

启航

考研数学

海选精编习题

北京启航考试学校数学教研中心/编

最新大纲



中国市场出版社
China Market Press

启航考研数学 海选精编习题

北京启航考试学校数学教研中心 编

中国市场出版社

图书在版编目(CIP)数据

启航考研数学海选精编习题/北京启航考试学校数学教研中心编.

—北京:中国市场出版社,2009.7

ISBN 978-7-5092-0529-7

I. 启… II. 北… III. 高等数学-研究生-入学考试-习题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 113505 号

书 名: 启航考研数学海选精编习题

编 者: 北京启航考试学校数学教研中心

出版发行: 中国市场出版社

地 址: 北京市西城区月坛北小街 2 号院 3 号楼(100837)

电 话: 编辑部(010)68034190 读者服务部(010)68022950

发行部(010)68021338 68020340 68053489

68024335 68033577 68033539

经 销: 新华书店

监 印: 北京画中画印刷有限公司

规 格: 787×1092 毫米 1/16 20.25 印张 550 千字

版 本: 2009 年 7 月第 1 版

印 次: 2009 年 7 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5092-0529-7

定 价: 30.00 元

前 言

考研学生中流传着这么一句话：“得数学者得天下。”攻克数学，离不开做题。但做什么样的习题集？目前，市面上关于考研数学方面的书籍层出不穷，一些辅导书费心策划各种题型，拼凑各种难题、偏题，在技巧上让考生下工夫。结果如何？考生们花了许多冤枉时间，做了很多无用功，在题海战术的折腾中彷徨无措。战战兢兢的临考状态，考试成绩自然可想而知。针对这一现象，我们编写了这本习题集——《启航考研数学海选精编习题》。

本书编写特点如下：

一、围绕内容选择题目，着重通过习题来加强考生对基本知识和基本方法的熟练掌握，在此基础上再深化内容，加强难度，层层推进。

二、以考试大纲为依据，集针对性和易接受性于一身，内容由浅入深，习题由易到难，难易适中，在编写的过程中注意知识的系统性、连续性和渐进性相统一。

三、选题的原则是“全、精、少”。

全：所选习题涵盖了大纲的所有考点，覆盖面广、题型多样化，同时紧扣大纲要求和近年来的命题趋势——考察重心回归课本、回归基本知识点。

精：所选习题是经过多次筛选，精中选精，确保每个题目都紧扣大纲考点，难度与近几年真题相当，解题方法皆为一般方法。坚决反对选偏题、怪题。

少：立足于“全”、“精”的前提之下，本书尽可能的少选题。让考生们复习时事半功倍，少做无用功。坚决反对使考生身心疲惫的题海战术。

本书是编者在与考生广泛接触、充分了解考生需要的基础上编写而成的。希望考生能做到“一书在手，别无所求”。

编 者
2009 年 7 月

目 录

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限与连续	(3)
一、求函数的解析式及定义域	(3)
二、求极限	(3)
三、已知极限值求参数	(5)
四、数列的极限	(5)
五、函数的连续性	(6)
本章答案与解析	(7)
第二章 导数与微分	(15)
一、导数的定义	(15)
二、导数的几何意义	(15)
三、微分	(16)
四、求导数	(16)
五、计算高阶导数	(18)
六、相关变化率	(18)
本章答案与解析	(19)
第三章 微分中值定理与导数的应用	(27)
一、中值定理	(27)
二、导数的应用	(28)
三、曲率	(30)
本章答案与解析	(30)
第四章 不定积分	(39)
一、原函数与不定积分的概念	(39)
二、不定积分的计算	(39)
三、有理函数、三角函数有理式和无理函数的积分	(40)
四、不定积分应用	(40)
本章答案与解析	(41)
第五章 定积分与广义积分	(47)
一、定积分的概念与性质	(47)
二、定积分的计算	(47)
三、变限积分的计算及应用	(48)
四、广义积分	(50)
本章答案与解析	(51)

