

ZHONGGUO KEPU MINGJIA MINGZUO HUALUOGENG ZHUANJI

华罗庚专辑

Hua Luo Geng Zhuan Ji

CONGSUNZIDE
SHENQIMIAOSUANTANQI



从孙子的 神奇妙算谈起

——数学大师华罗庚献给中学生的礼物

华罗庚◎著



中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

ZHONGGUO KEPU MINGJIA MINGZUO HUALUOGENG ZHUANJI

华罗庚专辑

Hua Luo Geng Zhuan Ji



从孙子的 神奇妙算谈起

—— 数学大师华罗庚献给中学生的礼物

华罗庚◎著



中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

从孙子的神奇妙算谈起/华罗庚著. —北京:中国少年儿童出版社, 2006. 11

(中国科普名家名作·华罗庚专辑)

ISBN 7-5007-8306-X

I. 从... II. 华... III. 数学-少年读物 IV. 01-

49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 127176 号

特约编辑:方运加

CONG SUNZI DE SHENQI MIAOSUAN TANQI



出版发行:中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

出版人:李学谦

执行出版人:赵恒峰

丛书策划:薛晓哲

责任编辑:许碧娟 薛晓哲

责任校对:陈寿兰

著者:华罗庚

美术编辑:缪惟

责任印务:金文涛

社址:北京市东四十二条 21 号

邮政编码:100708

总编室:010-64035735

传真:010-64012262

发行部:010-84037667 010-64032266-8269

http://www.ccppg.com.cn

E-mail: zbs@ccpg.com.cn

印刷:山东新华印刷厂德州厂

经销:新华书店

开本:880×1230 1/32

印张:9.3125

2006 年 11 月第 1 版

2006 年 11 月山东第 1 次印刷

印数:15000 册

ISBN 7-5007-8306-X/0·89

定价:18.50 元

图书若有印装问题,请随时向印务部退换。



华罗庚简历

华罗庚 1910 年 11 月 12 日出生于江苏省金坛县一个贫苦家庭。他仅念过九年书。1924 年初中毕业后，即离开学校协助其父亲料理一个很小的杂货铺，并利用业余时间刻苦自学数学，取得优异成绩。1930 年他在《科学》杂志上发表文章“苏家驹之代数五次方程式解法不能成立的理由”，受到熊庆来的赞赏，被邀到清华大学工作。由管理员、助教，再升为讲师。1934 年成为文化基金会研究员。1936 年至 1938 年，作为访问学者去英国剑桥大学工作两年。

抗日战争爆发后，华罗庚回国。由于他成绩卓著，在 1938 年至 1946 年间，他受聘为昆明西南联合大学教授。1946 年春，他应苏联科学院邀请到苏联访问三个月。1946 年至 1947 年，他应美国普林斯顿高等研究院邀请任研究员，并在普林斯顿大学执教。1948 年至 1950 年，他为伊利诺（在乌尔巴那）大学教授。

中华人民共和国成立,华罗庚于1950年率领全家回到北京,先后任清华大学教授,中国科学院数学研究所所长,中国数学会理事长,中国科学院数理化学部委员、学部副主任,中国科学技术大学数学系主任、副校长,中国科学院应用数学研究所所长,中国科学院副院长、主席团委员等职。

1979年后,他到英国、法国、联邦德国、荷兰与美国几十所大学与研究所讲学与访问,受到热烈欢迎与高度评价。

华罗庚是美国科学院国外院士,法国南锡大学与香港中文大学荣誉博士。

华罗庚是有世界声誉的数学家。他在数论,矩阵几何学,典型群,自守函数论,多个复变数函数论,偏微分方程及高维数值积分等很多领域都作出了卓越的贡献。著有论文二百余篇,专著十本,其中有八本已在国外翻译出版,有些可列为经典著作。他关于在中国普及应用数学方法的工作,具有高度开创性,影响深远,效果巨大。他对中国数学事业的组织领导、教育及培养青年数学家等工作都有特殊贡献。他也是中国数学竞赛活动的创始人。

华罗庚把一生的精力都贡献给了数学,1985年6月12日逝世在日本东京大学的讲台上。

目录



CONTENTS

从杨辉三角谈起	1
写在前面	1
1 杨辉三角的基本性质	3
2 二项式定理	7
3 开方	11
4 高阶等差级数	14
5 差分多项式	21
6 逐差法	27
7 堆垛术	29
8 混合级数	33
9 无穷级数的概念	36
10 无穷混合级数	40
11 循环级数	44
12 循环级数的一个例子——斐波那契	

