JINPAI

南师大教辅·一课一练丛书

第一推荐　第一选择

金牌 MO KUAI JIAO YU LIAN

模块教与练

高中数学【选修2-3】

苏教版

本书编写组　组编

南京师范大学出版社

金牌 MO KUAI JIAO YU LIAN

模块教与练

高中数学【选修2-3】

苏教版

本书编写组　组编

南京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

模块教与练·高中数学·选修2-3（苏教版）/本书编写组组编. —南京：南京师范大学出版社，2009.8
ISBN 978-7-81101-888-2/G·1318

Ⅰ.模… Ⅱ.本… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第153434号

书　　名	模块教与练·高中数学·选修2-3(苏教版)
组　　编	本书编写组
责任编辑	王　娟　王书贞
出版发行	南京师范大学出版社
地　　址	江苏省南京市宁海路122号(邮编:210097)
电　　话	(025)83598077(传真)　83598412(营销部)　83598297(邮购部)
网　　址	http://press.njnu.edu.cn
E－mail	nspzbb@njnu.edu.cn
印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	850×1168　1/16
印　　张	5.5
字　　数	178千
版　　次	2009年10月第1版　2009年10月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81101-888-2/G·1318
定　　价	11.00元

目录

CONTENTS

第 1 章　计数原理

1.1　两个基本计数原理

正确理解加法原理与乘法原理的意义，分清它们的条件和结论；能结合树状图来帮助理解加法原理与乘法原理；正确区分加法原理与乘法原理，哪一个与分类有关，哪一个与分布有关；能应用加法原理与乘法原理解决一些简单的应用题，提高我们理解和运用两个原理的能力；通过对加法原理与乘法原理的学习，培养我们周密思考、细心分析的良好习惯.

新课导航

要点 1　分类计数原理

做一件事，完成它可以有 n 类方法，在第一类方法中有 m_1 种不同的方法，在第二类中有 m_2 种不同的方法，…，第 n 类中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

例 1　在所有的两位数中，个位数字大于十位数字的两位数共有多少个？

例 2　高三(1)班有学生 50 人，男 30 人，女 20 人；高三(2)班有学生 60 人，男 30 人，女 30 人；高三(3)班有学生 55 人，男 35 人，女 20 人.

(1)从高三(1)班或(2)班或(3)班选 1 名学生任学生会主席，有多少种不同的方法？

(2)从高三(1)班或(2)班的男生中或从高三(3)班女生中选 1 名学生任学生会体育部长，有多少种不同的选法？

【归纳】　分类计数原理是对涉及完成某一件事的不同方法种数的计数方法，每一类的各种方法都是相互独立的，每一类中的每一种方法都可以独立地完成这件事.解决该类问题应从简单入手，分类讨论，要做到不重、不漏，尽量尝试一题多解，从不同角度考虑问题.

要点 2　分步计数原理

做一件事，完成它需要分 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，…，做第 n 步中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$ 种不同的方法.

例 3　设集合 $M=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$，$P(a,b)$是坐标平面上的点，a、$b\in M$.请问 P 可以表示：

(1)平面上多少个不同的点？

(2)第二象限内的点有多少个？

(3)不在直线 $y=x$ 上的点多少个？

例 4　4 张卡片的正反面分别有 0 与 1，2 与 3，4 与 5，6 与 7，将其中 3 张卡片放在一起，可以组成多少个不同的三位数？

【归纳】　利用分步乘法计数原理解决问题要注意：①要按事件发生的过程合理分布，即分布是

有先后顺序的；②各步相互依存，缺一不可，只有各个步骤都完成才算完成这件事.

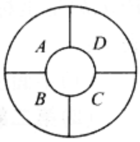
要点 3　分类计数原理和分步计数原理的共同点在于它们都是研究完成一件事，共有多少种不同的方法. 不同点在于完成一件事的方式不同，分类计数原理中是“分类完成”，即任何一类办法中任何一种方法都能独立完成这件事；分步计数原理中是“分步完成”，即这些方法需要分步，各个步骤顺次相依，且每一步都完成了，才能完成这件事.

