教育部推荐教材

大学数学基础

主　编　许丽萍

JIAOYUBU TUIJIAN JIAOCAI

DAXUE SHUXUE JICHU

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

教育部推荐教材

大学数学基础

主　编　许丽萍
参　编　赵翠勤　李小申
　　　　高克权　秦志新

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学基础/许丽萍主编.—北京：北京师范大学出版社，2009.8
ISBN 978-7-303-10062-0

Ⅰ.大… Ⅱ.许… Ⅲ.高等数学－高等学校－教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 123947 号

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：北京东方圣雅印刷有限公司
装　　订：三河万利装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm×230 mm
印　　张：16.25
字　　数：268 千字
版　　次：2009 年 9 月第 1 版
印　　次：2009 年 9 月第 1 次印刷
定　　价：26.00 元

策划编辑：周光明　　责任编辑：周光明
美术编辑：李葆芬　　装帧设计：张　虹
责任校对：陈　民　　责任印制：马鸿麟

前言

本书根据普通高等院校数学课程的教学要求以及目前大学数学教育教学改革的形势而编写的。

在编写过程中，我们力求做到语言准确，例证适当，同时作者积极借鉴近年来同类教材改革的经验，并结合个人多年来教学实践的切身体会，在教材的编写时注意到了以下几个方面：

● 淡化数学理论的证明过程，突出数学的工具性，在例子的选取上体现数学与经济社会生活的紧密联系性，增强学生把数学应用到解决经济社会生活方面问题的意识和能力。

● 在重要概念、定理引入之前，深刻、简明地阐述其产生的背景及应用的总体思路，既展现了数学知识的来龙去脉，又展示了数学知识在实际生活中的体现。

● 以注解的方式对概念、定理、公式的理解和应用给出了进一步的总结，既能帮助学生深刻理解所学知识，又十分方便学生的自学。

● 注重对定理、例子中所体现的数学思想方法的概括和总结，以便学生抓住问题的实质，培养学生分析问题和解决问题的能力。

● 突出几何的直观理解，书中对于大部分定理的描述尽可能借助于几何图形来说明，以方便学生理解。

全书内容共分八章，主要包括极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、二重积分、无穷级数以及常微分方程等内容，其中第一章和第二章由河南科技大学许丽萍老师编写，第三章和第四章由洛阳理工学院赵翠勤老师编写，第五章和第六章由河南科技大学李小申老师编写，第七章和第八章由河南科技大学高克权老师编写，河南城建学院秦志新老师给出了全部的习题并完成了全部解答。全书由许丽萍老师统稿。

本书可作为普通高等院校高等数学的教学用书，也可供成人高等教育高等数学教学用书。在每章均安排有适量的习题，我们还把答案附于书后，以方便学生检测学习效果和巩固相关知识。

由于我们水平有限，书中难免出现疏漏、错误和不足之处，恳请各位专家、同行和广大读者批评指正。

编　者

2009 年 5 月

目录

Contents

第一章　微积分的柱石——函数、极限与连续

在自然界、人类社会和人们的思维领域，运动和变化无处不在，因而刻画这种运动与变化的量与量之间依赖关系的数学概念——函数也就无处不在．函数是被广泛应用的数学概念之一．在大学数学中，函数处于基础的核心地位，是本门课程要系统研究的对象，其中的连续函数则是我们重点研究的一类函数．

极限是研究函数的一个有效的方法和手段，我们将以极限为工具研究函数的各种性质，这种思想和方法贯穿了微积分的始终，并对其他学科的学习也有着深远的影响．因此，我们可以说函数、极限和连续是微积分的柱石．

§1　函数

一、函数概念

在生产实践和科学研究中，会遇到各种各样的量．在某个问题的研究过程中，保持不变的量称为常量；可以取不同数值的量称为变量，函数就是刻画变量之间相互依赖关系的数学模型，如半径为 r 的球的体积为 $V=\frac{3}{4}\pi r^3$，当 r 在 $[0, +\infty)$ 上取值时，由公式 $V=\frac{3}{4}\pi r^3$ 可得相应的 V 的值．公式 $V=\frac{3}{4}\pi r^3$ 给出了变量 V 与变量 r 之间相互依赖的一个函数关系．一般地，我们有：

定义 1　设 D 是非空数集，f 是一个对应法则，如果对每一个 $x\in D$，依照 f，有唯一确定的 $y\in \mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 是 D 上的函数．记为

