

中学数学

ZHONGXUE
SHUXUE
JIAOXUELUN

教学论

主 编 樊晓明 王志刚 王 智
主 审 刘 莉
副主编 陆诗荣



哈尔滨地图出版社

中学数学教学论

ZHONGXUE SHUXUE JIAOXUELUN

樊晓明 王志刚 王 智 主编

哈尔滨地图出版社
·哈尔滨·

图书在版编目(CIP)数据

中学数学教学论/樊晓明,王志刚,王智主编. —哈尔滨:
哈尔滨地图出版社,2007.1

ISBN 978-7-80717-551-3

I. 中… II. ①樊…②王…③王… III. 数学课—教学研究—中学 IV. G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 039250 号

哈尔滨地图出版社出版发行

(地址:哈尔滨市南岗区测绘路2号 邮编:150086)

哈尔滨庆大印刷厂印刷

开本:850 mm×1 168 mm 1/32 印张:12.937 5 字数:350 千字

ISBN 978-7-80717-551-3

2007 年 1 月第 1 版 2007 年 1 月第 1 次印刷

印数:1~1 000 定价:29.80 元

前 言

中学数学教学论课程是高等师范院校数学专业一门重要的专业必修课,其重要性主要表现在它的师范性、边缘性和综合性上。它在培养合格的中学教师方面起着举足轻重的作用。为了加强课程与教学建设,提高教学质量,近年来,高等师范院校数学教师对这门课程的教学改革普遍比较重视,并对这门课程进行了种种改革尝试,特别是在课程内容、教学方法、实践环节等方面进行了大胆探索。同时,为了更好地培养师范院校在校生,使之能很好地胜任未来的数学教学工作,必须有与时俱进的并且实践性和理论性都较强的教材做依托。为此编写了这本教材。

作为一门研究中学数学教学的基础课程,其内容应该能够给师范生从事未来的数学教学与研究打下扎实的基础,并应具有很强的实践性。因此本书在内容结构上紧扣现代中学数学教学过程研究这条主线,广泛涉及中学数学教与学的丰富内容。即重视数学教育教学理论的分析与阐述,又重视数学教学技能的培养和训练。同时,为了适应时代发展对中学数学教学法课程体系的新要求,本书在对中学数学教学目的、数学教学规律的阐述、对数学基础知识、数学思想方法的教与学的探讨等方面,都力求反映数学教育的新思想、新观点和新方法。并在编写指导思想上力求:一,体系上有所突破,即解决对教师的教的规范,又尝试对学生的学进行描述。二,内容上有所创新,力求与时俱进,立足改革。三,使用上便于操作,面向教学实践。

本门课程的基本目标是:使学生能基本掌握中学数学教学的技能和方法,了解和熟悉中学数学教学中的各项工作,使学生能顺利地通过教育实习,毕业后能较快地适应中学数学教学的日常工作。

全书分为“理论篇”和“实践篇”,力求理论与实践相结合,这对于缺少教学经验的师范生而言,观察、欣赏、研究各种教学案例,尝试

编制教案,以及走上讲台演习等,无疑是非常重要的。这也是本书的特色之一。

“理论篇”部分,共有四章,第一章主要论述了中学教学目的及内容,力求使学生对中学数学课程的发展变化有个全面的认识。第二章“中学数学教育的基本理论”介绍了“弗莱登塔尔的数学教育理论”、“波利亚的解题理论”、“建构主义数学教育理论”及“我国‘双基’数学教育的成功与不足”。第三章“数学思维、能力和思想方法的培养”力求反映新思想、新方法。第四章,对数学教学模式与数学教育技术进行了详细论述。

“实践篇”部分,共有七章。第五章,展示了大量的优秀的教学案例供读者观摩与评析。第六章到第九章是教学设计环节,重点对教学设计,尤其概念、命题、问题解决等问题的教与学结合具体案例进行详细论述。第十章,对“几种教学活动”的具体实施方式及激发策略进行了论述,并列举了针对性的案例供读者借鉴与评析,最后一章,结合案例对“数学课堂教学基本技能训练”进行详细论述。总之,本书具有很强的实践性和操作性。

