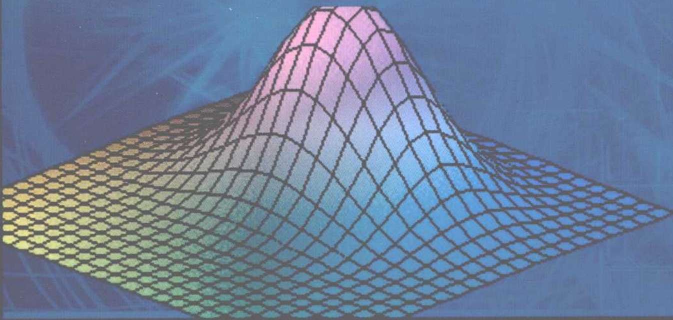
21世纪普通高等学校数学系列规划教材



高等数学

（医药类）

安国斌　主　编
李淑霞　卢小青　张文艺　副主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21世纪普通高等学校数学系列规划教材

高等数学

（医药类）

主　编　安国斌

副主编　李淑霞　卢小青　张文艺

编　者　（按姓氏笔画为序）

卢小青　田如玉　安国斌　关树明

李淑霞　张文艺　张文才　周建平

中国铁道出版社

CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

全书共十章，内容包括极限与连续、一元函数微积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数、线性代数、概率论等。本书结构合理，逻辑严谨，内容精练，例题丰富，力求体现医药类专业的特点，内容由浅入深、前后呼应，便于学生学习和使用。

本书适合作为高等医药类院校各专业本科生教材，也可作为医务工作者的自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：医药类/安国斌主编．—北京：中国铁道出版社，2009.8
（21 世纪普通高等学校数学系列规划教材）
ISBN 978-7-113-10133-6

Ⅰ.高… Ⅱ.安… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 133820 号

书　　名： 高等数学（医药类）
作　　者： 安国斌　主编

策划编辑： 李小军
责任编辑： 李小军　姚文娟　　**编辑部电话：**（010）63583215
封面设计： 付　巍　　**封面制作：** 白　雪
责任印制： 李　佳

出版发行： 中国铁道出版社（北京市宣武区右安门西街 8 号　　邮政编码：100054）
印　　刷： 三河市华丰印刷厂
版　　次： 2009 年 8 月第 1 版　　2009 年 8 月第 1 次印刷
开　　本： 787×960　1/16　　**印张：** 20.5　　**字数：** 416 千
书　　号： ISBN 978-7-113-10133-6/O・194
定　　价： 29.00 元

前　　言

随着现代科学技术的发展和电子计算机的应用与普及，数学方法在医药学中的应用日益广泛和深入。医药学科逐步由传统的定性描述向定性、定量分析相结合的方向发展。数学方法为医药科学研究的深入发展提供了强有力的工具。无论是基础医学还是临床医学，都日益广泛地应用数学方法，因此数学对医药学科的渗透与结合成为现代医药学领域的显著特征。由此而形成的生物医学工程学、药物代谢动力学、计量诊断学等边缘学科显示了强大的生命力。医用生物数学方法已成为现代医学研究的重要基础工具。

为贯彻高等医药类院校大学数学课程教学内容与体系结构改革的指导思想，落实面向21世纪教学内容与体系结构改革的精神，培养学生良好的科学思维方式，提高学生的综合素质与能力，使学生掌握解决实际问题的方法与技能，为学习后续课程打下必要的数学基础，我们结合多年的教学经验编写了此教材。力求将教学实践经验与教学内容相结合，体现联系医药实际、深化概念、注重应用、重视创新的教改思想。

全书共十章，包括极限与连续、一元函数微积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数、线性代数、概率论等内容。我们在编写过程中力求结合医学院校实际，内容少而精，重点突出，注重讲述基本概念、基本原理和基本方法。书末附有习题参考答案及简单积分表、标准正态分布表、数学简明汉英名词对照表。本书适合作为高等医药类院校各专业本科生教材，也可作为医务工作者的自学参考书。

