21世纪高等院校创新课程规划教材

经济数学基础

主　编　黄雅荣
副主编　韩玉娟　赵　艳　陈纪祖

经济科学出版社

经济数学基础

21世纪高等院校创新课程规划教材

经济数学基础

主　编　黄雅荣
副主编　韩玉娟　赵　艳　陈纪祖

经济科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础/黄雅荣主编. —北京：经济科学出版社，
2009.2

21 世纪高等院校创新课程规划教材

ISBN 978－7－5058－7869－3

Ⅰ.经… Ⅱ.黄… Ⅲ.经济数学—高等学校—教材
Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 002242 号

责任编辑：张 力 周胜婷

责任校对：杨晓莹

技术编辑：董永亨

经济数学基础

主 编 黄雅荣

经济科学出版社出版、发行 新华书店经销

社址：北京海淀区阜成路甲 28 号 邮编：100142

总编室电话：88191217 发行电话：88191109

网址：www.esp.com.cn

电子邮件：esp@esp.com.cn

文海印刷厂印刷

787×1092 16 开 12.75 印张 290000 字

2009 年 2 月第 1 版 2009 年 2 月第 1 次印刷

印数：0001—3000 册

ISBN 978－7－5058－7869－3/F·7120 定价：28.00 元（附光盘）

（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

《经济数学基础》是经济类各专业，如会计、营销和国贸等专业必修的一门重要基础课程。它是将数学与经济相结合的一门应用学科，同时也为经济类学生打下必要的数学基础，为后续学习专业课提供保障。

本课程由一元函数微积分和线性代数两部分构成。微积分学以函数为研究对象，主要讲述函数的导数、微分和积分的概念、方法、计算和应用，而极限概念是它们的基础。线性代数则主要介绍矩阵、行列式和线性方程组的最基本概念和计算方法。通过学习本课程可以培养和提高学生的逻辑思维能力，学会处理经济问题的一些方法，提高解决实际问题的能力。

《经济数学基础》教材编写本着适应现在学生的基础和特点，具有实用、够用、注重实际应用的原则，省去了抽象的理论推导与证明。参与编写人员都是教学一线教师，他们根据多年的教学经验，总结了一些比较实用的教学内容和方法。由于数学本身具有抽象的特点、定理、定义、公式较多，很难记住，学生常感觉枯燥乏味，无学习乐趣，因此我们在编写时，尽量优化整合经典内容体系，结合专科学生的特点，淡化数学理论，强化几何说明，重视应用与实践，突出强调数学知识与经济应用问题的联系。例子难度适当，由浅入深，循序渐进，讲解最基本的计算方法，对于练习题的安排上结合重点、难点，突出数学的思维方法，适当降低计算的难度和复杂程度。不做难题、偏题，不求多，但求会。这就是我们编写本书的宗旨。

《经济数学基础》课程建设是我们充分利用多媒体教学手段的一种尝试，除文字教材外，还编写了学习辅导光盘，内容包括练习题、综合练习及所有题目的详细解答，同时配备了比教材多的练习题，供学有余力的学生参考学习。为了方便学生期末复习考试，我们制作了IP课件，对每章内容进行归纳、总结，集中讲解重点要求掌握的题型，分散难点，使学生复习有针对性，提高学习效率。

本书的编写分工如下：

第1、6章，由赵艳编写；

第2、3章，由韩玉娟编写；

第4、5章，由黄雅荣编写；

第7、8章，由陈纪祖编写。

全书由黄雅荣统稿、主编。

本书在编写过程中得到了学校领导的支持、系主任的关心以及同行的指教，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中错误在所难免，敬请读者与同行指正。

编者

2008年11月

目 录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是微积分学研究的对象，它的实质是变量之间的对应关系. 极限是微积分学的基本概念之一，微积分学中的几个重要概念，如连续、导数、定积分等，都是用极限的形式来定义的. 本章，我们将在复习和加深函数有关知识的基础上，着重讨论函数的极限，并介绍函数的连续性.

1.1　函　数

1.1.1　函数的概念

1. 变量与常量

在日常生活和各种经济活动中，经常会遇到各种不同的量，我们可以将这些量分成两类：一类是在考察过程中保持不变的量，称为**常量**，另一类是在考察过程中变化着的量，称为**变量**. 例如，圆的周长与直径之比——圆周率 π，就是一个常量；一天中的温度、湿度、生产过程中的产量等都是不断变化的变量. 通常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z 等表示变量.

需要指出的是，常量和变量是相对的概念. 同一个变量在某一过程中可以认为是常量，而在另一过程中则可能是变量；反过来也一样. 例如，人民币的银行存款利率，在短期（如一个月）内是常量，而在较长的时期（如十年）就是一个变量.