在编写过程中,我们参考了许多兄弟院校的教材,引用了许多著作、论文课例,在此深表感谢。

本书由樊晓明、王志刚、王智担任主编,由陆诗荣担任副主编,其中第一章和第三章由陆诗荣编写。编者十分感谢哈尔滨师范大学刘莉教授担任本书的主审工作。

限于编者水平有限,编写时间仓促,书中难免有错漏之处,敬请同行与读者批评指教,以便更正提高。

编者

2007年1月

目 录

理 论 篇

第一章 中学数学教学目的及内容	1
第一节 确定中学数学教学目的的依据	1
第二节 中学数学教育目的的分析	3
第三节 中学数学的教学内容和体系	9
第二章 数学教育的基本理论	23
第一节 弗来登塔尔的数学教育理论	23
第二节 波利亚的解题理论	29
第三节 建构主义的数学教育理论	41
第四节 我国“双基”数学教学的成功与不足	48
第三章 数学思维和数学能力的培养	56
第一节 数学思维	56
第二节 数学能力	103
第三节 数学素质	116
第四章 数学教学模式与教育技术	125
第一节 数学教学的一般过程与数学文化	125
第二节 中国的常规数学教学模式及其改进	129
第三节 素质教育和创新教育下的一些新教学模式	134
第四节 数学教育技术	143

实 践 篇

第五章 数学课堂教学观摩与评析	155
第一节 一堂优秀数学课——不等式的应用	155
第二节 常规教学模式的变化	167
第三节 一些特定类型的课例赏析	189
第六章 数学课堂教学设计	235

第一节	教案的三要素	235
第二节	数学教学目标的确定	243
第三节	设计意图的形成	252
第七章	数学概念的教学设计	257
第一节	数学概念学习的一般理论	257
第二节	数学概念的教学设计	271
第三节	数学概念教学的设计案例	288
第八章	数学命题的教学设计	292
第一节	数学命题学习	292
第二节	数学命题的教学设计	296
第三节	数学命题教学的设计案例	306
第九章	数学问题解决的教学设计	312
第一节	数学问题解决学习	312
第二节	数学问题解决的教学设计	322
第三节	问题解决教学设计案例	330
第十章	几种数学活动的设计与激发策略	334
第一节	“教师讲授为核心”的教学活动	334
第二节	合作学习	352
第三节	数学探究活动	364
第四节	数学建模活动	374
第十一章	数学课堂教学基本技能训练	382
第一节	如何吸引学生	382
第二节	如何启发学生	385
第三节	如何与学生交流	387
第四节	如何组织学生	399
第五节	形成教学艺术风格	401
参考文献		407

理论篇

第一章 中学数学教学目的及内容

第一节 确定中学数学教学目的的依据

中学数学教学目的,是中学数学教学方向和性质的表征,也是数学教学活动,即包括组织教学内容、确定教学要求、选择教学方法、进行质量评估,决定考试命题等在内的一切数学教学活动的依据,科学地确定中学数学的教学目的,对于改革中学数学教学具有重要的指导意义。中学数学教学目的主要依据党的教育总目标及普通中学的性质和任务、社会的需求、数学学科的特点、教师的状况和学生的年龄特征来确定。

一、中学数学教学目的要依据党的教育总目标来确定

各门学科的教育目标服从于总的教育目标,并为完成总体教育目标服务。因此,数学教育必须服从总目标:全面推进素质教育就是要“造就数以亿计的高素质劳动者,数以千万计的专门人才和一大批拔尖创新人才”。培养的人才“都应有理想、有道德、有文化、有纪律,热爱社会主义祖国和社会主义事业,具有为国家富强和人民富裕而艰苦奋斗的献身精神,都应该不断追求新知,具有实事求是独立思考勇于创新的精神”。