例 5　一个口袋中装有 5 个小球，另一个口袋中装有 4 个小球，所有小球颜色都不相同.

(1)从两个口袋内任取 1 个小球，有多少种不同的取法？

(2)从两个口袋中各取 1 个小球，有多少种不同的取法？

例 6　如图，一环形花坛分成 A,B,C,D 四块，现有 4 种不同的花供选种，要求在每块里种 1 种花，且相邻的 2 块种不同的花，则不同的种法总数为多少？



【归纳】　应用分类计数原理必须要求各类的每一种方法都保证完成这件事；应用分步计数原理则需各步均是完成这件事必需的若干彼此独立的步骤. 解题时分清用分类计数原理还是分步计数原理的关键在于事件是“分类完成”还是“分步完成”.

课内训练

1. 集合 $P=\{x,1\}$，$Q=\{y,1,2\}$，其中 $x,y\in\{1,2,3,\cdots,9\}$，且 $P\subseteq Q$，把满足上述条件的一对有序整数对(x,y)作为一个点的坐标，则这样的点的个数有______.

2. 某城市的电话号码由七位升为八位(首位数字均不为零)，则该城市可增加的电话部数为______.

3. 某班新年联欢会原定的 6 个节目已经安排成节目单，开演前又增加了 3 个新节目，如果将这 3 个节目插入到节目单中，那么不同的插法有______种.

4. 5 位同学报名参加两个课外活动小组，每位同学限报其中的一个小组，则不同的报名方法有______种.

5. 安排 3 名支教教师去 6 所学校任教，每校至多 2 人，则不同的分配方案共有______种.

6. 一个三层书架，分别放置语文书 12 本，数学书 14 本，英语书 11 本.

(1)从中取出 1 本书，共有多少种不同的取法？

(2)从中取出语文、数学、英语书各 1 本，共有多少种不同的取法？

(3)从中取出 2 本书，且语文、数学、英语每种只能取 1 本，共有多少种不同的取法？

7. (1)设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$，$B=\{x,y,z\}$，从 A 到 B 共有多少个不同的映射？

(2)6 个人分到 3 个车间，共有多少种分法？

8. 在平面直角坐标系内，点 $P(a,b)$ 的坐标满足 $a\neq b$，且 a,b 都是集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 的元素，又点 P 到原点的距离 $|OP|\geqslant 5$，求这样的点 P 的个数.

1.2 排　列

理解排列、排列数的概念，了解排列数公式的推导；能用“树状图”写出一些排列中的所有的排列；理解阶乘的意义，会求正整数的阶乘；掌握排列数的另一个计算公式，并能熟练应用公式解决排列数的化简、证明等问题；会用捆绑法和插入法解决相邻和不相邻问题的应用题；进一步培养分析问题、解决问题的能力，切实学会用排列数公式计算和解决简单的实际问题.

新课导航

要点1　排列

从 n 个不同的元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的一个排列.

如：从 a,b,c 这三个不同的元素中取出两个元素的排列有：ab,ba,ac,ca,bc,cb.

这里的 ab 与 ba 是两个不同的排列.

要点2　排列数

从 n 个不同的元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的的排列数，用 A_n^m 表示.

如：从 a,b,c 这三个不同的元素中取出两个元素的排列有：ab,ba,ac,ca,bc,cb，排列数是6.

例1　书架上一格内原有6本书，现再放上3本书，但要保持原有书的相对顺序不变，则共有不同的放法为__

例2　从2,3,5,9中任取两个不同的数分别作为对数中的底数和真数，共可组成______个不同的对数值.

【归纳】　一个排列可看作是将元素填在空位上的一种填法，将取出的元素交换位置，看结果是否起了变化，若变了，则是排列中的问题.

要点3　排列数公式

从 n 个不同的元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的排列数 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

公式中的 $n,m\in\mathbf{N}^*,m\leqslant n$.

公式的右端是 m 个因式的乘积，第一个是 n，往后依次减1，最后一个是 $n-m+1$.