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中，数集 D 称为函数 f 的定义域，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**．当 x 取 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的变量 y 的数值称为 $y=f(x)$在 x_0 的函数值，记做 $y=f(x_0)$．当自变量 x 取遍 D 中的每一个值时，所得到的因变量 y 的所有值的全体称为函数 $y=f(x)$的**值域**，记做 $f(D)$．

有关函数概念我们作以下几点说明：

(1)函数记号中的"f"也通常用 φ，g 等表示，此时函数记做 $y=\varphi(x)$，$y=g(x)$．

(2)由函数概念可以看出，函数关系和定义域是确定一个函数的两大要

素．若两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则不论用什么样的函数记号，它们都是同一个函数，如 $y=x$，$s=t$ 是同一个函数，而 $y=x$，$y=\sqrt{x^2}$ 是两个不同的函数，因为它们的定义域相同，值域不同.

(3)一般地，由数学式子表示的函数，其定义域是使数学式子有意义的自变量的全体，如函数 $y=\frac{1}{x}$ 的定义域是为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$．若由实际问题确定的函数，应根据它的实际意义确定它的定义域.

例 1 求函数 $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\ln(x+3)$ 的定义域.

解：要使函数有意义，须有

$$\begin{cases} x+3>0, \\ 4-x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3, \\ -2<x<2. \end{cases}$$

故函数的定义域为 $D=(-2, 2)$.

二、邻域

在今后的问题研究中，常常需要考虑由某点 a 附近的点组成的集合——邻域．具体来说：

定义 2 称集合 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 为以 a 为中心，以 δ 为半径的 δ **邻域**，记做 $U(a, \delta)$，这里的 a 为任意实数，$\delta>0$．即：

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta, a+\delta);$$

而称集合 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 为以 a 为中心，以 δ 为半径的**空心邻域**，记做 $\overset{0}{U}(a, \delta)$，即：

$$\overset{0}{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta, 0)\cup(0, a+\delta).$$

三、函数的表示法

为了更好地研究函数关系，我们通常用以下三种方法来表示函数：

(1)公式法(解析法)　就是用数学式子表示函数的方法．如 $y=\sqrt{1-x}$，$y=\sin x$ 等．解析法的优点在于能具体运算，便于我们从理论上研究函数，它是研究函数的最基本的方法.

(2)图像法　就是通过自变量 x 与对应的函数值所组成的有序数对 (x, y) 在坐标平面上描出相应的点所形成的轨迹来表示函数．它所表达的对应规律一般以曲线形态出现，一目了然，非常直观．如某地某日的气温 T 和时间 t 是两个变量，由气温自动记录仪描得一条曲线(如图 1-1 所示)，这个图形表示了气温 T 和时间 t(h)之间的函数关系，记录的时间范围是 $[0, 24)$．图形法的优点在于可以借助直观图形去了解函数的性质.

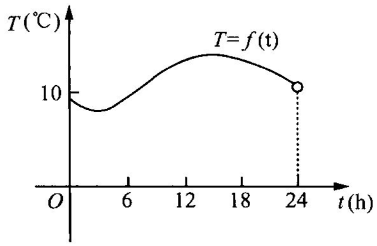


图 1-1

(3)表格法　就是把自变量 x 与因变量 y 的对应数据列成表格，它们之间的函数关系从表格上一目了然. 表格法的优点在于可以方便的从表格中查找所需的数据.

例 2　某大型超市 2009 年第一季度各月毛线的零售量(kg)如下表所示：

月份 n	1	2	3
零售量 w(kg)	90	100	67

上表表示了某大型超市 2009 年第一季度月零售量 w 与月份 n 之间的函数关系.

四、分段函数

定义 3　一个函数在定义域的不同部分用不同的解析式表示，这种函数叫做分段函数.

例 3　个人工资、薪金所得按《中华人民共和国个人所得税法》规定，超过 2000 元的部分应纳税，税率如下表所示：

超过 2000 元部分为 C(元)	税率
$0<C\leqslant 500$	5%
$500<C\leqslant 2000$	10%
$2000<C\leqslant 5000$	15%
$5000<C\leqslant 20000$	20%
$20000<C\leqslant 40000$	25%
$40000<C\leqslant 60000$	30%
$60000<C\leqslant 80000$	35%
$80000<C\leqslant 100000$	40%
$C>100000$	45%

试建立个人应纳税额与个人收入之间的函数关系式.

