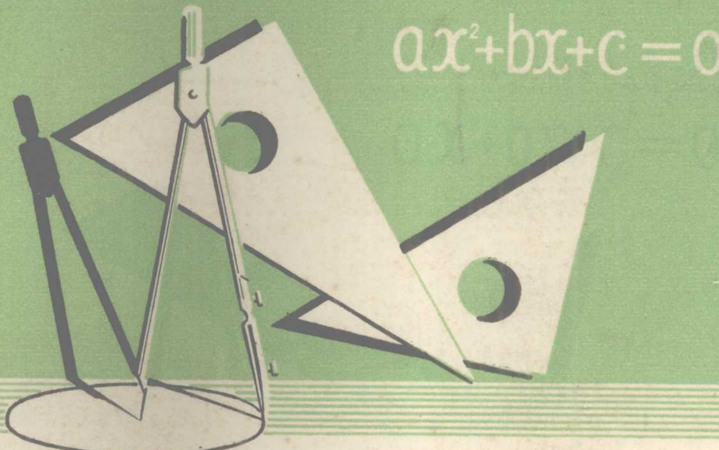


贵州省中学试用课本

数学

SHUXUE

高中第四册

目　　录

第十一章　坐 标 法

第十二章　直　　线

第十三章 圆锥曲线

第十四章　排列、组合与二项式定理*

---

* 本章内容，各校可根据具体情况选用.

第十一章　坐标法

一切事物都是对立的统一，数学中的形与数这对矛盾也是对立的统一．同学们已经知道：在平面内建立了直角坐标系，对这个平面内的任意一点P，有一对有顺序的实数(x, y)作为它的坐标；反过来，对任意一对有顺序的实数(x, y)，可在平面内找到一点P，以这对实数为坐标．这样，点与数这对矛盾通过直角坐标系，就可以互相转化，我们就可把研究数的方法和研究形的方法结合起来，这种把形与数结合起来的研究方法叫做坐标法（也叫做解析法）．本章就来介绍这种方法．

一　两点间的距离公式

已知两点P、Q的坐标是(x_1, y_1)和(x_2, y_2)（图 11-1），试求两点间的距离PQ.

设P、Q两点在坐标轴上的投影分别为P_x、P_y，Q_x、Q_y，R为直线PP_y与QQ_x的交点．在直角三角形PRQ中，

$$PQ^2=PR^2+RQ^2.$$

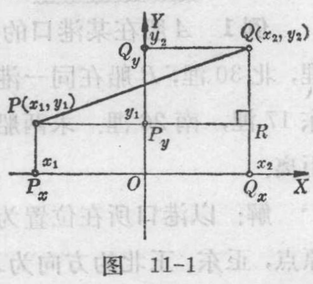


图　11-1

$\because \quad PR=P_xQ_x=P_xO+OQ_x=-x_1+x_2=x_2-x_1,$

$\quad\quad RQ=P_yQ_y=OQ_y-OP_y=y_2-y_1,$

$\therefore \quad PQ^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$

因此，

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

这个公式叫做两点间的距离公式，对平面内任意两点P、Q，不管它们的位置如何都是适用的.

特别地，当Q是坐标原点时(图 11-2)，任意一点$P(x, y)$与坐标原点O间的距离是

$$OP=\sqrt{x^2+y^2}.$$

若P、Q都在X轴上，则P、Q的坐标分别是$(x_1, 0)$、$(x_2, 0)$，这时P、Q间的距离是

$$PQ=|x_2-x_1|.$$

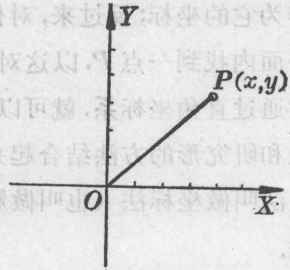


图 11-2

若P、Q都在Y轴上，则P、Q的坐标分别是$(0, y_1)$、$(0, y_2)$，这时P、Q间的距离是

$$PQ=|y_2-y_1|.$$

例 1 A船在某港口的东 50 浬，北 30 浬；B船在同一港口的东 17 浬，南 26 浬. 求两船间的距离.

