课程学习 考研辅导

高等代数选讲

GAODENG DAISHU XUANJIANG

刘法贵 王争艳 赵 娟 刘建厅 编著

黄河水利出版社

课程学习　考研辅导

高等代数选讲

刘法贵　王争艳
赵　娟　刘建厅　编著

黄河水利出版社
·郑州·

内 容 提 要

本书主要侧重于重要知识点的挖掘和难点的分析，旨在帮助学生掌握高等代数解题思路、方法和技巧，提高运用数学知识解决实际问题的能力.

本书可作为本专科学生学习高等代数课程的辅导教材，对准备考研的理工科学生也是一本很好的考研复习资料，本书也可作为高等学校数学教师教学指导的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数选讲/刘法贵等编著. —郑州：黄河水利出版社，2009.10

ISBN 978-7-80734-734-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.高等代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 183834 号

出 版 社：黄河水利出版社

地址：河南省郑州市顺河路黄委会综合楼 14 层　邮政编码：450003

发行单位：黄河水利出版社

发行部电话：0371-66026940、66020550、66028024、66022620(传真)

E-mail：hhslcbs@126.com

承印单位：黄河水利委员会印刷厂

开本：787 mm×1 092 mm　1/16

印张：8.5

字数：207 千字　　印数：1—1 400

版次：2009 年 10 月第 1 版　　印次：2009 年 10 月第 1 次印刷

定价：20.00 元

前　言

高等代数是理工科学生的重要的公共基础课，它既为专业基础课和专业课奠定必要的数学基础，也对学生科学思维训练的形成起着重要的作用. 由于高等代数的高度抽象性、严谨性，使学生在学习过程中普遍感觉到高等代数的部分知识点难以消化和理解. 为此，我们编写了这本参考书，旨在帮助学生深入理解高等代数的知识结构、基本概念和基本方法，掌握解题思路、方法和技巧，提高运用数学知识解决实际问题的能力.

本书的内容涵盖高等代数的主要知识点，并在组织编写上力求一个“精”字.

1. 选题精. 本书选题主要源于近几年国内出版的高质量的高等代数参考书和教材（在此，作者特向参考文献作者表示感谢），并且具有典型的代表性.

2. 内容总结精炼. 我们在本书中着重强调方法和技巧，强调知识体系的一贯性，而不是简单地重复教材中的知识点。对容易引起歧义的基本概念进行精讲，对重要知识点和难点部分进行精讲.

3. 题目剖析精. 本书并不是给出例题的详细解答，而是“画龙点睛”式地给予提示和介绍，以便给读者思考的空间，充分激发读者的发散思维，促进读者数学意识和数学能力的提高.

全书包括高等代数的主要知识点和难点，可作为本专科学生学习高等代数课程的辅导教材，对准备考研的理工科学生也是一本很好的考研复习资料，本书也可作为高等学校数学教师教学指导的参考书.

全书由王争艳、赵娟和刘建厅编写，由刘法贵负责全书统稿.

本书的出版得到了华北水利水电学院重点学科建设基金的资助. 作者同时感谢黄河水利出版社马广州同志为本书的出版付出的辛勤劳动.

由于作者水平有限，难免有疏漏与不妥之处，恳请读者不吝批评指正.

作者

2009 年 9 月

本书常用符号说明:

$\boldsymbol{A}_{m\times n}$——$m\times n$ 阶矩阵 ($m=n$ 简记为 $\boldsymbol{A}_n$)

$R(\boldsymbol{A})$—— 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩

A_{ij}—— 元素 a_{ij} 的代数余子式

$\boldsymbol{A}^*$—— 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

$\boldsymbol{E}$—— 单位矩阵

P—— 数域

R—— 实数域

C—— 复数域

Q—— 有理数域

$\dim(V)$—— 空间 V 的维数

目　录

第一部分 线性代数

(理工科 / 经济类学科)

第 1 章　n 阶行列式

行列式是线性代数中一个基本概念和重要的数学工具，在线性代数中有重要的应用，例如线性方程组，矩阵特征值等．本章的重点是行列式的计算，应当在掌握行列式基本概念和基本性质的基础上，熟练行列式的计算．

