SAILING启航
EDUCATION GROUP

启航

考研数学海选精编习题

北京启航考试学校数学教研中心/编

最新大纲

中国市场出版社
China Market Press

启航考研数学
海选精编习题

北京启航考试学校数学教研中心　编

中国市场出版社

图书在版编目(CIP)数据

启航考研数学海选精编习题/北京启航考试学校数学教研中心编.
—北京：中国市场出版社，2009.7
ISBN 978-7-5092-0529-7

Ⅰ.启…　Ⅱ.北…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-习题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 113505 号

书　　名：启航考研数学海选精编习题
编　　者：北京启航考试学校数学教研中心
出版发行：中国市场出版社
地　　址：北京市西城区月坛北小街 2 号院 3 号楼(100837)
电　　话：编辑部(010)68034190　　读者服务部(010)68022950
　　　　　发行部(010)68021338　68020340　68053489
　　　　　　　　　68024335　68033577　68033539
经　　销：新华书店
监　　印：北京画中画印刷有限公司
规　　格：787×1092 毫米　1/16　20.25 印张　550 千字
版　　本：2009 年 7 月第 1 版
印　　次：2009 年 7 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5092-0529-7
定　　价：30.00 元

前　言

考研学生中流传着这么一句话:“得数学者得天下。”攻克数学,离不开做题。但做什么样的习题集？目前,市面上关于考研数学方面的书籍层出不穷,一些辅导书费心策划各种题型,拼凑各种难题、偏题,在技巧上让考生下工夫。结果如何?考生们花了许多冤枉时间,做了很多无用功,在题海战术的折腾中彷徨无措。战战兢兢的临考状态,考试成绩自然可想而知。针对这一现象,我们编写了这本习题集——《启航考研数学海选精编习题》。

本书编写特点如下:

一、围绕内容选择题目,着重通过习题来加强考生对基本知识和基本方法的熟练掌握,在此基础上再深化内容,加强难度,层层推进。

二、以考试大纲为依据,集针对性和易接受性于一身,内容由浅入深,习题由易到难,难易适中,在编写的过程中注意知识的系统性、连续性和渐进性相统一。

三、选题的原则是“全、精、少”。

全:所选习题涵盖了大纲的所有考点,覆盖面广、题型多样化,同时紧扣大纲要求和近年来的命题趋势——考察重心回归课本、回归基本知识点。

精:所选习题是经过多次筛选,精中选精,确保每个题目都紧扣大纲考点,难度与近几年真题相当,解题方法皆为一般方法。坚决反对选偏题、怪题。

少:立足于“全”、“精”的前提之下,本书尽可能的少选题。让考生们复习时事半功倍,少做无用功。坚决反对使考生身心疲惫的题海战术。

本书是编者在与考生广泛接触、充分了解考生需要的基础上编写而成的。希望考生能做到“一书在手,别无所求”。

编　者

2009 年 7 月

目　录

第一部分　高等数学

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一部分

高等数学

QIHANG

第一章　函数、极限与连续

☞一、求函数的解析式及定义域

1. 设 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0,2]$，求 $f(x)$ 的定义域.

2. 设 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，求 $\varphi(x)$ 的解析式及定义域.

3. 设 $g(x)=\begin{cases}2-x & x\leqslant 0\\ x+2 & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]$ 为(　　)

(A) $\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0 & |x|\leqslant 1\\ 1 & |x|>1\end{cases}$

☞二、求　极　限

5. (1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

6. (1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$（$n,m$ 为正整数）；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$.

7. (1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{(\arcsin x)^3}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan 2x^2\right)x^2$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

11. 求下列幂指函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\tan x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}(a>0,b>0,c>0)$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t^2e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$.