目录



CONTENTS

级数	49
13 倒数级数	53
14 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的渐近值	60
从祖冲之的圆周率谈起	68
1 祖冲之的约率 $\frac{22}{7}$ 和密率 $\frac{355}{113}$	68
2 人造行星将于 2113 年又接近地球	70
3 辗转相除法和连分数	71
4 怎样算出人造行星和地球的接近 日期?	76
5 约率和密率的内在意义	78
6 为什么四年一闰,而百年又少一闰?	82
7 农历的月大月小、闰年闰月	85
8 火星大冲	87
9 日月食	90
10 日月合璧,五星联珠,七曜同宫	92
11 计算方法	94
12 有理数逼近实数	97
13 渐近分数	101

14	实数作为有理数的极限	105
15	最佳逼近	107
	附录 祖冲之简介	116
	从孙子的“神奇妙算”谈起	120
	序	120
1	问题的提出	121
2	“笨”算法	123
3	口诀及其意义	127
4	辗转相除法	129
5	一些说明	133
6	插入法	135
7	多项式的辗转相除法	138
8	例子	140
9	实同貌异	142
10	同余式	144
11	一次不定方程	148
12	原则	152
	附录 《孙子算经》	154
	数学归纳法	155
1	写在前面	155

中国科普
名家名作
华罗庚



目录
CONTENTS

3

目录



CONTENTS

2	归纳法的本原	158
3	两条缺一不可	162
4	数学归纳法的其他形式	169
5	归纳法能帮助我们深思	174
6	“题”与“解”	178
7	递归函数	186
8	排列和组合	190
9	代数恒等式方面的例题	195
10	差分	199
11	李善兰恒等式	205
12	不等式方面的例题	208
13	几何方面的例题	217
14	自然数的性质	223
	谈谈与蜂房结构有关的数学问题	226
	楔子	226
1	有趣	228
2	困惑	230
3	访实	231
4	解题	233
5	浅化	237

6	慎微	244
7	切方	245
8	疑古	248
9	正题	255
10	设问	258
11	代数	263
12	几何	266
13	推广	268
14	极限	273
15	抽象	274
	附录 三分角问题	278

中国科普
名家名作
华罗庚



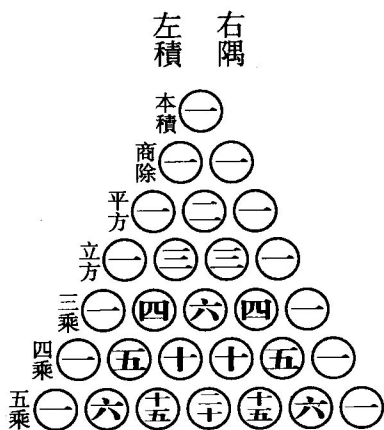
目录
CONTENTS

5

从杨辉三角谈起

CONGYANGHUISANJIAOTANQI

写在前面



左表乃積數。
 右表乃隅算。
 中藏者皆廉。
 以廉乘商方。
 命實而除之。

前页的图形,称为“杨辉三角”.杨辉三角并不是杨辉发明的,原来的名字也不是“三角”,而是“开方作法本源”;后来也有人称为“乘方求廉图”.这些名称实在太古老了些,所以我们简称之为“三角”.

杨辉是我国宋朝时候的数学家,他在公元 1261 年著了一本名为《详解九章算法》的书,里面画了这样一张图,并且说这个方法出于《释锁算书》,贾宪曾经用过它.但《释锁算书》早已失传,这书刊行的年代无从查考,是不是贾宪所著也不可知,更不知道在贾宪以前是否已经有这个方法.然而有一点是可以肯定的,这一图形的发现在我国当不迟于 1200 年左右.在欧洲,这图形称为“帕斯卡(Pascal)三角”.因为一般都认为这是帕斯卡在 1654 年发明的.其实在帕斯卡之前已有许多人论及过,最早的是德国人阿批纳斯(Petrus Apianus),他曾经把这个图形刻在 1527 年著的一本算术书的封面上.可是无论如何,杨辉三角的发现,在我国比在欧洲至少要早 300 年光景.

本章节是为中国数学会创办数学竞赛而作的,其中一部分曾经在中国数学会北京分会和天津分会举办的数学通俗讲演会上讲过.它的目的是给中学生介绍一些数学知识,可以充当中学生的课外读物.因此,我们既不

钻进考证的领域,为这一图形的历史多费笔墨,也不只是限于古代的有关杨辉三角的知识,而是从我国古代的这一优秀创造谈起,讲一些和这图形有关的数学知识. 由于读者对象主要是中学生,我们不得不把论述的范围给与适度的限制.

我必须在此感谢潘一民同志,本章节的绝大部分是他根据我的非常简略的提纲写出的.