解： 以港口所在位置为坐标原点，正东、正北的方向为X轴、

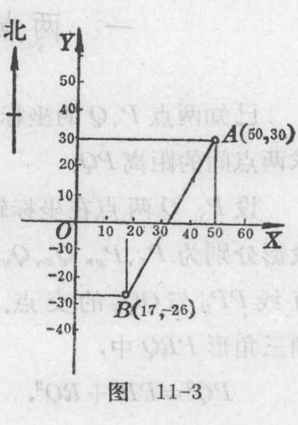


图 11-3

Y 轴的正方向，作直角坐标系．则 A、B 二船的坐标分别是：$A(50,\ 30)$、$B(17,\ -26)$（图 11-3）．

应用两点间的距离公式，得

$$AB=\sqrt{(50-17)^2+(30+26)^2}$$
$$=65(\text{浬}).$$

答：A、B 两船相距 65 浬．

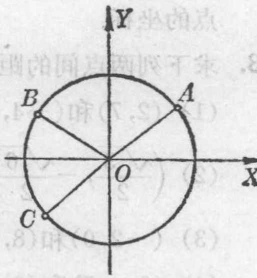


图 11-4

例 2 求证三点 $A(a\cos\theta_1,\ a\sin\theta_1)$、$B(a\cos\theta_2,\ a\sin\theta_2)$、$C(a\cos\theta_3,\ a\sin\theta_3)$ 都在以原点 O 为圆心的同一个圆上 $(a>0)$．

证明：$\because\quad OA=\sqrt{(a\cos\theta_1)^2+(a\sin\theta_1)^2}=a,$

$$OB=\sqrt{(a\cos\theta_2)^2+(a\sin\theta_2)^2}=a,$$
$$OC=\sqrt{(a\cos\theta_3)^2+(a\sin\theta_3)^2}=a,$$

$\therefore\quad OA=OB=OC.$

即 A、B、C 三点都在以 O 为圆心，半径长是 a 长度单位的圆上（图 11-4）．

习　题　一

1. 在直角坐标系中，作出 $A(2,3)$、$B(-2,3)$、$C(-2,-3)$、$D(2,-3)$ 四点，并回答：

(1) A、B 关于 Y 轴有什么关系？

(2) A、D 关于 X 轴有什么关系？

(3) A 与 C、B 与 D 关于坐标原点有什么关系？

2. 分别写出 $A(4,\ -3)$ 关于 X 轴、Y 轴和关于原点 O 的对称

点的坐标.

3. 求下列两点间的距离:

(1) $(2,7)$和$(-4,-1)$;

(2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$和$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$;

(3) $(-2,0)$和$(8,0)$;

(4) $(0,-5)$和$(0,4)$;

(5) $(6,0)$和$(0,5)$;

(6) $(\sqrt{3},\sqrt{13})$和$(0,0)$.

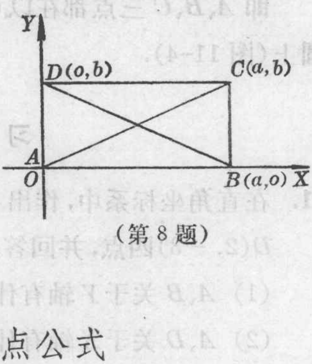
4. 我舰在某灯塔西5浬、北7浬，敌舰在同一灯塔东4浬、南5浬. 问敌舰离我舰多少浬?

5. 已知$\triangle ABC$的三个顶点是$A(-a, 0)$、$B(a, 0)$、$C(0,\sqrt{3}a)$. 求证这个三角形是等边三角形.

6. 动点$P(x,y)$离$Q(-3,4)$的距离是5, x和y应满足什么条件?

7. 动点$P(x, y)$离$A(1, 1)$、$B(1, 3)$的距离相等，它的坐标应满足什么条件?

8. 用坐标法证明矩形$ABCD$的对角线相等.



(第8题)

二　定比分点公式

已知P、Q两点的坐标为(x_1,y_1)与(x_2,y_2), R为线段PQ上

一点(R 与 P、Q 都不重合，R 叫做 PQ 的内分点)，R 分 PQ 所成两段 PR、RQ 的比为 $\lambda(\lambda>0)$. 求内分点 R 的坐标 (x, y).