由于时间仓促，书中难免有疏漏或不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2009年5月

目　　录

第 1 章

函数、极限与连续

函数(function)是高等数学(Higher Mathematics)的主要研究对象。极限概念是微积分学(Calculus)的理论基础,极限是高等数学的基本研究方法。通过极限,人们才可能以高于初等数学的观点和方法来研究函数,引起从常量数学到变量数学质的飞跃。本章将介绍函数极限的基本内容,并由此引入连续函数的概念和性质。

1.1 函 数

1.1.1 函数基础知识

1. 函数的概念

在观察各种自然现象或实验过程中,常常会遇到各种不同的量,在过程中不断运动和变化的量称为变量(variable)。而这种运动和变化往往都是相互联系,彼此制约的。反映在数量上,就是变量与变量之间的依赖关系,即函数关系。

例 1 外界环境温度对人体代谢率的影响可表达如下:

环境温度/℃	…	4	10	20	30	38	…
代谢率(%)	…	60	44	40	40.5	54	…

其中每一对数值可以在直角坐标系中找到相应的点,于是便得到 A、B、C、D、E 五点,见图 1-1。医学中常用折线把它们连接起来,这时环境温度和代谢率两个变量之间的相互影响关系从图中便一目了然。环境温度太低或太高对代谢率的影响较大,只有温度在 20℃左右,代谢率最低且比较稳定。故临床做"基础代谢率"时,就要保持室温在 20℃左右的条件下进行。

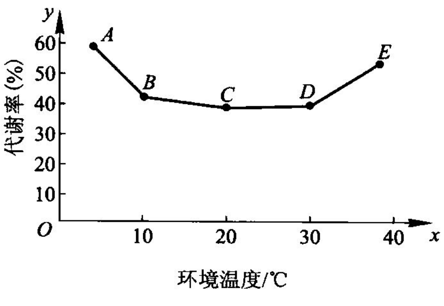


图 1-1

例 2 对某糖尿病患者作葡萄糖耐糖试验,每

千克体重口服葡萄糖 1.75g 后,测定血糖结果如下:

口服葡萄糖后时刻 t/h	0	0.5	1	2	3
患者血糖水平 y/mg	200	230	250	255	240

例 3 医生给婴儿看病,给药应视体重而异,在 1~6 个月范围内婴儿体重有如下经验公式:

$$y=3+0.6x$$

其中 x 的单位为月份,y 的单位为千克(kg)。

上述三例说明,参与同一过程的两个变量之间都存在着某种确定的对应关系。在这种关系下,第一个变量取定了某一个数值,第二个变量也相应地取定某一个数值,抛开变量的具体意义,就可以抽象出函数的概念。

定义 1 设 x 与 y 是某个变化过程中的两个变量,若变量 x 在它可能取值范围内所取的每一个值,变量 y 依照一定的对应规律 f,都有唯一确定的值与其对应,则称变量 y 为变量 x 的(一元)**函数**,记为

$$y=f(x) \tag{1.1}$$

其中 x 称为**自变量**(independent variable),y 称为**因变量**(dependent variable),对应规律 f 称为**函数关系**(functional relation)(也可用 g,φ 等表示)。

函数常用的表示方法有:**解析法**(或公式法),如 $S=\pi R^2$ 及 $y=x^2+1$ 等;**列表法**,如对数表,三角函数表及由某些实验得到的观测数据表等;**图像法**如心电图,脑电图及自动记录仪记录的气温曲线等。

如果当自变量 x 取某一值 x_0 时,函数具有唯一确定的对应值,则称函数在 x_0 处有定义。使函数有定义的自变量的取值范围称为函数的**定义域**(domain of definition)。把以 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ **邻域**(neighborhood),记为 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 或 $|x-x_0|<\delta$。在点 x_0 的 δ 邻域内,去掉 x_0 点所得到的开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ **去心邻域**(deleted neighborhood),记为

$$x_0-\delta<x<x_0,x_0<x<x_0+\delta \text{ 或 } 0<|x-x_0|<\delta$$

所说函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,即指存在某个正数 δ,使得 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内每一点都有定义。