13. 当 $x\to 0^+$ 时,与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是(　　)

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

14. 当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中,哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量(　　)

(A) $\sin x^2$　(B) $1-\cos x$　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$　(D) $\sin x-\tan x$

15. 设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2dt,g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$,则当 $x\to 0$ 时,$f(x)$是 $g(x)$的(　　)

(A) 低阶无穷小　(B) 高阶无穷小　(C) 等价无穷小　(D) 同阶但不等价

16. 设 $f(x)$有连续导数,$f(0)=0,f'(0)\neq 0,F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)dt$,且当 $x\to 0$ 时,$F'(x)$与 x^k 是同阶无穷小,则 k 等于(　　)

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

17. 设 $\alpha(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}dt,\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$,则当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)$是 $\beta(x)$的(　　)

(A) 高阶无穷小　(B) 低阶无穷小

(C) 同价但非等价无穷小　(D) 等价无穷小

18. 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小 $\alpha=\int_0^x\cos t^2dt,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$ 排列起来使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是(　　)

(A) α,β,γ　(B) α,γ,β　(C) β,α,γ　(D) β,γ,α

19. 设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)dt$,其中 $f(x)$为连续函数,则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$等于(　　)

(A) a^2　(B) $a^2f(a)$　(C) 0　(D) 不存在

20. 设 $y=y(x)$是二阶线性常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解,则当 $x\to 0$ 时,函数$\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$的极限(　　)

(A) 不存在　(B) 等于 1　(C) 等于 2　(D) 等于 3

21. 当 $x\to 0$ 时,变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是(　　)

(A) 无穷小　(B) 无穷大　(C) 有界,但不是无穷小　(D) 无界,但不是无穷大

22. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A(a>0,a\neq 1)$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

23. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$为(　　)

(A) 0　　(B) 6　　(C) 36　　(D) ∞

24. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)-1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right]=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

三、已知极限值求参数

25. 已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________

26. 设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$是比 x^2 高阶的无穷小，求 a,b 的值.

27. 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 某邻域内有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0,f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

28. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则(　　)

(A) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$　　(B) $a=0,b=-2$

(C) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$　　(D) $a=1,b=-2$

29. 确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq 0)$.

30. 求常数 a,b，使等式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=1$ 成立.

四、数列的极限

31. “对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”是数列 $\{x_n\}$收敛于 a 的(　　)

(A) 充分条件但非必要条件　　(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

32. 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是(　　)

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散　　(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小　　(D) 若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小，则 y_n 必为无穷小

33. 设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有(　　)

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

34. 设函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$，则

下列结论正确的是(　　)

(A) 若 $u_1>u_2$,则$\{u_n\}$必收敛　　(B) 若 $u_1>u_2$,则$\{u_n\}$必发散

(C) 若 $u_1<u_2$,则$\{u_n\}$必收敛　　(D) 若 $u_1<u_2$,则$\{u_n\}$必发散

35. 设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$,试证数列$\{x_n\}$极限存在,并求此极限.

36. 设 $u_1=2, u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{1}{u_n}\right),(n=1,2,\cdots)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

37. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$______.

38. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right]$.

39. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}$ 等于(　　)

(A) $\int_1^2\ln^2 x\mathrm{d}x$　　(B) $2\int_1^2\ln x\mathrm{d}x$　　(C) $2\int_1^2\ln(1+x)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_1^2\ln^2(1+x)\mathrm{d}x$

40. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}$.

41. 设数列$\{x_n\}$满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求极限;　　(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

☞五、函数的连续性

42. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$,则(　　)

(A) $x=0$ 为无穷间断点,$x=1$ 为跳跃间断点.

(B) $x=0$ 为无穷间断点,$x=1$ 为可去间断点.

(C) $x=0$ 为可去间断点,$x=1$ 为无穷间断点.

(D) $x=0$ 为可去间断点,$x=1$ 为跳跃间断点.

43. 问 $x=\dfrac{1}{n}(n=2,3,\cdots)$是函数 $f(x)=x\cdot\left[\dfrac{1}{x}\right]$的(　　)

(A) 无穷间断点　　(B) 跳跃间断点　　(C) 可去间断点　　(D) 连续点

44. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$的(　　)

(A) 连续点　　(B) 第一类间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 不能判定连续性的点

45. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$的间断点,并说明间断点类型.

46. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}, x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$,试补充定义 $f(1)$使 $f(x)$在$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上

连续.

47. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，的间断点，并说明间断点类型.

48. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\\ a+x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$，要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为连续函数，应当如何选择参数 a?

49. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a、b 满足(　　)

(A) $a<0,b<0$　(B) $a>0,b>0$　(C) $a\leqslant 0,b>0$　(D) $a\geqslant 0,b<0$

50. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内是有界(　　)

(A) $(-1,0)$　(B) $(0,1)$　(C) $(1,2)$　(D) $(2,3)$

51. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，$a<x_1<\cdots<x_n<b$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

52. 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根.