第六章 定积分的应用	(59)
一、平面图形面积	(59)
二、体积	(59)
三、弧长、侧面积及物理应用	(60)
四、微积分在经济中应用	(61)
本章答案与解析	(62)
第七章 常微分方程	(71)
一、一阶微分方程	(71)
二、伯努利方程与全微分方程	(71)
三、二阶微分方程的可降阶类型	(72)
四、二阶线性方程	(72)
五、二阶线性变系数方程	(73)
六、综合题	(73)
七、应用问题	(73)
本章答案与解析	(74)
第八章 向量代数与空间解析几何	(86)
一、向量运算	(86)
二、求平面或直线的方程	(86)
三、求旋转面方程	(87)
本章答案与解析	(87)
第九章 多元函数的微分学	(91)
一、多元函数微分学中的若干基本概念及其联系	(91)
二、求二元或三元初等函数的偏导数或全微分	(92)
三、复合函数求导法	(92)
四、隐函数的导数或偏导数	(93)
五、多元函数的极值和最值问题	(94)
六、求二元或三元函数的梯度或方向导数	(94)
七、多元函数微分学的几何应用	(95)
本章答案与解析	(95)
第十章 重积分	(107)
一、二重积分	(107)
二、三重积分	(109)
三、重积分的应用	(110)
本章答案与解析	(110)
第十一章 曲线积分与曲面积分	(119)
一、第一类曲线积分	(119)
二、第二类曲线积分与格林公式、斯托克斯公式	(119)
三、曲线积分与路径无关及微分式的原函数	(121)
四、第一类曲面积分	(122)
五、第二类曲面积分及高斯公式	(122)
六、计算向量场的散度或旋度	(123)
本章答案与解析	(123)

第十二章 级数	(135)
一、级数敛散性的判别	(135)
二、幂级数	(136)
三、数值级数求和	(137)
四、求函数的幂级数展开式	(137)
五、傅里叶级数	(138)
本章答案与解析	(139)

第二部分 线性代数

第一章 行列式	(153)
本章答案与解析	(155)
第二章 矩阵	(161)
一、矩阵运算	(161)
二、矩阵方程	(162)
三、矩阵的初等变换和秩	(163)
本章答案与解析	(165)
第三章 向量	(172)
一、向量的线性表出和向量组等价	(172)
二、向量组的线性相关问题	(173)
三、向量组的秩与最大无关组	(175)
本章答案与解析	(175)
第四章 线性方程组	(184)
一、齐次方程组有非零解、基础解系、通解等问题	(184)
二、非齐次线性方程组的求解	(185)
三、有解判定及解的结构	(186)
四、公共解与同解	(187)
本章答案与解析	(188)
第五章 特征值与特征向量	(199)
一、特征值、特征向量的概念与计算	(199)
二、相似矩阵与相似对角化	(200)
三、实对称矩阵的特征值与特征向量	(202)
本章答案与解析	(202)
第六章 二次型	(216)
一、二次型的概念及其标准形	(216)
二、二次型的正定性	(217)
本章答案与解析	(218)

第三部分 概率论

第一章 随机事件和概率	(227)
一、随机事件的关系与运算	(227)
二、古典型概率与几何型概率	(227)

三、概率与条件概率的性质和基本公式	(228)
四、事件的独立性与独立重复试验	(230)
本章答案与解析	(231)
第二章 随机变量及其概率分布	(240)
一、随机变量的分布函数	(240)
二、离散型随机变量的概率分布	(241)
三、连续型随机变量的概率密度	(241)
四、常见随机变量的概率分布及其应用	(242)
五、随机变量函数的分布	(243)
本章答案与解析	(244)
第三章 二维随机变量及其概率分布	(253)
一、随机变量的联合分布、边缘分布与条件分布	(253)
二、随机变量函数的分布	(256)
本章答案与解析	(258)
第四章 随机变量的数字特征	(274)
一、随机变量的数字特征	(274)
二、随机变量的独立性与相关性	(275)
三、应用题	(277)
本章答案与解析	(277)
第五章 大数定律和中心极限定理	(287)
本章答案与解析	(288)
第六章 数理统计的基本概念	(290)
一、统计量的分布	(290)
二、统计量的数字特征	(292)
本章答案与解析	(293)
第七章 参数估计	(299)
一、参数的点估计	(299)
二、区间估计	(301)
本章答案与解析	(302)
第八章 假设检验	(311)
本章答案与解析	(312)

启航考研精品图书系列

SAILING 启航
EDUCATION GROUP

第一部分

高等数学

QIHANG

第一章 函数、极限与连续

一、求函数的解析式及定义域

1. 设 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0, 2]$, 求 $f(x)$ 的定义域.
2. 设 $f(x) = \sin x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 求 $\varphi(x)$ 的解析式及定义域.
3. 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $g[f(x)]$ 为 ()
(A) $\begin{cases} 2+x^2 & x < 0 \\ 2-x & x \geq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2-x^2 & x < 0 \\ 2+x & x \geq 0 \end{cases}$
(C) $\begin{cases} 2-x^2 & x < 0 \\ 2-x & x \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2+x^2 & x < 0 \\ 2+x & x \geq 0 \end{cases}$
4. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于 ()
(A) 0 (B) 1 (C) $\begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 0 & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$

二、求 极 限

5. (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$; (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.
6. (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$ (n, m 为正整数); (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}$;
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{e^x - \cos x}$; (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right)$.
7. (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{(\arcsin x)^3}$; (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan 2x^2 \right) x^2$.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$.
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+\sin x} - 1)}$.