例3　现有5人站成一排，其中甲不站在排头，且乙不站在排尾的排法有多少种？

【归纳】　对于较为复杂的排列问题，可以按分类或分步，把它分解为若干个简单排列，分别求出排列数，然后求出最终结果，但应避免计数重复或遗漏.

要点4　全排列

n 个不同元素全部取出的一个排列，叫做 n 个不同元素的一个全排列，

全排列数 $A_n^n=n\times(n-1)\times(n-2)\cdots3\times2\times1$.

正整数1到 n 的连乘积，叫做 n 的阶乘，用 $n!$ 表示全排列，即 $n=m$ 时的排列.

$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\cdots3\times2\times1$.

规定：$0!=1$ 排列数公式可以写成 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

例4　求证：(1) $A_n^n=A_n^m\times A_{n-m}^{n-m}$；

(2) $\dfrac{(2n)!}{2^n\times n!}=1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)$.

例 5　有 4 个男生、3 个女生按下列要求排队拍照，各有多少种不同的排队方法？

(1)7 个人排成一排，4 个男生必须连排在一起；

(2)7 个人排成一排，3 个女生中任何 2 个均不能排在一起；

(3)7 个人排成一排，甲乙丙顺序一定；

(4)7 个人排成一排，但男生必须连排在一起，女生也必须连排在一起，且男甲与女乙不能相邻.

课内训练

1. 用 0,2,3,4,5 五个数字，组成没有重复数字的三位数，其中偶数共有______个.

2. 八个人排成前后两排，每排四人，其中甲、乙要在前排，丙在后排，则不同的排法种数为______种.

3. 若把英语单词“error”中字母的拼写顺序写错了，则可能出现错误的种数为______种.

4. 用数字 0,1,2,3,4,5 可以组成没有重复数字，并且比 20 000 大的五位偶数共有______个.

5. $ABCDE$ 五人站成一排照相，AB 必须相邻，但 AB 与 C 都不相邻，则不同的站法总数为______种.

6. 解方程或不等式：

(1)$3A_x^3=2A_{x+1}^2+6A_x^2$；(2)$A_9^x>6A_9^{x-2}$.

7. a,b,c,d,e 排成一排，依下列条件各有多少种排法？

(1)a 必须排在首位或末位；

(2)a 排在首位，但 b 不排在末位；

(3)a,b,c 相邻；

(4)a,b 不相邻.

8. 某年级开设语文、数学、英语、政治、物理、化学和体育七门课程，满足下列课程表有多少种不同的排法？

(1)一天开设七门不同的课程，其中体育不排在第一节，也不排在第七节；

(2)一天开设四门不同的课程，其中体育不排在第一节，也不排在第四节.

1.3 组　合

理解组合的意义，掌握组合数的计算公式；能正确认识组合与排列的联系和区别，掌握组合数的两个性质，并能根据组合数的性质进行化简；理解组合与排列的区别与联系，能运用公式解决一些简单的应用问题，提高合理运用知识的能力.

新课导航

要点1　组合

从 n 个不同的元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素并成一组，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的一个组合.

例1　从甲、乙、丙、丁四个人中选三人组成一组，有多少种不同的方法？

【归纳】　组合数的元素是无序的，看一个问题是组合问题还是排列问题，可以将取出的元素交换位置，如果使最终的结果发生了变化，则此问题是排列问题；如果没有发生变化，则此问题是组合问题.

要点2　组合数

从 n 个不同的元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有的组合的个数为：

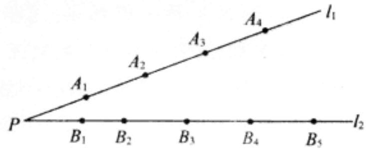
$$C_n^m=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m\times(m-1)\times\cdots\times2\times1}.$$

我们规定：$C_n^0=1$.

例2　在 $1,2,3,\cdots,99$ 这 99 个自然数中，每次取出不同的两个数相乘，使它们的积是 7 的倍数，问这样的取法有多少种？

【归纳】　此题关键在于对 7 的倍数的研究上，能将 $1\sim99$ 这 99 个数分成能被 7 整除的与不能被 7 整除的，进一步加深对数特征的理解.