在微积分中，所讨论的量（常量和变量）一般都限制在实数范围内，本书中，如无特别说明，各种量所取的数值都是实数.

2. 函数的概念

定义 1.1　设 x,y 是两个变量，当 x 在非空实数集 D 内任取一个数值时，变量 y 按照一定的规则 f 总有唯一确定的数值与其对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记作：$y=f(x)$. 其中，x 称为自变量，y 称为因变量或函数值.

自变量 x 的取值范围 D 称为函数的**定义域**，因变量 y 的取值范围称为函数的**值域**，f 是函数符号，表示变量 y 与变量 x 的对应关系. 函数符号也可以用其他字母来表示，如 $y=g(x)$、$y=\varphi(x)$ 等. 函数的定义域、对应关系称为函数的两要素，两个函数相等必须满足：它们的定义域相同、对应关系也相等.

当自变量 x 在定义域 D 内取值 x_0 时，因变量 y 按特定函数关系 $y=f(x)$ 得到对应值 y_0，记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

[**例 1-1-1**] 已知$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$,求$f(0)$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$,$f(x+1)$.

解:$f(0)=\dfrac{0}{1+0}=0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$,

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{x+1},f(x+1)=\frac{x+1}{1+(x+1)}=\frac{x+1}{x+2}.$$

对于函数的定义域,在实际问题中应该考虑变量的实际意义,如果是单纯的数学问题,则把使函数表达式有意义的所有实数组成的集合作为该函数的定义域.

[**例 1-1-2**] 求函数$f(x)=\dfrac{1}{\lg(2-x)}+\sqrt{16-x^2}$的定义域.

解:要使函数有意义,必须满足$\begin{cases}\lg(2-x)\neq 0\\ 2-x>0\\ 16-x^2\geqslant 0\end{cases}$,即$\begin{cases}2-x\neq 1\\ x<2\\ x^2\leqslant 16\end{cases}$,解得$\begin{cases}x\neq 1\\ x<2\\ -4\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$,所以函数的定义域为$[-4,1)\cup(1,2)$.

3. ***函数表示法***

常用的函数表示法有**表格法**、**图形法**和**解析法**(又称公式法),下面分别举一个例子.

[**例 1-1-3**] 2008 年 4 月银行的定期存款利率见表 1-1.

表 1-1

存期	三个月	六个月	一年	三年	五年
年利率	3.33	3.78	4.14	5.40	5.85

这是用表格表示的函数,它的定义域是$D=\{$三个月,六个月,一年,三年,五年$\}$.

[**例 1-1-4**] 某地用自动温度记录仪记下的一昼夜气温变化曲线,如图 1.1 所示:

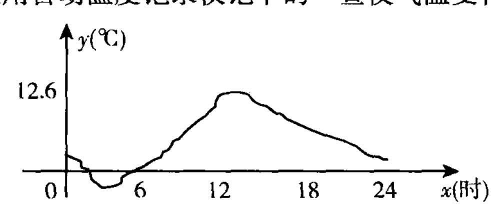


图 1.1

这是用图形表示的函数,气温y与时间x的函数关系是由曲线给出的,它的定义域是$D=[0,24]$.

[**例 1－1－5**]　函数 $y=\sqrt{1-x^2}$.

这是用解析法表示的函数关系，x 的取值范围是 $D=[-1,1]$.

用解析法表示函数关系，解析表达式可分为三类，相应的函数分别称为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**.

(1)显函数：函数 y 与自变量 x 的对应关系可由解析式直接表示出来，如[例 1－1－5].

(2)隐函数：函数 y 与自变量 x 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定，如

$$2xy+\sin(x-y)=0$$

(3)分段函数：在定义域的不同取值范围上具有不同的表达式，例如

绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$$

再如符号函数

$$y=\begin{cases}1,\ x>0\\ 0,\ x=0\\ -1,\ x<0\end{cases}$$

注意：分段函数是用几个式子合起来表示的一个函数，而不是表示几个函数，在实际生活中常常会遇到这种形式的函数.

[**例 1－1－6**]　某公司为了提高产品在当地的市场占有率，制定了如下促销策略：购买数量不超过 20 公斤，则每公斤 20 元；购买数量不超过 200 公斤，则超过 20 公斤的部分，每公斤 18 元；购买数量超过 200 公斤而不超过 1 万公斤时，超过的部分每公斤 15 元，试求购买费用和购买量的函数关系式.

解：设 x 表示购买数量，y 表示所需的费用，则由题意就有

$$y=\begin{cases}20x, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ 400+18(x-20), & 20<x\leqslant 200\\ 3640+15(x-200), & 200<x\leqslant 10000\end{cases}$$

定义域为$[0, 10000]$.