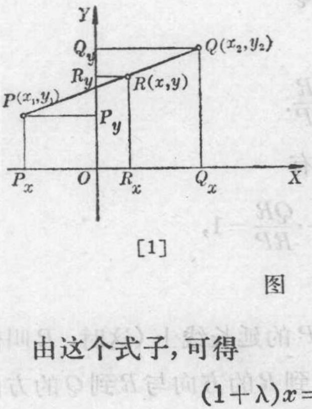
设 P、Q、R 三点在坐标轴上的投影分别为 P_x、P_y，Q_x、Q_y，R_x、R_y，有

$$\frac{P_xR_x}{R_xQ_x}=\frac{PR}{RQ}=\lambda \text{ (见图 11-5[1])},$$

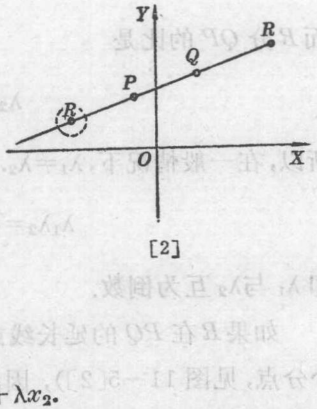
而 $\quad P_xR_x=P_xO+OR_x=-x_1+x,$

$$R_xQ_x=OQ_x-OR_x=x_2-x,$$

$$\therefore \quad \frac{-x_1+x}{x_2-x}=\lambda.$$



[1]



[2]

图 11-5

由这个式子，可得

$$(1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2.$$

$$\therefore \quad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

同理 $\quad y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$

因此，分 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$ 的连线所成的比为 λ 的分点坐标是:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

这个公式叫做**定比分点公式**.

特别地，当 R 是 PQ 的中点时，$\lambda=1$，PQ 的中点的坐标为:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

需注意的是 R 分 PQ 的比与 R 分 QP 的比是不同的. 因为，R 分 PQ 的比是

$$\lambda_1=\frac{PR}{RQ},$$

而 R 分 QP 的比是

$$\lambda_2=\frac{QR}{RP}.$$

所以，在一般情况下，$\lambda_1\neq\lambda_2$. 而有

$$\lambda_1\lambda_2=\frac{PR}{RQ}\cdot\frac{QR}{RP}=1,$$

即 λ_1 与 λ_2 互为倒数.

如果 R 在 PQ 的延长线或 QP 的延长线上（这时，R 叫做外分点，见图 11－5〔2〕)，因为 P 到 R 的方向与 R 到 Q 的方向相反，所以 R 外分 PQ 的比规定为

$$\lambda=-\frac{PR}{QR}.$$

对于外分点，定比分点公式仍然成立，R 分 PQ 的比与 R 分 QP 的比也是互为倒数. 以后，我们记住：R 为内分点时，λ 为正，R 为外分点时，λ 为负；反过来，λ 为正时，R 为内分点，

λ 为负时，R 为外分点.

例 1 P_1 和 P_2 的坐标分别为 $(-1,-6)$ 和 $(3,0)$. 延长 P_2P_1 到 P，使 $P_1P=\frac{1}{3}P_2P_1$（图 11-6），求 P 点的坐标.

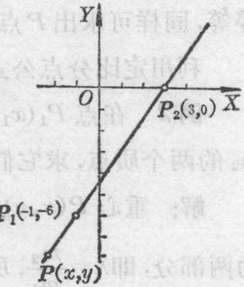


图 11-6

解：

方法一. 把 P_1 看作 P_2P 的内分点，比值

$$\lambda=\frac{P_2P_1}{P_1P}=3.$$

设 P 点的坐标为 (x,y)，则

$$-1=\frac{3+3x}{1+3},$$

$$-6=\frac{0+3y}{1+3}.$$

由这两个式子，得 $x=-2\frac{1}{3}$，$y=-8$，P 点的坐标为 $\left(-2\frac{1}{3},-8\right)$.

方法二. 把 P 点看作 P_2P_1 的外分点，比值

$$\lambda=-\frac{P_2P}{P_1P}=-\frac{P_2P_1+P_1P}{P_1P}=-\frac{3P_1P+P_1P}{P_1P}=-4.$$

设 P 点的坐标为 (x,y)，则

$$x=\frac{3+(-4)\cdot(-1)}{1+(-4)}=-2\frac{1}{3},$$

$$y=\frac{0+(-4)\cdot(-6)}{1+(-4)}=-8.$$

所以，P 点的坐标是$\left(-2\frac{1}{3}, -8\right)$.