解：设某人某月工资薪金为 x 元，应纳个人所得税为 y 元，求 $y=f(x)$. 由上表可知

当 $x\leqslant 2000$，$y=0$；

当 $2000<x\leqslant 2500$，$y=(x-2000)\cdot 5\%$；

当 $2500<x\leqslant 4000$，$y=25+(x-2500)\cdot 10\%$；

当 $4000<x\leqslant 7000$，$y=25+150+(x-4000)\cdot 15\%$；

…

从而可以得到以下函数关系式：

$$y=f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2000\\ (x-2000)\cdot\dfrac{5}{100}, & 2000<x\leqslant 2500\\ 25+(x-2500)\cdot\dfrac{10}{100}, & 2500<x\leqslant 4000\\ 175+(x-4000)\cdot\dfrac{15}{100}, & 4000<x\leqslant 7000\\ 625+(x-7000)\cdot\dfrac{20}{100}, & 7000<x\leqslant 22000\\ 3625+(x-22000)\cdot\dfrac{25}{100}, & 22000<x\leqslant 42000\\ 8625+(x-42000)\cdot\dfrac{30}{100}, & 42000<x\leqslant 62000\\ 14625+(x-62000)\cdot\dfrac{35}{100}, & 62000<x\leqslant 82000\\ 21625+(x-82000)\cdot\dfrac{40}{100}, & 82000<x\leqslant 102000\\ 29625+(x-102000)\cdot\dfrac{45}{100}, & x>102000\end{cases}$$

它是一个表达式比较复杂的分段函数.

注：分段函数并不是几个函数，而是一个函数，只不过是在它的定义域中的不同部分用不同式子合起来表示此函数的对应法则而已. 求函数值时要注意“对号，入座”，对自变量的号，入因变量的座.

如：张三 9 月份工资薪金 $x=1800$，应纳税为 $f(1800)=0$；

李四 9 月份工资薪金 $x=2100$，应纳税为 $f(2100)=5$；

王五 9 月份工资薪金 $x=2700$，应纳税为 $f(2700)=25+20=45$.

下面给出几个常见的分段函数：

(1)**绝对值函数**

用绝对值表示的函数，一般来说是一个分段函数. 如函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $f(D)=[0,+\infty)$，函数图形如下：

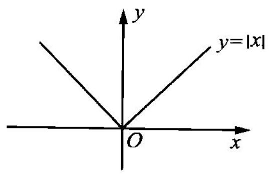


图 1-2

(2)**符号函数(Sign Function)**

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

符号函数是定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$ 的一个分段函数，值域是 $f(D)=\{-1,0,1\}$，见图 1-3.

(3)**取整函数**

$$f(x)=[x]$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数，此函数称为取整函数. 如$[6]=6$，$[3.5]=3$，$[-4.6]=-5$. 取整函数是定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$ 的一个分段函数，值域为 $f(D)=\mathbf{Z}$，见图 1-4.

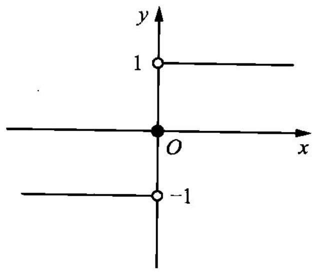


图 1-3

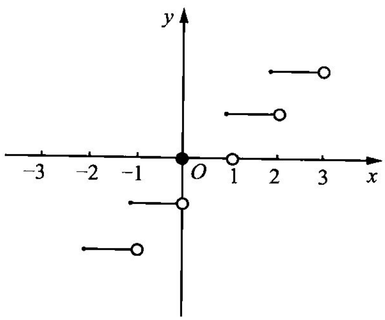


图 1-4

五、反函数

定义 4 设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 $f(D)$，如果变量 y 在 $f(D)$ 中每取一个值时，都可以从关系式 $y=f(x)$ 中确定唯一的 $x(x\in D)$ 与之对应，那么所确定的以 y 为自变量的函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记做 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上，自变量用 x 表示，所以反函数经常表示为 $y=f^{-1}(x)$.

注：①在同一坐标系下，函数 $y=f(x)$ 函数与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是同一条曲线；$y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

②单调的函数一定存在反函数，且 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 有相同的单调性.

如，函数 $y=e^x$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 在其定义域上单调增加函数，所以它有单调增加的反函数 $y=\ln x$，$x\in(0,+\infty)$.

例 4 求函数 $y=\ln\dfrac{x}{1-x}$ 的反函数.