1.1.2　函数的特殊性质

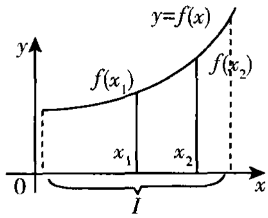
1. 单调性

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subseteq D$，x_1，x_2 是区间 I 上的任意两点，且 $x_1<x_2$.

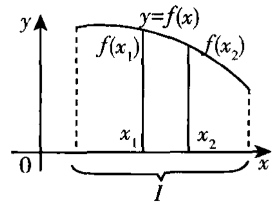
(1)若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**；

(2)若恒有$f(x_1)>f(x_2)$,则称函数$f(x)$在区间I上**单调减少**.

单调增加与单调减少的函数统称为**单调函数**(如图1.2).



(a)单调增加函数



(b)单调减少函数

图1.2

需要注意的是,函数的单调性与所讨论的区间密切相关,例如,函数$y=x^2$在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的,在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的,因而在区间$(-\infty,+\infty)$内它不是单调的.在第3章导数的应用中,我们将利用导数来判断函数的单调性.

2. 奇偶性

定义1.3 设函数$y=f(x)$,其定义域D关于原点对称(即当$x\in D$时,有$-x\in D$).

(1)如果对任意$x\in D$,恒有$f(-x)=f(x)$成立,则称$f(x)$为D上的**偶函数**;

(2)如果对任意$x\in D$,恒有$f(-x)=-f(x)$成立,则称$f(x)$为D上的**奇函数**.

偶函数的图像是关于y轴对称的,奇函数的图像是关于原点对称的.

[例1-1-7] 判断下列函数的奇偶性:

(1)$f(x)=2x^4-3x^2+5$

(2)$f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$

(3)$f(x)=3x^2+\sin x$

解:本题各函数的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,是关于原点对称的,因此可以讨论函数的奇偶性:

(1)因为$f(-x)=2(-x)^4-3(-x)^2+5=2x^4-3x^2+5=f(x)$,

所以$f(x)=2x^4-3x^2+5$是偶函数.

(2)因为$f(-x)=\dfrac{a^{-x}-a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^{-x}-a^x}{2}=-\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}=-f(x)$.

所以$f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$是奇函数.

(3)因为$f(-x)=3(-x)^2+\sin(-x)=3x^2-\sin x\neq f(x)$,

同时$f(-x)\neq -f(x)$,所以$f(x)$既不是奇函数也不是偶函数.

3. 有界性

定义1.4 设函数$y=f(x)$的定义域为D,区间$I\subseteq D$,如果存在一个正数M,对于所有的

$x\in I$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数$y=f(x)$在I上是**有界**的. 如果这样的正数M不存在,则称函数$f(x)$在I上是**无界**的.

对于函数的有界性需要注意以下两点:

(1)若正数M存在,则M的取法不唯一. 例如函数$y=\sin x$,取$M=1$就有$|\sin x|\leqslant 1$,我们也可以取$M=2$,此时$|\sin x|<2$恒成立,可见M只要取任何大于1的数就能说明函数$y=\sin x$是有界的.

(2)函数的有界性和讨论的区间有关. 例如,$y=\dfrac{1}{x}$在区间(1,2)上是有界的,而在区间(0,2)上是无界的.

4. 周期性

定义1.5　设函数$y=f(x)$的定义域为D,如果存在正数T,使得对于所有的$x\in D$, $x+T\in D$,恒有$f(x+T)=f(x)$,则称函数$f(x)$为**周期函数**. 满足这个等式的最小正数T称为函数$f(x)$的周期.

例如,正弦函数$y=\sin x$是周期函数,周期为2π.

1.1.3　初等函数

1. 基本初等函数

在学习微积分的过程中,会遇到许许多多的函数,而这些函数都是以基本初等函数为基础的,因此我们应该很好的掌握这些内容.

(1)常数函数$y=c$(c为任意常数)

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,其图形是一条过$(0,c)$点平行于x轴的直线. 如图1.3:

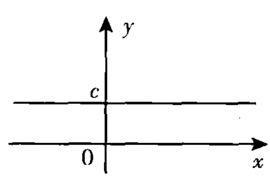


图1.3　常数函数的图形

(2)幂函数$y=x^{\alpha}$(α为任意实数)

幂函数是我们平时生活中接触最多的函数,当$\alpha=0$时,$y=1$是常数函数;当$\alpha=2$时,$y=x^2$是我们熟悉的抛物线函数. α的取值不同,幂函数的定义域也会不一样,我们分$\alpha>0$和$\alpha<0$来讨论,并且只讨论$x\geqslant 0$的情形,$x<0$时的图像可根据幂函数的奇偶性(x的偶数次方是偶函数,x的奇数次方是奇函数)来确定.