例3　如图，在直线 l_1 与 l_2 相交于点 P，除点 P 外，在直线 l_1 上还有 A_1,A_2,A_3,A_4 四点，在直线 l_2 上还有 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 五点，若在 A_1,A_2,A_3,A_4 这四点中任取一点与 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 这五点中任取一点连成一条直线，则交点的个数最多有多少种？



【归纳】　此题关键是将交点个数问题转化为四边形对角线交点个数问题，使解题思路豁然开朗.

要点3　组合数的两个性质

性质一：$C_n^m=C_n^{n-m}$；

性质二：$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

例4　计算：

(1) C_{20}^{18}；

(2) $C_3^2+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_{100}^2$.

【归纳】　这类组合数计算问题主要考察对于组合数运算性质是否清楚，是否能熟练地运用公式.

要点 4　简单的组合应用题

例 5　从正方体的 8 个顶点中任取 3 个,可以组成多少个不同的三角形?

【归纳】　本题中的一个三角形的三个顶点无需排序,是只选不排,属于组合问题.

例 6　一个小组中共有 10 名同学,其中 4 名女同学,6 名男同学,现要从小组内选出 3 名代表,其中至少有 1 名女同学,一共有多少种选法?

【归纳】　解组合应用题和排列应用题一样,常用的方法是“直接”和“间接”两种思路,同样要分清运用分类计数原理和分步计数原理,或是综合运用两个原理,设计好解题程序,注意防止重复或遗漏.

课内训练

1. 从 5 篇稿件中挑选 3 篇参加征文比赛,不同的选法共有______种.

2. 某施工小组有男工 7 人,女工 3 人,选出 3 人中有女工 1 人男工 2 人的不同的选法有______种.

3. 从编号为 1,2,3,…,10,11 的 11 个小球中,取出 5 个球,使得这 5 个球的编号之和为奇数,则一共有______种不同的取法.

4. (1)计算:$C_m^9-C_{m+1}^9+C_m^8=$______;

(2)若 $C_{12}^n=C_{12}^{2n-3}$,则 $n=$______.

5. 有 10 个数学竞赛的名额,要分给 7 个学校,每校至少 1 个名额,有______种不同的名额分配方法.

6. 从 5 个男生和 4 个女生中选出 4 名学生参加一次会议,要求至少有 2 名男生和 1 名女生参加,有多少种选法?

7. 计算 $C_3^0+C_4^1+C_5^2+\cdots+C_{20}^{17}$ 的值.

8. 100 件产品中,有 98 件合格品,2 件次品,从这 100 件产品中任意抽出 3 件.

(1)一共有多少种不同的抽法?

(2)抽出的 3 件都不是次品的抽法有多少种?

(3)抽出的 3 件恰好有 1 件次品的抽法有多少种?

(4)抽出的 3 件至少有 1 件次品的抽法有多少种?

1.4　计数应用题(1)

能正确理解两个原理,合理地进行分类与分步;理解排列与组合的意义,掌握解排列、组合综合问题的常用策略,能运用解题策略解决简单的综合应用题;提高分析问题和解决问题的能力,学会应用数学思想解决排列组合问题.

新课导航

要点　计数应用题常用的方法:直接法和间接法

例 1　4 个不同的小球放入编号为 1,2,3,4 的四个盒子,则恰有一个空盒的放法有多少种?

【归纳】　对于排列与组合的混合问题,可采取先选出元素、后进行排列的策略.

例 2　马路上有编号为 1,2,3,…,9 的 9 只路灯,为节约用电,现要求把其中的三只路灯关掉,但不能同时关掉相邻的两只或三只,也不能关掉两端的路灯,则满足条件的关灯方法共有多少种?

【归纳】　对于某些排列组合问题,当从正面入手比较复杂、不易解决时,可考虑从反面入手,将其等价转化为一个较简单的问题来处理,即采用先求总的排列数(组合数),再减去不符合要求的排列数(组合数),从而使问题获得解决的方法,其实就是补集的思想.