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)}.$

11. 求下列幂指函数的极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x;$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}};$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x};$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} (a > 0, b > 0, c > 0).$

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^2 e^{t^2} dt}{x e^{x^2}}.$

13. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是()

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

14. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小量中, 哪一个比其他三个更高阶的无穷小量()

(A) $\sin x^2$ (B) $1 - \cos x$ (C) $\sqrt{1-x^2} - 1$ (D) $\sin x - \tan x$

15. 设 $f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin^2 t dt$, $g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的()

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小 (C) 等价无穷小 (D) 同阶但不等价

16. 设 $f(x)$ 有连续导数, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时,

$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 k 等于()

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

17. 设 $\alpha(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt$, $\beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的()

(A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小

(C) 同价但非等价无穷小 (D) 等价无穷小

18. 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^x \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是()

(A) α, β, γ (B) α, γ, β (C) β, α, γ (D) β, γ, α

19. 设 $F(x) = \frac{x^2}{x-a} \int_a^x f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ 等于()

(A) a^2 (B) $a^2 f(a)$ (C) 0 (D) 不存在

20. 设 $y = y(x)$ 是二阶线性常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限()

(A) 不存在 (B) 等于 1 (C) 等于 2 (D) 等于 3

21. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是()

(A) 无穷小 (B) 无穷大 (C) 有界, 但不是无穷小 (D) 无界, 但不是无穷大

22. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x - 1} = A (a > 0, a \neq 1)$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

23. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + x f(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$ 为 ()

(A) 0 (B) 6 (C) 36 (D) ∞

24. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - 1}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right] = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

三、已知极限值求参数

25. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则常数 $a =$ _____

26. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 求 a, b 的值.

27. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有一阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0$, 若 $af(h) + bf(2h) - f(0)$ 在 $h \rightarrow 0$ 时是比 h 高阶的无穷小, 试确定 a, b 的值.

28. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 2$, 则 ()

(A) $a=1, b=-\frac{5}{2}$ (B) $a=0, b=-2$

(C) $a=0, b=-\frac{5}{2}$ (D) $a=1, b=-2$

29. 确定常数 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt} = c (c \neq 0)$.

30. 求常数 a, b , 使等式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = 1$ 成立.

四、数列的极限

31. “对任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 ()

(A) 充分条件但非必要条件 (B) 必要条件但非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分条件又非必要条件

32. 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是 ()

(A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散 (B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界
(C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小 (D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

33. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有 ()

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立 (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立
(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在 (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

34. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 令 $u_n = f(n) (n=1, 2, \dots)$, 则

下列结论正确的是()

- (A) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 (B) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散
(C) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 (D) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

35. 设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} (n=1, 2, \dots)$, 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.

36. 设 $u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right), (n=1, 2, \dots)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

37. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

38. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right).$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1+\cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1+\cos \frac{2\pi}{n}} + \dots + \sqrt{1+\cos \frac{n\pi}{n}} \right].$

39. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 \dots \left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于()

- (A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$ (B) $2 \int_1^2 \ln x dx$ (C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$ (D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$

40. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n^2}}.$

41. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n=1, 2, \dots)$.

- (1) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求极限; (2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}.$

五、函数的连续性

42. 设函数 $f(x) = \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$, 则()

- (A) $x=0$ 为无穷间断点, $x=1$ 为跳跃间断点.
(B) $x=0$ 为无穷间断点, $x=1$ 为可去间断点.
(C) $x=0$ 为可去间断点, $x=1$ 为无穷间断点.
(D) $x=0$ 为可去间断点, $x=1$ 为跳跃间断点.

43. 问 $x = \frac{1}{n} (n=2, 3, \dots)$ 是函数 $f(x) = x \cdot \left[\frac{1}{x} \right]$ 的()

- (A) 无穷间断点 (B) 跳跃间断点 (C) 可去间断点 (D) 连续点

44. 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x+e^t}{1+e^t}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的()

- (A) 连续点 (B) 第一类间断点
(C) 第二类间断点 (D) 不能判定连续性的点

45. 讨论函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点, 并说明间断点类型.

46. 设 $f(x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)}, x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$, 试补充定义 $f(1)$ 使 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ 上

连续.

47. 讨论函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$ 的间断点, 并说明间断点类型.

48. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ a + x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为连续函数, 应当如何选择参数 a ?

49. 设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 满足 ()

(A) $a < 0, b < 0$ (B) $a > 0, b > 0$ (C) $a \leq 0, b > 0$ (D) $a \geq 0, b < 0$

50. 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内是有界 ()

(A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$

51. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, $a < x_1 < \cdots < x_n < b$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

52. 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个根.

53. 设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$, 其中 n 为正整数, 证明此方程存在唯一正实根 x_n .

54. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$.

本章答案与解析

1. 解 $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x-1 \leq 1$, 即 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$.