二、中学数学教学目的要依据普通中学的性质和任务来确定

普通中学的教育,是小学教育的继续,仍然是基础教育,而不是专业教育。它的任务是依据党的教育方针,为国家培养合格的劳动后备力量,以及为高一级学校输送合格的新生。

因此,在确定中学数学教学目的时必须充分考虑中学教育的双

重任务,传授给学生以参加生产劳动或升入高一级学校所必需的基础知识和基本能力。

三、中学数学教学目的要依据社会的需求来确定

教育的作用是要把自然的人培养成社会的人和社会的生产力,所以,社会的政治经济和科学技术的需求也在很大程度上影响着数学课程的目标和内容,数学教育必须符合信息时代的社会需求,以及公众对数学教育的需求。

四、中学数学教学目的要依据数学学科特点来确定

数学本身的特点包括模型化、数量化、算法化、论述的逻辑严谨性、语言表达的简约性、解决问题的思维过程、辩证因素等诸多方面。让学生学习和理解这些特点,是数学教育应当努力达到的目标。

五、中学数学教学目的要依据教师的状况来确定

教师是数学教学目的的贯彻者、系统数学知识的传授者。因此大多数数学教师的数学学科基础能力的状况是确定中学数学教学内容的基本依据。据教育部 2001 年统计数据,全国初中专任教师 338.57 万人,初中教师学历合格率是 88.72%,普通高中专任教师 84 万人,普通高中教师学历合格率是 70.71%。

确定中学数学教育目标必须以数学教师的基本情况为主要依据。

六、中学数学教学目的要依据学生的年龄特征来确定

在数学教学过程中,学生既是教学的客体,又是学习的主体。因此确定数学教学目标,必须慎重考虑学生的年龄特征和认识水平。如果教学内容超过了学生的认知水平,学生就学不会。如果教学要求过低,学生会觉得缺乏挑战性,这都是不可取的,在大众的数学时代,学生的水平尤其值得注意。

数学教育目标的确定除了要考虑上面六个方面的因素外,自然还要符合社会环境和经济发展的水平。随着我国在新世纪的巨大进步,我们对数学教育目标的认识也在逐步深入和发展,并将继续走向完善。

第二节 中学数学教育目的的分析

目前,初中阶段的数学教学是依据 1992 年颁布的《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲(试用)》(简称义务教育初中数学教学大纲)和《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》(简称标准)的要求进行的。高中阶段的数学教学依照与义务教育初中数学教学大纲的教学接轨的《全日制普通高级中学数学教学大纲(实验修订版)》的要求进行。下面介绍和分析这两个大纲和义务教育数学课程标准以及《普通高中数学课程标准(实验)》中所规定的教学目的。

一、义务教育初中数学教学大纲的教学目的

义务教育大纲中规定初中数学的教学目的是:“使学生学好当代社会中每一个公民适应日常生活、参加生产和进一步学习所必须的代数、几何的基础知识与基本技能,并进一步培养运算能力、发展逻辑思维能力 and 空间观念,并能够运用所学知识解决简单的实际问题。培养学生良好的个性品质和辩证唯物主义的观点。”

大纲对义务教育阶段学生应掌握的基础知识和基本技能的范围作出规定,它首先强调的是“当代社会中每一个公民适应日常生活”的需要,体现公民义务教育的要求。为了更加明确教学目的,义务教育大纲作出了如下具体说明:

初中数学的基础知识主要是初中代数、几何中的概念、法则、性质、公式、公理、定理以及由其内容所反映出来的数学思想和方法。

初中数学教学中要培养的基本技能是:能够按照一定的程序与步骤进行运算、作图或画图、进行简单的推理。

初中数学教学中发展学生的逻辑思维能力主要是逐步培养学生会观察、比较、分析、综合、抽象和概括;会用归纳、演绎和类比进行推理;会准确地阐述自己的思想和观点;形成良好的思维品质。

运算能力是:不仅会根据法则、公式等正确地进行计算,而且理解运

算的算理,能够根据题目条件寻求合理、简捷的运算途径。

空间观念主要是:能够由形状简单的实物想象出几何图形,由几何图形想象出实物的形状;由较复杂的平面图形分解出简单的、基本的图形;在基本图形中找出基本元素及其关系;能够根据条件作出或画出图形。