例 3　从 6 名男同学和 4 名女同学中选出 3 名男同学和 2 名女同学分别承担 A、B、C、D、E 五项工作,一共有多少种分配方案?

【归纳】　排列组合混合问题,解题思路是:在分步时通常先组合、后排列.

例 4　连接正方体的 8 个顶点的直线中,异面直线的有多少对?

【归纳】　正面求解或反面考虑(利用补集)虽然可行,但容易遗漏或重复.注意这样一个事实,即每一个三棱锥对应着 3 对异面直线,因而转化为计算以正方体的顶点为顶点可以组成多少个三棱锥.

例 5　7 名男生和 5 名女生中选取 5 人,分别求下列条件的选法总数有多少种.

(1)A、B 必须当选;

(2)A、B 必不当选；

(3)A、B 不全当选；

(4)至少有 2 名女生当选；

(5)选取 3 名男生和 2 名女生分别担任班长、体育委员等 5 种不同的工作，但体育委员必须由男生担任，班长必须由女生担任.

【归纳】 在解组合问题时，常遇到至多、至少问题，因此可以考虑用间接法求解减少运算；注意排列组合问题先选后排的原则.

课内训练

1. 4 名男生和 4 名女生站成一排，其中任何两名女生不能相邻，则共有______种不同的排法.

2. 两排座位，第一排 3 个座位，第二排 5 个座位，若 8 位学生坐(每人一个座位)，则不同的坐法种数共有______.

3. 3 名男歌唱家和 2 名女歌唱家联合举行一场音乐会，演出的出场顺序要求 2 名女歌唱家之间恰有 1 名男歌唱家，其出场方案共有______种.

4. 10 级楼梯，要求 7 步走完，每步可跨一级，也可跨两级，则共有______种不同的跨法.

5. 设直角坐标平面内有一个质点从原点出发，沿 x 轴跳动，每次向正方向或负方向跳一个单位，结果 5 次跳动，质点落在点$(3,0)$(允许重复过此点)处，则质点不同的运动方法共有______种.

6. 从 4 名男生，3 名女生中选出 3 名代表.

(1)不同的选法有多少种？

(2)“至少有 1 名女生”的不同的选法有多少种？

(3)“代表中男、女生都要有”的不同的选法共有多少种？

7. 一个口袋内有 4 个不同的红球，6 个不同的白球，

(1)从中任取 4 个球，红球的个数不比白球少的取法有多少种？

(2)若取一个红球为 2 分，取一个白球记 1 分，从中任取 5 个球，使得总分不少于 7 分的取法有多少种？

8. 有 4 个不同的小球，4 个不同的盒子，把球全部放入到盒内.

(1)共有多少种放法？

(2)恰有 1 个盒子不放球，有多少种放法？

(3)恰有 1 个盒内放 2 个球，有多少种放法？

(4)恰有 2 个盒子不放球，有多少种放法？

1.5　计数应用题(2)

掌握计数问题常用的一些特殊方法;提高分析问题和解决问题的能力,学会应用数学思想解决排列组合问题.

新课导航

要点 1　"特元特位"法

即优先考虑有特殊要求的元素和位置后,再去考虑其他元素或位置.

例 1　用 0,2,3,4,5 这五个数字,组成没有重复数字的三位数,其中偶数共有多少个?

【归纳】　对于带有特殊元素的排列问题,一般应优先考虑特殊元素、特殊位置,再考虑其他元素与其他位置,也就是解题过程中的一种主元思想.

要点 2　捆绑法与插空法

捆绑法:某些元素必须在一起的排列,用"捆绑法",紧密结合粘成小组,组内外分别排列.

插空法:某些元素必须不在一起的分离排列用"插空法",不需分离的站好实位,在空位上进行排列.

例 2　5 人排成一排,要求甲、乙相邻,有多少种排法?

例 3　一个有 6 个歌唱节目和 4 个舞蹈节目的演出节目单,任何 2 个舞蹈不相邻,问有多少种不同的排法?