一、行列式的定义及性质

1. 行列式的定义．

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

在行列式定义中，需要注意 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个不重复的排列，这意味着 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 或 $a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$ 来自不同的行和不同的列．一个 n 阶行列式，代表 $n!$ 项的代数和，其中每一项由处于不同行不同列的 n 个元素的乘积构成，每项前面有符号 $(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}$．

例 1　设随机变量 X_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 独立同分布，X_{ij} 的数学期望 $EX_{ij}=2$．令 $Y=\det(X_{ij})$．求 Y 的数学期望 EY．

答案或提示　利用行列式的定义及数学期望的性质，得 $EY=0$．

例 2　已知 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$．求 $f^{(3)}(x),f^{(4)}(x)$．

答案或提示　利用行列式的定义，确定 $f(x)$ 的 x^4 和 x^3 的系数．

例 3　证明行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$．

答案或提示　利用行列式定义即可．

2. 行列式的性质．

(1) 行列式行列互换，其值不变；

(2) 互换两行 (列), 行列式的值变号；

(3) 某行 (列) 有公因子，可将公因子提出；

(4) 某行 (列) 的每个元素为两数之和，可以将行列式拆为两个行列式之和；

(5) 两行 (列) 成比例，其值为零；

(6) 某行 (列) 的 k 倍加另一行 (列), 其值不变．

在性质 (4) 中要注意每次只能拆一行 (列), 同时拆两行 (列) 或以上是错误的.

例 4 已知 105,147,182 是 7 的倍数. 证明 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$ 也是 7 的倍数.

答案或提示 实施 $c_3+100c_1+10c_2$, (c_i 表示第 i 列) 再利用行列式性质和已知条件即证.

例 5 求下列方程的解:

$$(1)\ f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}=0.\ (2)\ f(x)=\begin{vmatrix} x & b & c & d \\ b & x & c & d \\ b & c & x & d \\ b & c & d & x \end{vmatrix}=0.$$

答案或提示 (1) 易知 $f(x)$ 为 x 的三次多项式, 所以有 3 个根, 再利用行列式性质即得 3 个根为 2,3,4;(2) 利用行列式的性质, 易见 b,c,d 为方程的 3 个根, 再由第 2,3,4 列加到第 1 列提出公因式得第四个根 $-(b+c+d)$.

例 6 求 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & x^2-2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & x^2-5 \end{vmatrix}$.

答案或提示 若 a 是多项式 $f(x)$ 的根, 即 $f(a)=0$, 则 $x-a$ 是多项式 $f(x)$ 的一个因子. D_4 是 x 的 4 次多项式. 若第 1,3 列成比例, 则 $x^2-2=-1$, 即 $x=\pm1$ 是 D_4 的根; 同样令第 1,4 行成比例, 得 D_4 另外 2 根 $x=\pm3$. 所以 $D_4=k(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$, 比较左右两端最高次幂系数得 $k=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$.

例 7 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},2\boldsymbol{r}_2,3\boldsymbol{r}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 是 3 维列向量, $|\boldsymbol{A}|=18,|\boldsymbol{B}|=2$. 求 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

答案或提示 利用 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{r}_2,2\boldsymbol{r}_3)$ 及行列式性质即可.

例 8 已知函数 $f(x),g(x),h(x)$ 具有二阶连续导数. 求

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{t^3}\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(x+t) & g(x+t) & h(x+t) \\ f(x+2t) & g(x+2t) & h(x+2t) \end{vmatrix}$$

答案或提示 实施 $r_2-r_1,r_3-2r_2+r_1$, 再将 $\dfrac{1}{t^3}$ 分解为 $\dfrac{1}{t}$ 和 $\dfrac{1}{t^2}$, 并分别归于第 2,3 行.

3. 行列式展开定理.

在一个 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列 $(1\leqslant k\leqslant n)$, 位于这些行列交叉点上 k^2 个元素按照原来次序组成的 k 阶行列式称为 D 的 k 阶子式, 记为 M. 余下的 $n-k$ 行 (列) 按照原来次序组成的 $n-k$ 阶行列式称为 M 的余子式, 记为 M'. $(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}M'$ 为 M 的代数余子式, 其中 $i_1,\cdots,i_k$ 和 $j_1,\cdots,j_k$ 分别为 M 所在 D 中的行指标和列指标.