一般地,函数的定义域应由问题的实际意义来确定。例如,物体自由落体的运动方程 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域为 $\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$(其中 h 为落体距地面的高度);1~6 个月的婴儿体重方程 $y=3+0.6x$ 的定义域为 $[1,6]$。当函数用纯粹的解析式给出时,其定义域就是使该解析式有意义的自变量的取值范围。

例 4 求 $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域。

解　要使函数有意义，必须 $4-x^2>0$，由此得函数的定义域为 $-2<x<2$，也可用区间表示为 $(-2,2)$。

例 5　求 $y=\lg(|x-3|-2)$ 的定义域。

解　要使函数有意义，必须满足 $|x-3|-2>0$，由此得函数的定义域为 $x>5$ 或 $x<1$，用区间可表示为 $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$。

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 在定义域中取定一值 x_0 时，$f(x)$ 的对应值叫做函数当 $x=x_0$ 时的**函数值**(value of function)，记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$。

例如，设 $f(x)=x^2-x+1$，则 $f(2)=2^2-2+1=3$；$f(a+1)=(a+1)^2-(a+1)+1=a^2+a+1$；$f\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1}{a}+1=\frac{a^2-a+1}{a^2}(a\neq 0)$。

函数值的全体称为函数的**值域**(range)。

以上所述函数是**单值函数**(monotropic function)，即自变量 x 在定义域内每取一值时，y 只有一个确定的值与之对应。如果 y 有两个或两个以上的值与之对应，则称 y 为 x 的**多值函数**(multivalued function)。例如 $y=\mathrm{Arcsin}\ x$，$y=\pm\sqrt{x}$ 都是多值函数。遇到多值函数时可以分成单值分支和取主支处理，例如 $y=\pm\sqrt{x}$ 分成 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$；$y=\mathrm{Arcsin}\ x$ 取单值支 $\left(\text{即把其值限制在闭区间}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\text{上}\right)$，记为 $y=\arcsin x$。如不特殊指出时，本书主要讨论单值函数。

2. 分段函数

在实际问题的研究中，一个函数关系有时需要用几个式子来表示。

定义 2　在定义域内的不同范围上，对应规律用不同的解析式来表示的函数，称为**分段函数**(piecewise function)。

例如，$y=|x|=\begin{cases}x & \text{当 } x\geqslant 0\\ -x & \text{当 } x<0\end{cases}$　及　$y=\begin{cases}2 & \text{当 } x>0\\ 0 & \text{当 } x=0\\ x-2 & \text{当 } x<0\end{cases}$　均为分段函数。

在求分段函数的函数值时，应将不同范围的自变量的值代入相应的函数表达式。

例如，符号函数 $y=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0\\ 0 & \text{当 } x=0,\\ -1 & \text{当 } x<0\end{cases}$　所以 $x=-2,2,0$ 点函数值为

$\mathrm{sgn}(-2)=-1$，$\mathrm{sgn}(2)=1$，$\mathrm{sgn}(0)=0$。

又如，在生理学研究中，有人根据测得血液中胰岛素浓度 $C(t)$ 随时间 t(分钟)的变化数据，建立了如下经验公式

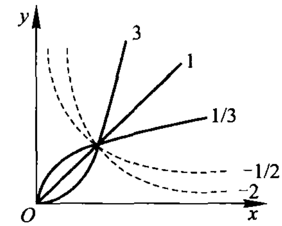
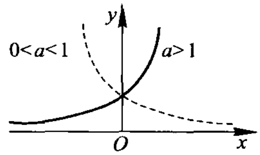
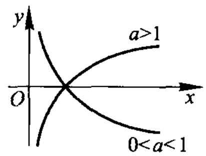
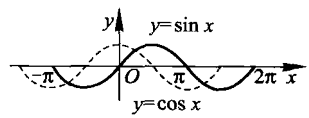
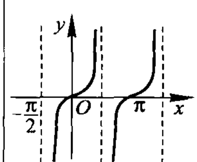
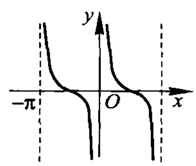
$$C(t)=\begin{cases}t(10-t) & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant 5\\ 25\mathrm{e}^{-k(t-5)} & \text{当 } 5<t\end{cases}$$