【归纳】　用捆绑法解题比较简单,实质是通过捆绑减少了元素,插空法实质就是在排好两个元素之间再插入一个元素,捆绑与插空结合起来的问题一般先捆绑、再插空.

要点 3　其他方法

例 4　有 7 人排成一排,要求甲、乙、丙 3 人顺序一定(可以不相邻),则有多少种不同的排法?

【归纳】　本题也可以考虑甲、乙、丙 3 人本身的全排列有 6 种,现在只是 6 种排法里取 1 种,即为 A_7^7 的 $\frac{1}{6}$.

要点 4　分组分配问题

例 5　6 本不同的书按下列要求处理,各有几种方法?

(1)平均分成 3 组;

(2)平均分给甲、乙、丙 3 人;

(3)分成三组,一组 1 本,一组 2 本,一组 3 本;

(4)分给 3 人,甲 1 本,乙 2 本,丙 3 本;

(5)分给 3 人,一人 1 本,一人 2 本,一人 3 本;

(6)分给 3 人,一人 4 本,另两人各 1 本.

【归纳】 分组分配问题关键是要分清楚分组是均匀分配还是不均匀分配，是有序分配还是无序分配.

例 6 已知集合 A 和集合 B 各含 12 个元素，$A\cap B$ 含有 4 个元素，试求同时满足下列条件的集合 C 的个数.

(1) $C\subseteq A\cup B$，且 C 中含有 3 个元素；

(2) $C\cap A\neq\varnothing$.

【归纳】 有序分配问题是指把元素按要求分成若干组，分别分配到不同的位置上，对于这类问题常用解法是将元素逐一分组，然后再进行全排列，但在分组时要注意是否为均匀分组.

课内训练

1. 7 人站成一排，如果甲、乙两人不相邻，则不同的排法种数为______种.

2. 信号兵把红旗与白旗从上到下挂在旗杆上表示信号，现有 3 面红旗，2 面白旗，把这 5 面旗都挂上去，可表示不同的信号的种数是______种.

3. 由数字 0,1,2,3,4,5 组成没有重复数字的 6 位数，其中个位数字小于十位数字的共有______个.

4. A,B,C,D,E 五人并排站成一排，如果 A,B 必相邻，且 B 在 A 的右边，则有______种不同的排法.

5. 乒乓球队的 10 名队员中，有 3 名主力队员，派其中 5 人参加比赛，3 名主力队员主要排在第一、三、五的位置，其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置，那么不同的出场安排共有______种.

6. 用 0,1,2,3,4,5 这六个数字，

(1)可组成多少个无重复数字的五位奇数？

(2)可组成多少个无重复数字的能被 5 整除的五位数？

7. 12 件产品，其中 5 件一级品，4 件二级品，3 件三级品，从中取出 4 件，使得

(1)至少 1 件一级品，共有几种取法？

(2)至多 2 件一级品，共有几种取法？

(3)不都是一级品，共有几种取法？

(4)都不是一级品，共有几种取法？

8. 划船运动员共 10 人，其中 3 人只能划右舷，2 人只能划左舷，5 人左、右舷都能划，选出 6 人，平均分在左、右两舷，则共有多少种不同的选法？

1.6　二项式定理

正确理解二项式定理,能准确地写出二项式的展开式;会区分项的系数与项的二项式系数;掌握二项式定理在近似计算及证明整除性中的应用;熟练掌握二项式定理的基本问题——通项公式及其应用.

新课导航

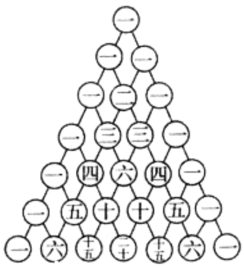
要点 1　二项式定理

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^nb+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)$(a+b)^n$ 的各项展开式的各项都是 n 次,共有 $n+1$ 项.

(2)展开式各项的系数:$a^{n-r}b^r$ 的系数为 C_n^r.

(3)二项式系数表(杨辉三角):$(a+b)^n$ 展开式的二项式系数,当 n 依次取 1,2,3,…时,二项式系数表如右,表中每行两端都是 1,除 1 以外的每一个数都等于它肩上两个数的和.