Laplace **定理** 设在 D 中任意取定 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 个行. 由这 k 行元素所组成的一切 k 阶子式与它们代数余子式的乘积的和等于行列式 D.

例 9 计算下列行列式:

(1) $D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$. (2) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$.

答案或提示 (1) 取第 1,4 行利用 Laplace 定理展开. (2) 取第 $1,2n$ 行利用 Laplace 定理展开, 或利用递推法求之: 按第 1 行展开, 得 $D_{2n}=(a^2-b^2)D_{2(n-1)}$. 该两小题属 $|\times|$ 型的行列式.

推论 在定理中取 $k=1$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

行列式中某行 (列) 出现很多零元素或题目出现代数余子式 A_{ij} 时, 一般利用该推论.

例 10 已知 n 阶行列式 D 的代数余子式 $A_{ij}=a_{ij}$, 且 D 含非零元素. 证明 $D\neq 0$. 进一步, 若 $n=3$, 则 $D=1$.

答案或提示 不妨设 $a_{11}\neq 0$, 则按第 1 行展开, 得 $D=a_{11}^2+\cdots+a_{1n}^2\neq 0$. 由 $A_{ij}=a_{ij}$ 知 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 再利用 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ 即证.

例 11 已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$. 求

(1) $-A_{41}+2A_{42}-2A_{43}-3A_{44}$, $A_{41}-A_{42}+A_{43}+2A_{44}$;

(2)$S_1=A_{21}+2A_{22}$, $S_2=A_{23}+A_{24}$.

答案或提示 (1)D, 0.

(2) 按第 2 行展开有 $3S_1+S_2=D$, 再利用第 3 行知 $S_1+2S_2=0$, 联立解方程组即得.

例 12 已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$. 求

(1) $A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$;

(2)$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$, 其中 M_{ij} 表示元素 a_{ij} 的余子式.

答案或提示 (1) 注意到 A_{ij} 与 a_{ij} 所在的行和列的元素无关的特点, 因而可构造与 D 的 A_{ij} 相同的行列式 $\overline{D}$ 计算之. 求解该题只需将第 3 行元素全换为 1, 所得行列式值即为所求结果.

(2) $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$, 把行列式第 4 行元素换为 $-1,1,-1,1$ 所得行列式的值即为所求结果.

4. 几个特殊行列式的值.

(1) 三角形行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 次三角形行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(3) 范德蒙行列式.

$$V(a_1,\cdots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

(4) 分块三角行列式.

(a) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_n & * \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_n & \boldsymbol{0} \\ * & \boldsymbol{B}_m \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_n||\boldsymbol{B}_m|$;

(b) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_n \\ \boldsymbol{B}_m & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \boldsymbol{A}_n \\ \boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}_n||\boldsymbol{B}_m|$, 其中 $\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{B}_m$ 分别为 n 阶方阵, m 阶方阵.

例 13　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{C}|=2$. 求 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A} \\ (\frac{2}{3}\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix}$.

答案或提示　利用 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$ 及上面计算公式.

例 14　设 $\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维列向量, $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1, \boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$. 证明 $|\boldsymbol{A}|=0$.

答案或提示　注意到 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{0}\ (\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}) \Rightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 即证.

例 15　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$. 求 $|\boldsymbol{A}|$.

答案或提示　利用 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$, 并注意到 $|\boldsymbol{A}|$ 的 a^4 系数为正即得.

例 16 设 $n \geqslant 3, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{pmatrix}$. 求 $|\boldsymbol{A}|$.

答案或提示 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

对于矩阵的行列式，其计算的一般方法：

(1) 利用公式，如例 13 题；

(2) 利用 $|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}^2| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$, 如例 15 题；

(3) 分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$, 如例 16 题；

(4) 利用特征值 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, 如练习题 (二)5 题；

(5) 其他，如例 14 题.

二、行列式的计算

行列式计算的主要思路是利用行列式的性质和展开定理，化繁为简，化高阶为低阶，化未知为已知. 计算过程中必须认真观察行列式的规律，发现其特点，探索和寻找最佳的解题思路. 常见的方法有：

(1) 化为已知行列式 —— 利用行列式的性质把行列式化为已知的上 (下) 三角行列式，范德蒙行列式等.