其中 $k=\dfrac{\ln 2}{20}$，显然浓度 $C(t)$ 是时间 t 的分段函数，其定义域为 $[0,+\infty)$，且 $t=2,10$ min 函数值为 $C(2)=2(10-2)=16$，$C(10)=25e^{-k(10-5)}=25e^{-5k}$。

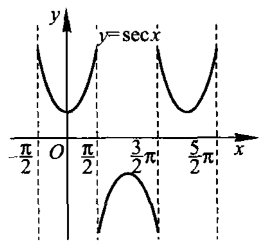
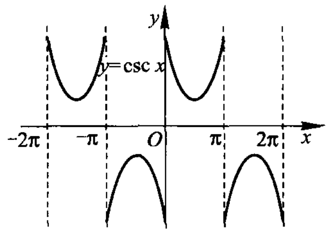
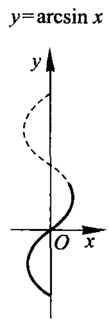
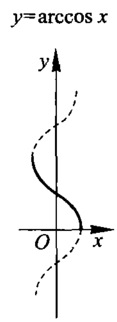
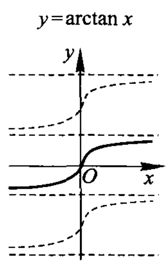
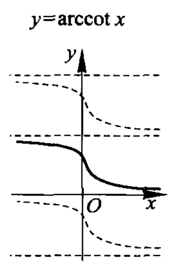
3. 基本初等函数

中学里学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**(fundamental elementary function)。归纳为表 1-1。

表 1-1

类别及解析式		定义域	值域	图形
幂函数 $y=x^{\mu}$	$\mu>0$ μ 次抛物线	因 μ 而异，但 $[0,+\infty)$ 是公共定义域	因 μ 而异，但 $[0,+\infty)$ 是公共值域	 $y=x^{\mu}$ （x 在第一象限）
	$\mu<0$ 令 $\mu=-m(m>0)$ $y=x^{-m}=\dfrac{1}{x^m}$， m 次双曲线	公共定义域为 $(0,+\infty)$	公共值域为 $(0,+\infty)$	
指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$		$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	 $y=a^x(a>0,a\neq1)$
对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$		$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$
三角函数				
正弦函数 $y=\sin x$		$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
余弦函数 $y=\cos x$		$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
正切函数 $y=\tan x$		$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$	$(-\infty,+\infty)$	 $y=\tan x$
余切函数 $y=\cot x$		$x\neq n\pi$ $(n=0,\pm1,\cdots)$	$(-\infty,+\infty)$	 $y=\cot x$

续表

类别及解析式	定义域	值　域	图　形
正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$	$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $n=0,\pm1,\cdots$	$(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$	
余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$	$(n\pi-\pi,n\pi)$ $n=0,\pm1,\cdots$	$(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$	
反三角函数			
反正弦函数 $y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	
反余弦函数 $y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	
反正切函数 $y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	
反余切函数 $y=\text{arccot}\ x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	

4. 复合函数

定义 3　若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，则称 y 是 x 的**复合函数**(compound function)，记为

$$y=f(\varphi(x)) \tag{1.2}$$

其中 u 称为中间变量。

例如，$y=\sin u, u=\sqrt{x}$经复合可以得到 y 关于 x 的复合函数 $y=\sin\sqrt{x}$。

以上是两个函数的“嵌套”关系构成的复合函数，不难将其推广到有限个函数的层层“嵌套”关系构成的复合函数。例如，由 $y=u^2, u=\arctan v, v=e^x$ 可以复合成 y 关于 x 的复合函数 $y=(\arctan e^x)^2$。

但需注意，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数。例如，$y=\arcsin u$ 及 $u=x^2+2$ 就不能复合成一个复合函数。因为函数 $u=x^2+2$ 的值域为$[2,+\infty)$，在此区间上 $y=\arcsin u$ 没有意义。