除上述方法外，用其他方法，如把 P_1 当作 PP_2 的内分点等等，同样可求出 P 点的坐标.

利用定比分点公式可以求出质点系的重心.

例2 在点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 上分别放置质量是 m_1、m_2 的两个质点，求它们的重心的坐标.

解：重心 $P(x, y)$ 把线段 P_1P_2 分成与质量 m_1、m_2 成反比的两部分，即$\lambda=\frac{m_2}{m_1}$，所以

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{y_1+\frac{m_2}{m_1}y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}.$$

因此，重心的坐标为$\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\right)$.

例3 在点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$ 上分别放置质量是 m_1、m_2、m_3 的三个质点，求它们的重心的坐标.

解：先求由 P_1、P_2 两质点构成的质点系的重心. 设它们的重心为 $Q(x', y')$，则由例 2，得

$$\begin{cases} x'=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}, \\ y'=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}. \end{cases}$$

再求由质量为 m_1+m_2 的质点 Q 与质量为 m_3 的质点 P_3 组成的质点系的重心. 设这个重心为 $P\ (x, y)$，则又由例 2，得

$$\begin{cases} x=\dfrac{(m_1+m_2)\cdot\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}+m_3x_3}{(m_1+m_2)+m_3}, \\ y=\dfrac{(m_1+m_2)\cdot\dfrac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}+m_3y_3}{(m_1+m_2)+m_3}. \end{cases}$$

$$\text{即}\begin{cases} x=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}, \\ y=\dfrac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}. \end{cases}$$

由物理学我们知道 P_1、P_2、P_3 三质点组成的质点系的重心与 Q、P_3 两质点组成的质点系的重心相同. 这样，所求的重心是

$$P\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}, \frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}\right).$$

"由于特殊的事物是和普遍的事物联结的，由于每一个事物内部不但包含了矛盾的特殊性，而且包含了矛盾的普遍性，普遍性即存在于特殊性之中，……". 上述求重心坐标的方法，不仅对两个、三个质点组成的质点系适用，对任意多个质点组成的质点系也都适用. 质量分别为 m_1、m_2、m_3、……m_n 的质点，如把它们分别放在 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$、……$P_n(x_n, y_n)$ 上，则它们重心的坐标是

$$\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n}, \frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n}\right).$$

习　题　二

1. 什么叫做线段的内分点？什么叫做线段的外分点？设 λ 是 R 分 PQ 的比，当 R 为 PQ 的内分点时，λ 可取那些值？当 R 在 PQ 的延长线上时，λ 可取那些值？当 R 在 QP 的延长线上时，λ 又可取那些值？

2. 已知 $P_1P_2=5$ 厘米，分别写出点 R 分 P_1P_2 所成的比 λ:

   (1) R 在线段 P_1P_2 上，且 $P_1R=2$ 厘米；

   (2) R 在 P_1P_2 的延长线上，且 $P_2R=4$ 厘米；

   (3) R 在 P_2P_1 的延长线上，且 $RP_1=10$ 厘米.

3. P 点分 P_1P_2 的比与 P 点分 P_2P_1 的比有没有区别？这两个比值有什么关系？

4. 已知 P_1、P_2 的坐标分别是 $(2,3)$、$(5,7)$，点 R 分 P_1P_2 的比 $\lambda=\frac{1}{3}$，求分点 R 的坐标.

5. 求连结下列两点的线段中点的坐标:

   (1) $A(7,4)$、$B(3,2)$；

   (2) $P_1(6,-4)$、$P_2(-2,-2)$；

   (3) $M(-3,1)$、$N(-2.8,6.4)$；

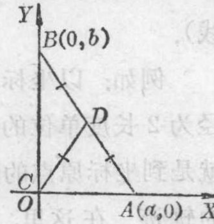
   (4) $P(a,1)$、$Q(1,a)$.

6. 已知 P_1、P_2 的坐标分别是 $(2,3)$、$(5,7)$，点 R 分 P_1P_2 的比 $\lambda=-2$，求分点 R 的坐标.

7. 三角形的三个顶点是 $A(2,1)$、$B(2,3)$、$C(0,-1)$，求这个三角形三条中线的长.

提示：先求三角形各边中点的坐标.

8. 用解析法证明：直角三角形斜边的中点到三个顶点的距离相等.