(2) 降阶法 —— 把行列式 D 按某一行 (列) 展开或按某 k 行 (列) 展开，把高阶行列式化为低阶行列式.

(3) 升阶法 —— 把 n 阶行列式 D 增加一行一列使之成为 $n+1$ 阶行列式 D_1, 而 D_1 更容易计算. 这里应保证 $D = D_1$.

(4) 递推法 —— 利用行列式展开定理把 n 阶行列式 D_n 用 D_{n-1} 或 D_{n-2} 表示，以此求得 D_n.

(5) 拆项法 —— 把行列式 D 的某一行 (列) 改写为两个元素之和，利用行列式的性质拆为两个行列式的和.

(6) 数学归纳法 —— 先观察行列式 D_1, D_2, D_3, 得出猜想，然后利用数学归纳法证明之.

例 17 计算下列行列式：

(1) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$. (2) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & \cdots & & n \end{vmatrix}$.

(3) $D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$. (4) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

(5)$D_n=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$. (6) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

(7) $D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$. (8) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

(9)$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

(10) $D_n=\begin{vmatrix} 1+x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ z & 1+x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z & 1+x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z & 1+x \end{vmatrix}$ $(x=yz)$.

答案或提示

(1) 该行列式具有各行 (列) 元素之和相等的特点. 可将第 $2,\cdots,n$ 列 (行) 都加到第 1 列 (行), 则第 1 列 (行) 的元素相等, 然后第 $2,\cdots,n$ 行 (列) 都减去第 1 行 (列) 即可化为三角 (次三角) 行列式.

(2) 此为箭头形（或爪形）行列式. 对于此类行列式可直接利用行列式性质将其一边化为零, 从而可根据三角或次三角行列式结果求值.

(3) 第 $2,\cdots,n$ 行分别减去第 1 行, 化为箭头形行列式, 再利用求箭头形行列式的方法即得.

(4) 第 $1,2,4,\cdots,n$ 行分别减去第 3 行即得. 注意须单独求 D_1, D_2.

(5) 首先调换为标准的范德蒙行列式：将第 $n+1$ 行依次与第 n 行, $\cdots$, 第 1 行调

换，$\cdots$ (共调换了 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 次)，最后得

$$D=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}[(a-i+1)-(a-j+1)]=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(i-j)=\prod_{k=1}^{n}k!$$

(6) 做如下行列式

$$p(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_n^{n} & x^{n} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

由此可知 D_n 是 $p(x)$ 的 x^{n-1} 的代数余子式．而

$$p(x)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)[x^n+(-1)(x_1+x_2+\cdots+x_n)x^{n-1}+\cdots]$$

另一方面，将 $p(x)$ 按第 $n+1$ 列展开，得

$$p(x)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)x^n+(-1)^{2n+1}D_nx^{n-1}+\cdots$$

由此即得 D_n.

(7) 当 $y=z$ 时，易求；当 $y\neq z$ 时，将第 1 行拆为 $y+(x-y),y+0,\cdots,y+0$, 并展开，得 $D_n=y(x-z)^{n-1}+(x-y)D_{n-1}$. 注意到 $D^{\mathrm{T}}=D$, 又得 $D_n=z(x-y)^{n-1}+(x-z)D_{n-1}$, 由此即得 D_n.

(8) 将第 $2,3,\cdots,n$ 列加到第 1 列即得 $D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.

(9) $D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$. 因此，得

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})=\cdots=\beta^n,\ D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n$$

从而，当 $\alpha\neq\beta$ 时，$D_n=\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$; 当 $\alpha=\beta$ 时，$D_n=(n+1)\alpha^n$.

(10) 利用数学归纳法：$D_1=1+x, D_2=(1+x)^2-yz=1+x+x^2, D_3=1+x+x^2+x^3$. 由此得 $D_n=1+x+x^2+\cdots+x^n$. 然后利用数学归纳法证明即可．或利用递推法：

$$D_n=(1+x)D_{n-1}-yzD_{n-2}=(1+x)D_{n-1}-xD_{n-2}$$

于是

$$D_n-D_{n-1}=x(D_{n-1}-D_{n-2})=\cdots=x^{n-2}(D_2-D_1)=x^n$$

对 n 阶行列式的计算结果一般情况下都应当检验：用 $n=1,2$ 代入检验结果是否正确．如果 D_1,D_2 结果与得到的 D_n 不一致，要么题目本身需要考虑 D_1,D_2(例如 (4) 小题)，要么计算是错误的.