能够解决实际问题是指:能够解决带有实际意义和相关学科中的数学问题,以及解决生产和日常生活中的实际问题。在解决实际问题中,要使学生受到把实际问题抽象成数学问题的训练,逐步培养他们分析问题和解决问题的能力,形成用数学的意识。

数学教学中,发展思维能力是培养能力的核心。

良好的个性品质主要是指:正确的学习目的,浓厚的学习兴趣,顽强的学习毅力,实事求是的科学态度,独立思考勇于创新的精神和良好的学习习惯。

初中数学中的辩证唯物主义教育因素主要是:数学来源于实践又反过来作用于实践的观点,数学内容中普遍存在的运动变化、相互联系、相互转化等观点。

二、《全日制普通高级中学数学教学大纲(实验修订版稿)》中规定的教学目的

高中数学的教学目的是:“使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习所必须的代数、几何的基础知识和概率统计、微积分的初步知识,解决实际问题的能力以及创新意识;进一步培养良好的个性品质和辩证唯物主义观点。”

高中数学的基础知识是指:高中数学中的概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容所反映出来的数学思想和方法。

基本技能是指:按照一定的程序与步骤进行运算,处理数据(包括使用计算器)、简单的推理、画图以及绘制图表等技能。

思维能力主要是指:会观察、比较、分析、综合、抽象和概括;会用归纳、演绎和类比进行推理;会合乎逻辑地、准确地阐述自己的思想和观点;能运

用数学概念、思想和方法,辨明数学关系,形成良好的思维品质。

运算能力是指:会根据法则、公式等正确地进行计算,处理数据,并理解算理,能够根据问题的条件去寻求与设计合理、简捷的运算途径。

空间想象能力主要是指:能够由实物形状想象出几何图形,由几何图形想象出实物的形状;能够想象几何图形的运动和变化;能够从复杂的图形中区分出基本图形,并能分析其中的基本元素及其关系;能够根据条件作出或画出图形;会形象地揭示问题本质。

解决实际问题的能力是指:会提出、分析和解决带有实际意义或在相关学科、生产和日常生活中的数学问题;会使用数学语言表达问题,进行交流,形成用数学的意识。

创新意识主要是指:对自然界和社会中的数学现象具有好奇心,不断追求新知,独立思考,会从数学的角度发现和提出问题,进行探索和研究。

良好的个性品质主要是指:正确的学习目的,浓厚的学习兴趣,顽强的学习毅力,充分的学习信心,实事求是的科学态度,独立思考勇于探索创新的精神,欣赏数学的美学价值。

高中数学中辩证唯物主义观点主要是指:数学来源于实践又反过来作用于实践的观点;数学中普遍存在的对立统一、运动变化、相互联系、相互转化等观点。

三、《全日制义务教育数学课程标准》中的课程目标

根据《基础教育课程改革纲要(试行)》,结合数学教育的特点,《标准》明确了义务教育阶段数学课程的总目标。即“通过义务教育阶段的数学学习,学生能够获得适应未来社会生活和进一步发展所必需的重要数学知识(包括数学事实、数学活动经验)以及基本的数学思想方法和必要的应用技能;初步学会运用数学的思维方式去观察、分析现实社会,去解决日常生活和其它学科学习中的问题,增强应用数学的意识;体会数学与自然及人类社会的密切联系,了解数学的价值,增进对数学的理解和学好数学的信心;具有初步的创新精