解 该函数的定义域为 $D=(0,1)$，值域 $f(D)=(-\infty,+\infty)$. 由 $y=\ln\dfrac{x}{1-x}$ 可解得 $x=\dfrac{e^y}{e^y+1}$，再交换 x 和 y，得所求函数的反函数为 $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

再如，例题 3 中，某人这个月纳税为 130 元，问某人这个月工资薪金为多少？

由 $y=25+(x-2500)\cdot 10\%$，解之，工资薪金 $x=10y+2250$，即

工资薪金 $y=g(x)=10x+2250$，x 为税款. 由此可求得某人这个月工资薪金为

$$g(130)=3550.$$

六、函数的几种特殊性质

1. 函数的奇偶性

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，

(1) 如果对 $\forall x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；

(2) 如果对 $\forall x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如，函数 $y=\sin x$、$y=x^5$ 等都是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数；函数 $y=\cos x$、$y=x^2$ 等都是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数；而 $y=\sin 2x+\cos x$，$y=x^2+x^3$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的非奇非偶函数.

注：奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1-5、图 1-6 所示.

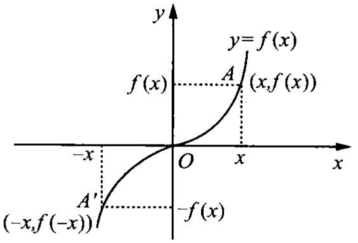


图 1-5

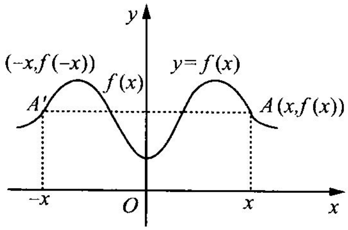


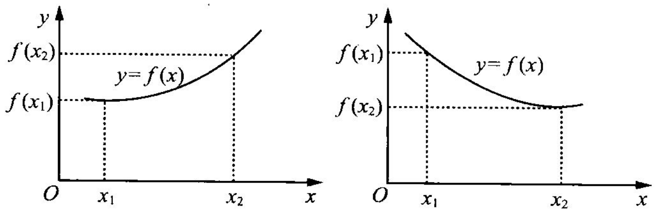
图 1-6

2. 函数的单调性

定义 6 设函数 $y=f(x)$在区间 D 上有定义，如果对于区间 D 内任意两点 x_1，x_2，

(1)当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在区间 D 上单调增加；

(2)当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在区间 D 上单调减少.



(a) (b)

图 1-7

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的.

3. 函数的周期性

定义 7 一般地，对于函数 $y=f(x)$，设其定义域为 D，如果存在非零常数 T，使得对任意 $x\in D$，有 $x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$为周期函数，T 为 $f(x)$的周期.

注：周期函数的周期通常是指它的最小正周期. 周期函数的图形特点是：在其定义域内间隔为 T 的区间上，函数图形有相同的形状.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数(如图 1-8 所示).

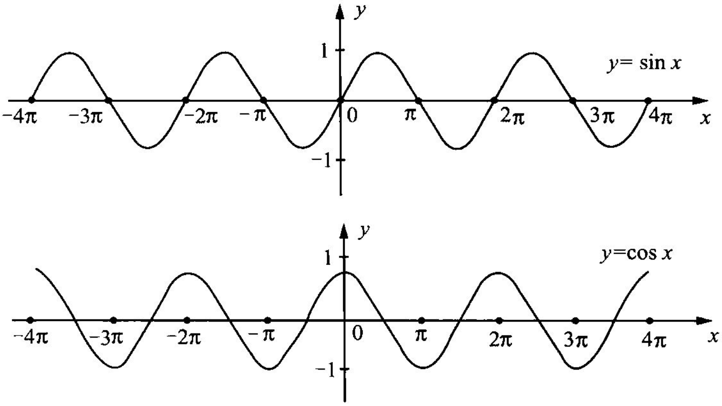


图 1-8

4. 函数的有界性

定义 8 设函数 $y=f(x)$在区间(a, b)内有定义，如果存在一个常数$M>0$，使得对于(a, b)内的任何 x，都有$|f(x)|\leqslant M$成立，则称函数 $y=f(x)$在区间(a, b)内有界；如果不存在这样的数 M，称函数 $y=f(x)$在区间(a, b)内无界.

例如，对于任何实数 x，都有$|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin x$ 有界；而函数 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0, 1)$内是无界的，如图 1-9所示.