利用递推法一般得到递推公式 $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$. 这可以视为一差分方程，求出特征方程 $x^2 - px - q = 0$ 的两个根 x_1, x_2, 则得

$$D_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n \ (x_1 \neq x_2), \text{或} D_n = (C_1 + nC_2) x_1^n \ (x_1 = x_2)$$

其中，C_1, C_2 由 D_1, D_2 得到.

三、 Cramer 法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式 $D = |\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中，D_j 是把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 j 列换为方程组的常数项 $b_1, \cdots, b_n$ 所成矩阵的行列式.

(1) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解的充要条件是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$;

(2) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是 $|\boldsymbol{A}| = 0$;

(3) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解的充要条件是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$;

(4) $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 无解或者有无穷多解.

四、练习题

(一) 填空选择题.

1. 设 n 阶行列式 D_n 中零元素的个数大于 $n^2 - n$. 则 $D_n = (\quad)$.

2. 已知 $D = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. 则 $A_{41} + 2A_{42} + 3A_{43} + 4A_{44} = (\quad)$.

3. 如果 n $(n > 1)$ 阶行列式中的元素或为 1 或为 -1. 则其值为 (　　).

   a) 1　　b) -1　　c) 奇数　　d) 偶数

4. 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别是 n, m 阶可逆矩阵. 则 $\dfrac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix}} = (\quad)$.

   a) 1　　b) -1　　c) $(-1)^n$　　d) $(-1)^{mn}$

5. 设 a, b, c 是 $x^3 + px + q = 0$ 的 3 个根. 则 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (\quad)$.

(二) 计算证明题.

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & p & q & r+s \\ 1 & q & r & s+p \\ 1 & r & s & p+q \\ 1 & s & p & q+r \end{vmatrix}$. (2) $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1\cdots & 1 \\ 1 & 5 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 5 \end{vmatrix}$. (4) $D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ $(a_i \neq 0)$.

2. 求一个二次多项式 $f(x)$ 使 $f(1)=-1, f(-1)=9, f(2)=-3$.

3. 已知 $\boldsymbol{A}_n=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. 求 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}$.

4. 已知 $M_i(x_i, y_i)$ $(i=1,2,3)$ 为不共线三点, x_i 互异. 求过点 M_i, 对称轴与 y 轴平行的抛物线方程.

5. 设 $\boldsymbol{A}_n$ 实对称, 且 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}, R(\boldsymbol{A})=k$. 求 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|$.

6. 证明过平面上 $n+1$ 个横坐标两两互异的点 $(x_1,y_1),\cdots,(x_{n+1},y_{n+1})$ 有唯一的一条代数曲线 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$.

7. 设 $f_i(x)$ 为次数不超过 $n-2$ $(n>1)$ 的多项式, $a_i \neq a_j$ $(i,j=1,2,\cdots,n; i\neq j)$. 证明 $|f_j(a_i)|=0$.

8. 如果 n 阶行列式 D_n 的所有元素为 1 或 -1, 则当 $n \geqslant 3$ 时, $|D_n| \leqslant (n-1)!(n-1)$.

9. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 只是第 j 列不同. 证明 $2^{1-n}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

10. 设 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$. 求 D 展开式中正项的总数.

答案或提示

(一) 填空选择题: (1) 15; (2) 19; (3) d); (4) d); (5) 0.

(二) 计算证明题: 1.(4) $r_1-\dfrac{1}{a_1}r_2, r_1-\dfrac{1}{a_2}r_3, \cdots, r_1-\dfrac{1}{a_n}r_{n+1}$.

2. 设 $f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$, 利用已知条件可得关于 3 个未知量 a_0,a_1,a_2 的线性方程组, 利用 Cramer 法则求解即可.

3. 类似例 12 题, 将 A_n 第 i 行元素全换为 1, 所得矩阵行列式的值等于 $A_{i1}+A_{i2}+\cdots+A_{in}(i=1,\cdots,n)$.