ( )

A. $\{1,2\}$　　B. $\{3,4,5\}$

C. $\{1,2,6,7\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

3. 已知集合 $P=\{x\in\mathbf{N}\mid 1\leqslant x\leqslant 10\}$,集合 $Q=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+x-6=0\}$,则 $P\cap Q$ 等于 ( )

A. $\{2\}$　　B. $\{3\}$　　C. $\{-2,3\}$　　D. $\{-3,2\}$

4. 设集合 $A=\{x\mid |x-2|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y\mid y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant 2\}$,则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$ 等于 ( )

A. $\mathbf{R}$　　B. $\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$

C. $\{0\}$　　D. $\varnothing$

5. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,集合 $S=\{1,3,5\}$,$T=\{3,6\}$,则 $\complement_U(S\cup T)$ 等于 ( )

A. $\varnothing$　　B. $\{2,4,7,8\}$

C. $\{1,3,5,6\}$　　D. $\{2,4,6,8\}$

6. 已知全集 $U=\mathbf{R}$,且 $A=\{x\mid |x-1|>2\}$,$B=\{x\mid x^2-6x+8<0\}$,则 $(\complement_U A)\cap B$ 等于 ( )

A. $\{x\mid -1\leqslant x<4\}$　　B. $\{x\mid 2<x<3\}$

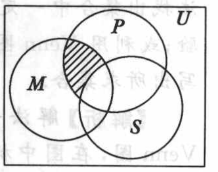
C. $\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$　　D. $\{x\mid -1<x<4\}$

7. 设集合 $P=\{1,2,3,4,5,6\}$,$Q=\{x\in\mathbf{R}\mid 2\leqslant x\leqslant 6\}$,那么下列结论正确的是 ( )

A. $P\cap Q=P$　　B. $P\cap Q\supsetneqq Q$

C. $P\cup Q=Q$　　D. $P\cap Q\subsetneqq P$

8. 如图,$U$ 是全集,$M$,$P$,$S$ 是 $U$ 的 3 个子集,则阴影部分所表示的集合是 ( )




A. $(M\cap P)\cap S$

B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap(\complement_U S)$

D. $(M\cap P)\cup(\complement_U S)$

二、填空题

9. 已知集合 $A=\{x\mid -2<x<5\}$,$A\cap B=\{x\mid 1\leqslant x<5\}$,$A\cup B=\{x\mid -3<x<5\}$,则集合 $B=$______.

10. 设 $U=\mathbf{R}$,$M=\{x\mid |x|<3\}$,$N=\{y\mid y\neq 2\}$,则 $M\cap(\complement_U N)=$______.

11. 设集合 $A=\{x\mid -4\leqslant x<2\}$,$B=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$,$C=\{x\mid x\geqslant a\}$.若 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$,则 $a$ 的取值范围是______.

三、解答题

12. 已知 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x\mid ax-2=0\}$,且 $A\cup B=A$,求实数 $a$ 的值组成的集合 $C$.