53. 设有方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数，证明此方程存在唯一正实根 x_n.

54. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$.

本章答案与解析

1. **解**　$0\leqslant x\leqslant 2\Rightarrow -1\leqslant x-1\leqslant 1$，即 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$.

2. **解**　$f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2\Rightarrow\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$，

$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1\Rightarrow -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$，即 $\varphi(x)$ 的定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

3. **解**　当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2>0\Rightarrow g[f(x)]=f(x)+2=x^2+2$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x\leqslant 0\Rightarrow g[f(x)]=2-f(x)=2-(-x)=2+x$

$\Rightarrow g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2 & x<0\\ x+2 & x\geqslant 0\end{cases}$，应选(D).

4. **解**　对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)\leqslant 1\Rightarrow f[f(x)]=1\Rightarrow f\{f[f(x)]\}=1$. 应选(B).

5. **解**　(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{xe^{-\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=1\cdot 0=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在.

(3) 因为式中有 $e^{\frac{1}{x}}$ 与 $|x|$，所以需分别考虑左、右极限.

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2+0}{1+0}-1=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{1+e^{-\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

所以 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

6. **解** (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x-2}{1+x+x^2}=-1.$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}=-\dfrac{1}{4}.$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0, & n>m\\ 1, & n=m.\\ \infty, & n<m\end{cases}$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}.$

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}(-x^2)}{e^x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x+\sin x}=\dfrac{0}{1+0}=0.$

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2x-1}{3x^2}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2x}{x^2}=\dfrac{1}{3}.$

7. **解** (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^x(1+\ln x)}{-1+\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x^x\ln x+x^x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x\ln x+x^x-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}+x^x(\ln x+1)}{1}=2.$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{3x^2(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\dfrac{1}{6}.$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan2x^2\right)}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{-4x}{1+4x^4}}{-\dfrac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4}{1+4x^4}=\dfrac{1}{2}.$

8. **解** 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x(\ln(1+x)-x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x\ln(1+x)-x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{(\ln(1+x)-x)}$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\ln(1+x)-x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{2x}{\frac{1}{1+x}-1}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{2x(1+x)}{-x}=-\frac{1}{2}.$$

9. **解**　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1-\sec x)}{\frac{1}{3}x^2\cdot\frac{1}{2}\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{6}x^2}=-3.$

10. **解**　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{1}{2}x\cos\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3}{2}.$

11. **解**　(1) 原式 $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x^2}\cos\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\cos\frac{2}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)}$
$=e^2.$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\ln(x+e^x)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}}=e.$

(3) 原式 $=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln x^{\tan x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\tan x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\sec^2x}{\tan^2x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{x}{1+\tan^2x}}=1.$

(4) 原式 $=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right)}=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=(abc)^{\frac{1}{3}}.$

12. **解**　原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+2x^2}=\dfrac{1}{2}.$

13. **解**　$1-e^{\sqrt{x}}=-(e^{\sqrt{x}}-1)\sim-\sqrt{x}(x\to0^+)$,

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1=(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}\quad(x\to0^+),$$

$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\dfrac{1}{2}x(x\to0^+)$,　　应选(B).

14. **解**　当 $x\to0$ 时：$\sin x^2\sim x^2$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $\sqrt{1-x^2}-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$,

$$\sin x-\tan x\sim-\frac{1}{2}x^3\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=-\frac{1}{2}\right).\qquad\text{应选(D).}$$

15. **解**　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt}{\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin(1-\cos x)^2]\sin x}{x^4+x^5}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{4}x^4}{x^3+x^4}=0.\qquad\text{应选(B).}$$

16. **解**　特例法：如 $f(x)=x$, $F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)t\,dt=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{4}x^4=\dfrac{1}{4}x^4$

$\Rightarrow F'(x)=x^3\Rightarrow k=3.$　　应选(C).

17. **解**　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\cdot\frac{\sin5x}{5x}}{\cos x(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}=\dfrac{5\cdot1}{1\cdot e}=\dfrac{5}{e}\neq1.$　　应选(C).

18. **解**　分别求出 α,β,γ 关于 x 的阶数.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com