我们不仅要学会把若干个函数“复合”成一个复合函数，而且要善于把一个复合函数“分解”成若干个简单的函数。例如，$y=\sqrt{\lg(x^2-1)}$可以看成是由 $y=\sqrt{u}, u=\lg v, v=x^2-1$ 复合而成的；而 $y=2^{2\sin^2(x+1)}$ 可以看成是由 $y=2^u, u=2v^2, v=\sin w, w=x+1$ 复合而成的。注意：要从外到里层层分解，分解到简单函数为止，所谓**简单函数**(simple function)，是指基本初等函数或者是常数与基本初等函数经过四则运算后得出的函数。这种分解在下面的微分运算中经常用到。

5. 反函数

定义 4　设给定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$，且 y 与 x 之间一一对应，如果把 y 当作自变量，x 当作函数，则由关系式 $y=f(x)$所确定的函数 $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$，称为函数 $f(x)$的**反函数**(inverse function)。

由反函数的定义可见，如果 $x=\varphi(y)$是 $y=f(x)$的反函数，则 $y=f(x)$也是 $x=\varphi(y)$的反函数，所以 $y=f(x)$和 $x=\varphi(y)$互为反函数。

例如，对于函数 $y=f(x)=3x+4$，可得 $x=\varphi(y)=\frac{y-4}{3}$，因而函数 $y=3x+4$ 的反函数为 $\varphi(y)=f^{-1}(y)=\frac{y-4}{3}$。

函数 $y=f(x)$与其对应的反函数 $x=\varphi(y)$的图形关于直线 $y=x$ 对称。

6. 初等函数

定义 5　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合所构成的由一个解析式表达的函数，称为**初等函数**(elementary function)。

例如，多项式函数 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，有理分式函数 $y=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$，无理函数 $y=\sqrt{\cot 3x}+e^{x+1}$等都是初等函数。但需注意，有的分段函数虽然不是初等函数，可它在每一段上均为初等函数。

本书所讨论的函数绝大多数都是初等函数。

1.1.2　函数的几种简单特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果存在一个正数 M，使对所有的 $x\in(a,b)$，恒有

$|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的。如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的。

例如，$\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的；$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内是有界的，但在 $(0,1)$ 内是无界的。

2. 单调性

设 x_1、x_2 是函数 $f(x)$ 的定义区间 (a,b) 内的任意两点，且 $x_1<x_2$，若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调递增的；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调递减的。

例如，2^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调递增的；x^2 在 $(-\infty,0)$ 内是单调递减的，而在 $(0,+\infty)$ 内是单调递增的。

3. 奇偶性

如果对于函数 $f(x)$ 定义域内的任意点 x，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；如果对于函数 $f(x)$ 定义域内的任意点，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。偶函数的图像是关于 y 轴对称的，而奇函数的图像是关于坐标原点对称的。

例如，x^2-2x^4，$\cos x$ 都是偶函数；$\sin x$，$x+x^3$ 都是奇函数。

4. 周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在正的常数 T，使得 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，满足这个等式的最小正数 T，称为函数的周期。

例如，$\sin x$，$\cos x$ 都是周期函数，周期为 2π。

1.2 函数的极限

1.2.1 函数极限的概念

函数的极限是描述在自变量的某个变化过程中，对应的因变量的变化趋势。由于数列 $\{x_n\}$ 可以看做是自然数 n 的函数，即 $x_n=f(n)$，所以可类似数列极限来描述函数极限的概念。对于数列 $\{x_n\}$ 只需研究当自变量 n 无限增大(即 $n\to\infty$)时，因变量 x_n 的变化趋势。其定义如下：

定义 1 对于数列 $\{x_n\}$，如果存在一个常数 A，当 n 无限增大时，数列 $\{x_n\}$ 中的项 x_n 无限趋近于 A(即 $|x_n-A|$ 要多小有多小，趋近于零)，则称常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的**极限**(limit)，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=A \text{ 或 } x_n\to A \quad (n\to\infty) \tag{1.3}$$

例如，考察以下几个数列的变化趋势