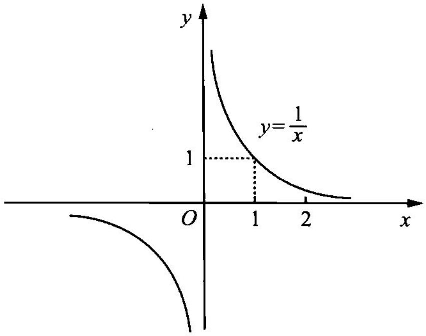


图 1-9

七、初等函数

1. 复合函数

有时两个变量之间的联系不是直接的，而是需要通过另外的变量联系起来. 比如函数 $y=\mathrm{e}^{x^2}$，函数值不是直接由 x 确定，而是由 x^2 确定. 如果用 u 表示 x^2，那么函数 $y=\mathrm{e}^{x^2}$ 就可以表示成 $y=\mathrm{e}^u$，而 $u=x^2$. 这说明 y 与 x 的关系是通过变量 u 确定的. 具有上述关系的函数，我们称为复合函数，具体地给出下面的定义.

定义 9 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，通过 u 将 y 表示成 x 的函数，即 $y=f[\varphi(x)]$，那么 y 就叫做 x 的**复合函数**，其中 u 叫做**中间变量**.

注：①函数 $u=\varphi(x)$的值域应该与函数 $y=f(u)$的定义域有非空交集，否

则复合函数将失去意义.

例如，复合函数 $y=\ln u$，$u=x-1$. 由于 $y=\ln u$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，所以中间变量 u 的取值必须在 $(0, +\infty)$ 内，即 x 应在 $(1, +\infty)$ 内. 由此可知复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域应为函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的子集.

②并不是任意两个函数都可以复合，如 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 在实数范围内就不能复合.

例 5 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成.

(1) $y=\cos^2 x$；　　(2) $y=2\sin\sqrt{1-x^2}$.

解 (1)函数 $y=\cos^2 x$ 是由函数 $y=u^2$ 和 $u=\cos x$ 复合而成的；

(2)函数 $y=2\sin\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=2\sin u$、$u=\sqrt{v}$ 和 $v=1-x^2$ 复合而成的.

例 6 设 $f(x-1)=x^2$，求 $f(2x+1)$.

解 令 $u=x-1$，得 $f(u)=(u+1)^2$，再将 $u=2x+1$ 代入，即得复合函数

$$f(2x+1)=[(2x+1)+1]^2=4(x+1)^2.$$

2. 基本初等函数

我们学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 这些基本初等函数在中学已经学过.

幂函数 $y=x^a (a\in\mathbf{R})$

它的定义域和值域依 a 的取值不同而不同，但是无论 a 取何值，幂函数在 $x\in(0, +\infty)$ 内总有定义. 当 $a\in\mathbf{N}$ 或 $a=\dfrac{1}{2n-1}$，$n\in\mathbf{N}$ 时，定义域为 $\mathbf{R}$. 常见的幂函数的图形如图 1-10 所示.

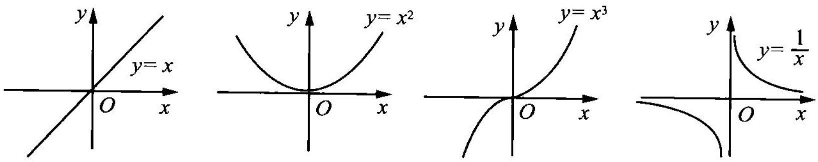


图 1-10

指数函数 $y=a^x (a>0, a\neq 1)$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, +\infty)$. 指数函数的图形如图 1-11所示.

对数函数 $y=\log_a x$　$(a>0, a\neq 1)$

定义域为 $(0, +\infty)$，值域为 $(-\infty, +\infty)$. 对数函数 $y=\log_a x$ 是指数

函数 $y=a^x$ 的反函数．其图形见图 1-12.

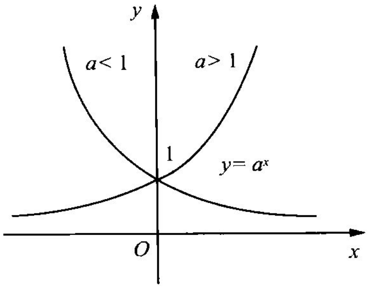


图 1-11

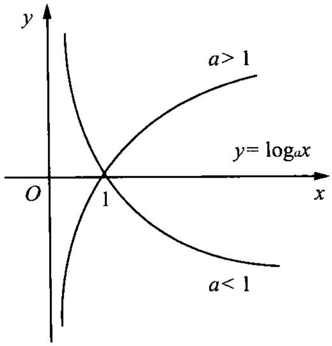


图 1-12

在工程中，常以无理数 e＝2.718 281 828…作为指数函数和对数函数的底，并且记 $e^x=\exp x$，$\log_e x=\ln x$，而后者称为自然对数函数.