(4)二项展开式的通项公式:

$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r(r=0,1,2,\cdots,n)$.

(5)二项式定理中,设 $a=1,b=x$,则

$(1+x)^n=1+C_n^1x+\cdots+C_n^rx^r+\cdots+C_n^nx^n$.

(6)$a^{n-r}b^r$ 指数和为 n,a 的指数依次从 n 递减到 0,b 的指数依次从 0 递增到 n.

例 1　求$(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}})^{10}$的二项展开式的第 6 项.

【归纳】　二项展开式的通项 T_{r+1} 是表示第 $r+1$ 项,即 $T_{r+1}=C_n^rA^{n-r}b^r$.

例 2　求$(x+a)^{12}$的展开式的倒数第 4 项.

【归纳】　$(a+b)^n$ 的二项展开式共有 $n+1$ 项.

例 3　求$(x^2-\dfrac{1}{2x})^9$ 展开式中 x^9 的系数.

【归纳】　①$C_n^ra^{n-r}b^r$ 是$(a+b)^n$ 展开式中的第 $r+1$ 项,$r=0,1,2,\cdots,n$.

②注意二项式系数与某项系数的区别,在本题中,第 4 项的二项式系数是 C_9^3,第 4 项 x^9 的系数为 $C_9^3(-\dfrac{1}{2})^3$,二者并不相同.

要点 2　二项式系数性质

(1)对称性.

与首末两端"等距离"的两个二项式系数相等,即 $C_n^m=C_n^{n-m}$;直线 $r=\dfrac{n}{2}$是图象的对称轴.

(2)增减性与最大值.

当 n 是偶数时,中间一项 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 取得最大值;当 n 是奇数时,中间两项 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$,$C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 取得最大值.

(3)各二项式系数和:

$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^r+\cdots+C_n^n$.

(4)常数项、有理项和系数最大的项:

求常数项、有理项和系数最大的项时,要根据通项公式讨论对 r 的限制;求有理项时要注意到指数及项数的整数性.

例 4　已知 $C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\cdots+2^nC_n^n=729$,求 $C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$.

【归纳】 ①记住课本结论：

$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$；

$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$.

②注意所求式中缺少一项，不能直接等于 2^6.

例 5　已知 $(2x+\sqrt{3})^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，

求 $(a_0+a_2+a_4)^2-(a_1+a_3)^2$.

【归纳】 望同学们在学习中举一反三.赋值法是给代数式(或方程或函数表达式)中的某些字母赋予一定的特殊值，从而达到便于解决问题的目的.赋值法是由一般到特殊的一种处理方法，在高考题中屡见不鲜，特别在二项式定理中的应用尤为明显.

例 6　求 $(x+2y)^7$ 展开式中系数最大的项.

【归纳】 二项式系数最大的项与系数最大的项不同二项式系数最大的项也即中间项：当 n 为偶数时中间项 $T_{\frac{n}{2}+1}$ 的二项式系数最大；当 n 为奇数时，中间两项 $T_{\frac{n-1}{2}+1}$，$T_{\frac{n+1}{2}+1}$ 的二项式系数相等且为最大.

课内训练

1. $(2x^3-\frac{1}{\sqrt{x}})^7$ 的展开式中常数项是______.

2. $(1+2x)^3(1-x)^4$ 展开式中 x^2 的系数为______.

3. 已知 $(1-3x)^9=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_9x^9$，则 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_9|$ 等于______.

4. 已知 $(x-\frac{a}{x})^8$ 展开式中常数项为 1 120，其中实数 a 是常数，则展开式中各项系数的和是______.

5. $(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{50}$ 的展开式中 x^3 的系数是______.

6. 已知 $(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，求：

(1) $a_1+a_2+\cdots+a_7$；

(2) $a_1+a_3+a_5+a_7$，$a_0+a_2+a_4+a_6$.

7. 在二项式 $(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}})^n$ 的展开式中，前三项的系数成等差数列，求展开式中的有理项.

8. 求证：$3^{2n+2}-8n-9$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 能被 64 整除.