2. 解 $f[\varphi(x)] = \sin \varphi(x) = 1 - x^2 \Rightarrow \varphi(x) = \arcsin(1 - x^2)$,

$$-1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \text{ 即 } \varphi(x) \text{ 的定义域为 } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

3. 解 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 > 0 \Rightarrow g[f(x)] = f(x) + 2 = x^2 + 2$;

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = -x \leq 0 \Rightarrow g[f(x)] = 2 - f(x) = 2 - (-x) = 2 + x$

$$\Rightarrow g[f(x)] = \begin{cases} x^2 + 2 & x < 0 \\ x + 2 & x \geq 0 \end{cases}, \text{ 应选(D).}$$

4. 解 对 $\forall x \in (-\infty, +\infty), f(x) \leq 1 \Rightarrow f[f(x)] = 1 \Rightarrow f\{f[f(x)]\} = 1$. 应选(B).

5. 解 (1) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{xe^{-\frac{1}{x}} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = 1 \cdot 0 = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在.

(3) 因为式中有 $e^{\frac{1}{x}}$ 与 $|x|$, 所以需分别考虑左、右极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{2 + 0}{1 + 0} - 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{1 + e^{-\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1.$

6. 解 (1) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x - 2}{1 + x + x^2} = -1.$

(2) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{4x} = -\frac{1}{4}.$

(3) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} 0, & n > m \\ 1, & n = m. \\ \infty, & n < m \end{cases}$

(4) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}.$

(5) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{e^x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(-x^2)}{e^x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x + \sin x} = \frac{0}{1+0} = 0.$

(6) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x^2} = \frac{1}{3}.$

7. 解 (1) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^x(1 + \ln x)}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^x \ln x + x^x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x \ln x + x^x - 1}{x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1} + x^x(\ln x + 1)}{1} = 2.$

(2) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{3x^2 \sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{3x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{3x^2(\sqrt{1-x^2} + 1)} = -\frac{1}{6}.$

(3) 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan 2x^2\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{1 + 4x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{1 + 4x^4} = \frac{1}{2}.$

8. 解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(\ln(1+x) - x)(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})}$
 $= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x \ln(1+x) - x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{2}x^2}{(\ln(1+x) - x)}$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(1+x) - x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{1}{1+x} - 1} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(1+x)}{-x} = -\frac{1}{2}.$$

$$9. \text{ 解 } \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \sec x)}{\frac{1}{3} x^2 \cdot \frac{1}{2} \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} x^2}{\frac{1}{6} x^2} = -3.$$

$$10. \text{ 解 } \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{x} \right) = \frac{3}{2}.$$

$$11. \text{ 解 } (1) \text{ 原式} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x})} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{x^2} \cos \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 \cos \frac{2}{x} - \sin \frac{1}{x})} = e^2.$$

$$(2) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(x+e^x) \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^x}{1+e^x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x}} = e.$$

$$(3) \text{ 原式} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^{\tan x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\tan x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{1+\tan^2 x}} = 1.$$

$$(4) \text{ 原式} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\frac{a^x+b^x+c^x}{3} - 1)} = e^{\frac{1}{3} (\ln a + \ln b + \ln c)} = (abc)^{\frac{1}{3}}.$$

$$12. \text{ 解 } \text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+2x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$13. \text{ 解 } 1 - e^{\sqrt{x}} = -(e^{\sqrt{x}} - 1) \sim -\sqrt{x} (x \rightarrow 0^+),$$

$$\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 = (1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2} \sqrt{x} \quad (x \rightarrow 0^+),$$

$$1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2} (\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2} x (x \rightarrow 0^+), \quad \text{应选(B)}.$$

$$14. \text{ 解 } \text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时: } \sin x^2 \sim x^2, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2, \sqrt{1-x^2} - 1 \sim -\frac{1}{2} x^2,$$

$$\sin x - \tan x \sim -\frac{1}{2} x^3 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = -\frac{1}{2} \right). \quad \text{应选(D)}.$$

$$15. \text{ 解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt}{\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin(1-\cos x)^2] \sin x}{x^4 + x^5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)^2}{x^3 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4} x^4}{x^3 + x^4} = 0. \quad \text{应选(B)}.$$

$$16. \text{ 解 } \text{特例法: 如 } f(x) = x, F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) t dt = \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{4} x^4 = \frac{1}{4} x^4$$

$$\Rightarrow F'(x) = x^3 \Rightarrow k = 3. \quad \text{应选(C)}.$$

$$17. \text{ 解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x}}{\cos x (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}} = \frac{5 \cdot 1}{1 \cdot e} = \frac{5}{e} \neq 1. \quad \text{应选(C)}.$$

$$18. \text{ 解 } \text{分别求出 } \alpha, \beta, \gamma \text{ 关于 } x \text{ 的阶数.}$$