三角函数

三角函数有正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$．其中正弦、余弦、正切和余切函数的图形见图 1-13.

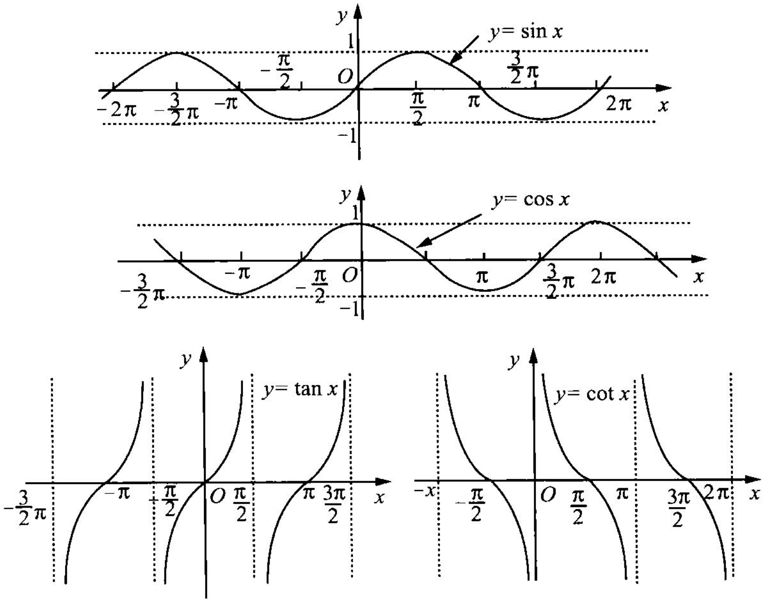


图 1-13

反三角函数

反三角函数主要包括反正弦函数 $y=\arcsin x$、反余弦函数 $y=\arccos x$、反正切函数 $y=\arctan x$ 和反余切函数 $y=\text{arccot}\ x$ 等. 它们的图形如图 1-14 所示.

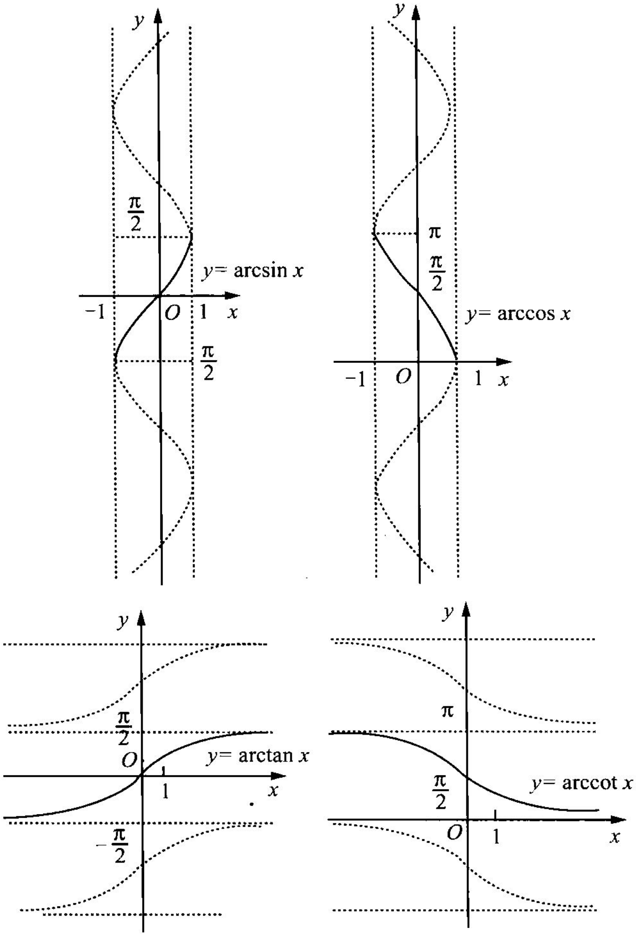


图 1-14

3. 初等函数

由基本初等函数经有限次的四则运算或复合运算构成的并能用一个分析式子表示的函数都是初等函数. 例如

$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\sin x$，$y=\cot \dfrac{x}{2}$ 等均是初等函数，在本书中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.