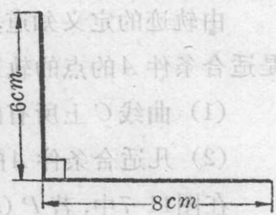


（第 8 题）

9. 在点 $A(2,3)$ 和 $B(-7,0)$ 上分别放有质量是 5 克和 4 克的两个质点，求它们的重心的坐标.

10. 在三点 $M_1(2,3)$、$M_2(-3,8)$、$M_3(-5,0)$ 上分别放有质量是 2 克、3 克和 5 克的三个质点，求它们的重心的位置.

11. 两条均匀的细铁棒分别长 6 厘米、8 厘米，连结成直角，求它们的重心的位置.



（第 11 题）

三　曲线与方程

通过直角坐标系，我们已建立了平面内的点与有序实数对之间的对应关系. 通过直角坐标系，我们还可以建立平面曲线与二元方程之间的对应关系. 这样，研究平面曲线就可转化为研究二元方程；反过来，研究二元方程也可转化为研究平面曲线.

1. 曲线的方程

客观上存在的各种形象的线，使我们有了曲线的概念. 在数学中，一条曲线 C 可以看作是适合某个条件 A 的动点的轨

迹（在这种意义下，曲线包括了直线）.

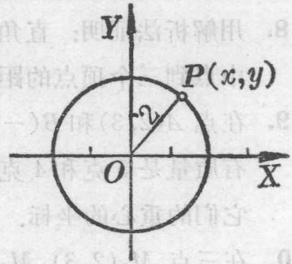


图 11-7

例如：以坐标原点为圆心，半径为 2 长度单位的圆 O（图11-7），就是到坐标原点的距离是 2 的动点的轨迹. 在这里，圆 O 是曲线 C，到原点的距离是 2 就是条件 A.

由轨迹的定义知道，若曲线 C 是适合条件 A 的点的轨迹，下面两件事都成立：

(1) 曲线 C 上所有的点都适合条件 A;

(2) 凡适合条件 A 的点都在曲线 C 上.

在图11-7中，若 $P(x, y)$ 是圆 O 上任意一点，条件 A 就是

$$OP=2.$$

应用两点间的距离公式，得

$$\sqrt{x^2+y^2}=2.$$

两边平方，化为

$$x^2+y^2=4. \qquad (A)$$

这个式子是含未知量 x、y 的二元方程. 这样，我们就把圆 O 上的点所满足的条件 A 表示为方程 (A). 因此，圆 O 也可以看作是坐标满足方程(A)的动点的轨迹.

通常，一条平面曲线 C 所满足的条件 A，可以表示为曲线上点的坐标所适合的一个二元方程. 以后我们用 $f(x, y)=0$ 表示关于 x 和 y 的一个一般的二元方程.

定义 二元方程 $f(x, y)=0$ 称为曲线 C 的方程，指：

(1) 曲线C上任意一点$P(x, y)$的坐标都适合方程$f(x, y)=0$;

(2) 凡坐标适合方程$f(x, y)=0$的点，都在曲线C上.

例如，在初中我们知道到二定点A和B等距离的点的轨迹是AB的垂直平分线. 若A点的坐标是$(0, 0)$, B点的坐标是$(2a, 0)$，我们求AB的垂直平分线l_1的方程(图 11-8).

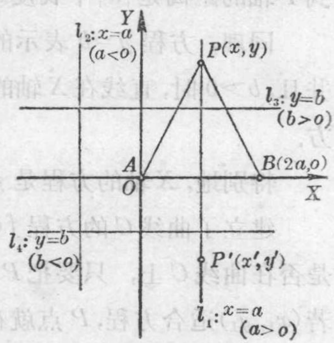


图 11-8

设$P(x, y)$是l_1上任意一点，则

$$PA=PB.$$

应用两点间的距离公式，得

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-2a)^2+y^2}.$$

两边平方并化简，得

$$x=a. \tag{A}$$

反过来，若点$P'(x', y')$的坐标满足(A)，即

$$x'=a.$$

按照上面化简的步骤推回去，就可得到

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{(x'-2a)^2+y'^2},$$

即 $P'A=P'B$.

所以，P'在AB的垂直平分线上.

因此，方程

$$x=a$$

是AB的垂直平分线的方程.