1 杨辉三角的基本性质

我们先来考察一下杨辉三角里面数字排列的规则. 一般的杨辉三角是如下的图形:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
 \text{第 } n \text{ 行} & & 1 & & C_{n-1}^1 & & \cdots & & C_{n-1}^{n-1} & & C_{n-1}^n & & \cdots & & C_{n-1}^{n-2} & & 1 \\
 \text{第 } n+1 \text{ 行} & & 1 & & C_n^1 & & C_n^2 & & \cdots & & C_n^r & & \cdots & & C_n^{n-2} & & C_n^{n-1} & & 1 \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
 \end{array}$$



这里, 记号 C_n^r 是用来表示下面的数:

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!},$$

而记号 $n!$ (同样 $r!$ 和 $(n-r)!$), 我们知道它是代表从 1 到 n 的连乘积 $n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, 称为 n 的阶乘. 学过排列组合的读者还可以知道, C_n^r 也就是表示从 n 件东西中取出 r 件东西的组合数.

从上面的图形中我们能看出什么呢? 就已经写出的一些数目字来看, 很容易发现这个三角形的两条斜边都是由数字 1 组成的, 而其余的数都等于它肩上的两个数相加. 例如 $2=1+1$, $3=1+2$, $4=1+3$, $6=3+3$, ... 其实杨辉三角正是按照这个规则作成的. 在一般的情形, 因为

$$\begin{aligned}
 C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r &= \frac{(n-1)!}{(r-1)! (n-r)!} \\
 &\quad + \frac{(n-1)!}{r! (n-1-r)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{r! (n-r)!} [r + (n-r)] \\
 &= \frac{n!}{r! (n-r)!} \\
 &= C_n^r,
 \end{aligned}$$

这说明了, 上图中的任一数 C_n^r 等于它肩上的两数 C_{n-1}^{r-1}



和 C_{n-1}^r 的和.

为了方便起见,我们令本来没有意义的记号 C_n^0 和 C_{n-1}^n 分别等于 1 和 0,这样就可以把刚才得到的结果写成关系式:

$$C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r = C_n^r (r=1, 2, \dots, n)$$

而称它为杨辉恒等式. 这是杨辉三角最基本的性质.

对于杨辉三角的构成,还可以有一种有趣的看法.

如图 1,在一块倾斜的木板上钉上一些正六角形的小木块,在它们中间留下一些通道,从上部的漏斗直通到下部的长方框子. 把小弹子倒在漏斗里,它首先会通过中间的一个通道落到第二层六角板上面,以后,落到

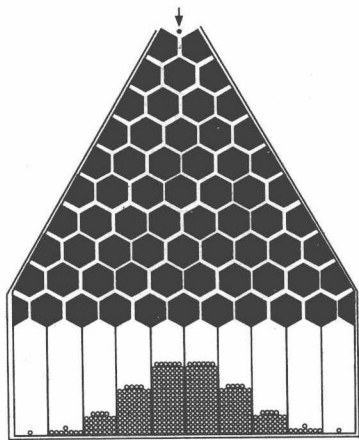


图 1

第二层中间一个六角板的左边或右边的两个竖直通道里去. 再以后, 它又会落到下一层的三个竖直通道之一里面去. 这时, 如果要弹子落在最左边的通道里, 那么它一定要是从上一层的左边通道里落下来的才行(1个可能情形); 同样, 如果要它落在最右边的通道里, 它也非要从上一层的右边通道里落下来不可(1个可能情形); 至于要它落在中间的通道里, 那就无论它是从上一层的左边或右边落下来的都成(2个可能情形).

这样一来, 弹子落在第三层(有几个竖直通道就算第几层)的通道里, 按左、中、右的次序, 分别有 1, 2, 1 个可能情形. 不难看出, 在再下面的一层(第四层), 左、右两个通道都只有 1 个可能情形(因为只有当弹子是从第三层的左边或右边落下来时才有可能); 而中间的两个通道, 由于它们可以接受从上一层的中间和一边(靠左的一个可以接受左边, 靠右的一个可以接受右边)掉下来的弹子, 所以它们所有的可能情形应该分别是第三层的中间和一边(左边或右边)的可能情形相加, 即是 3 个可能情形. 因此第四层的通道按从左到右的次序, 分别有 1, 3, 3, 1 个可能情形.

照同样的理由类推下去, 我们很容易发现一个事

实,就是任何一层的左右两边的通道都只有一个可能情形,而其他任一个通道的可能情形,等于它左右肩上两个通道的可能情形相加.这正是杨辉三角组成的规则.于是我们知道,第 $n+1$ 层通道从左到右,分别有 $1, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, 1$ 个可能情形.

我们还可以这样来看上面的结论:如果在倾斜板上做了 $n+1$ 层通道,从顶上漏斗里放下 $1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + 1$ 颗弹子,让它们自由地落下,掉在下面的 $n+1$ 个长方框里,那么分配在各个框子中的弹子的正常数目(按照可能情形来计算),正好是杨辉三角的第 $n+1$ 行.注意,这是指“可能性”而不是绝对如此,这种现象称为概率现象.

以下我们来讨论杨辉三角的一些应用.

2 二项式定理

和杨辉三角有最直接联系的是二项式定理.学过初中代数的人都知道:

$$(a+b)^1 = a+b,$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