神和实践能力,在情感态度和一般能力方面都得到充分发展”。

《标准》还从知识与技能、数学思考、解决问题、情感与态度等四个方面对课程目标作了进一步的阐述。

知识与技能

●经历将一些实际问题抽象为数与代数问题的过程,掌握数与代数的基础知识和基本技能,并能解决简单的问题。

●经历探索物体与图形的形状、大小、位置关系和变换的过程,掌握空间图形的基础知识和基本技能,并能解决简单的问题。

●经历提出问题、收集和处理数据、作出决策和预测的过程,掌握统计与概率的基础知识和基本技能,并能解决简单的问题。

数学思考

●经历运用数学符号和图形描述现实世界的过程,建立初步的数感和符号感,发展抽象思维。

●丰富对现实空间与图形的认识,建立初步的空间观念,发展形象思维。

●经历运用数据描述信息、作出推断的过程,发展统计观念。

●经历观察、实验、猜想、证明等数学活动过程,发展合情推理能力和初步的演绎推理能力,有条理地、清晰地阐述自己的观点。

解决问题

●初步学会从数学的角度提出问题、理解问题,并能综合运用所学的知识和技能解决问题,发展应用意识。

●形成解决问题的一些基本策略,体验解决问题策略的多样性,发展实践能力与创新精神。

●学会与人合作,并能与他人交流思维的过程和结果。

●初步形成评价与反思的意识。

情感与态度

●能积极参与数学学习活动,对数学有好奇心和求知欲。

●在数学学习活动中获得成功的体验,锻炼克服困难的意志,建立自信心。

●初步认识数学与人类生活的密切联系及对人类历史发展的作用,体验数学活动充满着探索与创造,感受数学的严谨性与数学结论的确定性。

●形成实事求是的态度以及质疑的独立思考的习惯。

《标准》中不仅使用了“了解(认识)、理解、掌握、灵活运用”等刻画知识技能的目标动词,而且使用了“经历(感受)、体验(体会)、探索”等刻画数学活动水平的过程性目标动词,从而更好地体现了《标准》对学生在数学思考、解决问题以及情感与态度等方面的要求。

知识技能目标	了解(认识)	能从具体事例中知道或举例说明对象的有关特征(或意义);能根据对象的特征,从具体情境中辨认出这一对象。
	理解	能描述对象的特征和由来;能明确地阐述此对象与有关对象之间的区别与联系。
	掌握	能在理解的基础上,把对象运用到新的情境中。
	灵活运用	能综合运用知识,灵活、合理地选择与运用有关的方法完成特定的数学任务。
	经历(感受)	在特定的数学活动中,获得一些初步的经验。
	体验(体会)	参与特定的数学活动,在具体情境中初步认识对象的特征,获得一些经验。
	探索	主动参与特定的数学活动,通过观察、实验、推理等活动发现对象的某些特征或与其它对象的区别和联系。

四、普通高中数学课程标准中的课程目标

高中数学课程的总目标是:使学生在九年义务教育数学课程的基础上,进一步提高作为未来公民所必要的数学素养,以满足个人发展与社会进步的需要。具体目标如下:

1. 获得必要的数学基础知识和基本技能,理解基本的数学概念、数学结论的本质,了解它们产生的背景、应用和在后续学习中的作

用,体会其中的数学思想和方法。

2. 提高空间想象、抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理等基本能力。

3. 在以上基本能力的基础上,初步形成科学地提出、分析和解决问题(包括简单的实际问题)的能力,数学表达和交流的能力,逐步发展独立获取数学知识的能力。

4. 发展数学应用意识和创新意识,力求对现实世界中蕴涵的一些数学模式进行思考和作出判断。

5. 提高学习数学的兴趣,树立学好数学的信心。形成锲而不舍的钻研精神和科学态度。

6. 具有一定的数学视野,初步认识数学的应用价值、科学价值和文化价值,逐步形成批判性的思维习惯,崇尚数学的理性精神,从而进一步树立辩证唯物主义世界观。

标准的目标要求包括三个方面:知识与技能过程与方法情感态度与价值观。所涉及的行为动词水平大致分类如下:

目标领域	水平	行为动词
知识与技能	知道/了解/模仿	了解,体会,知道,识别,感知,认识,初步了解,初步体会,初步学会,初步理解
	理解/独立操作	描述,说明,表达,表述,表示,刻画,解释,推测,想象,理解,归纳,总结,抽象,提取,比较,对比,判定,判断,会求,能,运用,初步应用,初步讨论
	掌握/应用/迁移	掌握,导出,分析,推导,证明,研究,讨论,选择,决策,解决问题
过程与方法	经历/模仿	经历,观察,感知,体验,操作,查阅,借助,模仿,收集,回顾,复习,参与,尝试
	发现/探索	设计,梳理,整理,分析,发现,交流,研究,探索,探究,探求,解决,寻求
情感态度与价值观	反应/认同	感受,认识,了解,初步体会,体会
	领悟/内化	获得,提高,增强,形成,养成,树立,发挥,发展

第三节 中学数学的教学内容和体系

中学数学的教学内容是指为了达到教学目的的要求而需要传授给学生的数学知识。应当选择哪些数学知识作为中学数学的教学内容,选择这些内容的依据是什么,内容选定后又如何编排,这是我们下面探讨的主要问题。

一、中学数学教学内容的选择原则

教学内容是由教学目的所决定,并为实现教学目的服务的。因此,在选择教学内容时必须考虑到社会对数学的需要、中学教育的性质及任务和培养目标、科学技术的发展、数学科学的发展及学科特点、中学生知识和能力的发展水平、教师的知识水平和教学能力、教育观念的转变、数学教育研究的发展等因素。我们认为,在中学数学教学内容的选择上应遵循以下原则:

1. 社会作用的原则

在选择内容时首先要考虑社会对数学的需求。随着社会的发展,社会各领域都需要用到数学,这就要求数学课程选取的内容是现代人们的生活、生产和科学技术普遍需要的数学知识。1983 ~ 1986 年国家课程教材研究所数学室和中国教育学会数学教育研究会,联合组织了一项大型社会基本情况调查,即“我国经济和社会的发展对数学基础知识和技能的需要的调查研究”,其目的是为确定中小学数学教学内容提供客观依据。调查研究由三个方面构成,其一是对全国 17 个省的航空航天、电子、机械、造船、水电、燃化、冶金、地质矿产、城建、交通、邮电、纺织、食品、卫生、农林牧、商业等 16 个行业对中小学数学知识的需用情况进行调查,其结果反映在《各行业对数学知识的需用情况调查表》中,调查的另两个方面的结果汇集在《高等院校各系(或专业)对中学数学知识需求情况统计表》和《76 种杂志中出现数学知识统计表》两个统计表中。调查表明:实数

和代数式(包括含指数式和对数式的代数式)的运算,一次方程(组),一元二次方程(包括可化为一元二次方程来解的分式方程、无理方程)和不等式的解法,一次、二次函数的概念,平面几何的基本知识,解直角三角形与求积以及画图的技能等是绝大多数行业和专业所需要的;传统的高中代数、立体几何、平面解析几何等课程的内容,各行业和专业对它们的需要程度及范围有所不同;对一些近代和现代的数学内容,诸如概率统计、微积分、优选法、统筹法、正交试验法、线性规划、计算机(器)、向量、矩阵、空间解析几何等的初步知识,有相当多的行业和专业不同程度地需要它们。

在国际上,英国数学教育界推出的具有国际影响的 Cockcroft 报告,是英国 20 世纪 80 年代数学教育的纲领性文件。在 1978 年,英国政府组织了“学校数学调查委员会”,Cockcroft 博士任主席,委员共 24 人,工作了三年之后,向政府提供了题为“Mathematics Counts”的报告,国际上称之为 Cockcroft 报告。全文分为三部分:第一部分论述了学生学习数学的需要——成人生活、就业及进一步学习;第二部分论述为此需要应该有怎样的课程内容及教学方法;第三部分提出了良好的数学教学所需要的条件和支持。这个报告反映出他们对各行业作了细致的调查,其中列出了制造业工人、农业经营者、技术及建筑工人、职员、旅馆服务员、售货员、护士等占人口绝大多数的英国人需要的数学,以此作为数学教育的出发点,并在此基础上提供了每个英国公民应掌握的最低标准,即《数学课程基础表》。

良好的调查研究表明,选择数学教学的内容应该是现代社会人们的生活、生产和科学技术普遍需要的知识,即内容的选择要遵循社会作用的原则。

2. 与科学技术的发展相适应的原则

高速发展的科学技术必定对教育提出更高的要求。当代科技的一个突出特点是定量化。人们在进行现代化的设计和控制中,从工