当$\alpha>0$时,幂函数的图像通过(0,0)和(1,1)点,在$(0,+\infty)$内单调增加且无界;当$\alpha<0$时,图像不过原点,但仍通过点(1,1),在$(0,+\infty)$内单调减少,无界,且曲线以x轴和y轴

为渐近线,如图 1.4 .

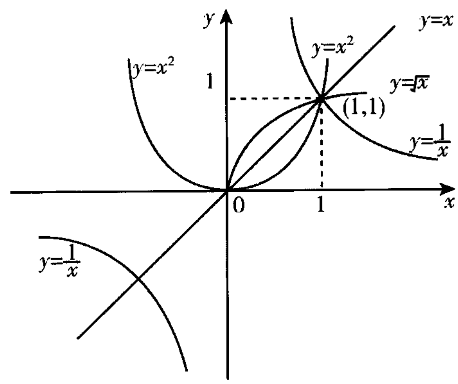


图 1.4　幂函数的图形

(3)指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$

指数函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$,函数图像在 x 轴的上方,且过点$(0,1)$,如图 1.5,当 $0<a<1$ 时,函数单调减少且无界;当 $a>1$ 时,函数单调增加且无界.

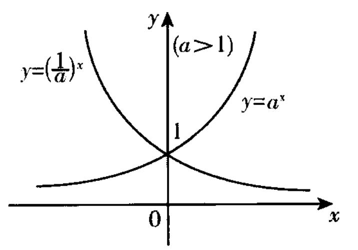


图 1.5　指数函数的图形

特别地,函数 $y=e^x$ 是微积分中出现最多的指数函数,它的底数 $e=2.7182818\cdots$是一个无理数,是本章 1.3 节中一个重要极限的值.

(4)对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$

对数函数的定义域是$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$,图像全部落在 y 轴的右侧,且过$(1,0)$点,如图 1.6,当 $0<a<1$ 时,函数单调减少且无界;当 $a>1$ 时,函数单调增加且无界.

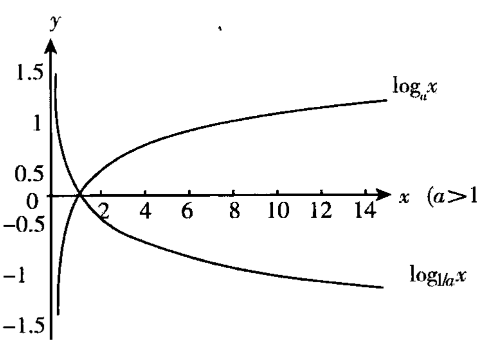


图 1.6　对数函数的图形

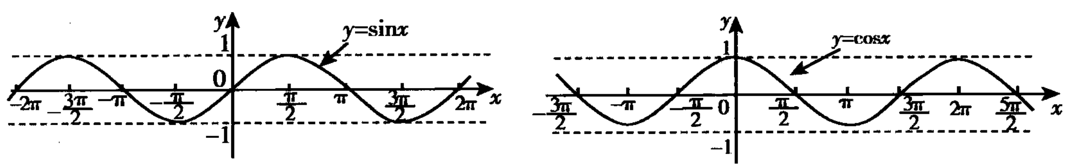
当 $a=10$ 时,函数 $y=\log_{10}x$ 简记为 $y=\lg x$,称为**常用对数函数**;当 $a=\mathrm{e}$ 时,函数 $y=\log_{\mathrm{e}}x$ 简记为 $y=\ln x$,称为**自然对数函数**,它也是微积分中经常会遇到的函数.

(5)三角函数

常用的三角函数有:**正弦函数** $y=\sin x$,**余弦函数** $y=\cos x$,**正切函数** $y=\tan x$,**余切函数** $y=\cot x$,它们之间的关系是:

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

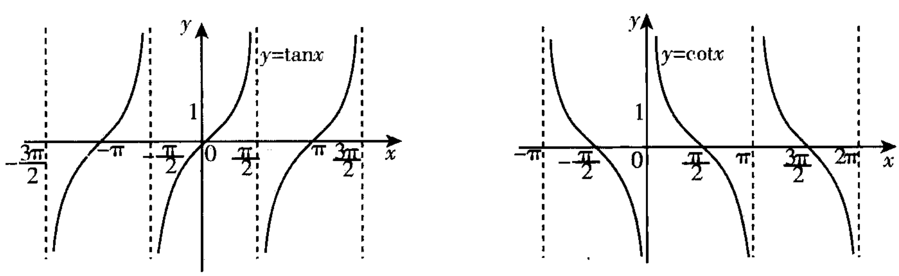
$\sin x$ 是奇函数,$\cos x$ 是偶函数,它们的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$,值域均为 $[-1,1]$(即都是有界函数),且都是以 2π 为周期的周期函数,如图1.7(a)、(b).



(a)正弦函数的图形　　(b)余弦函数的图形

图1.7

$\tan x$ 和 $\cot x$ 都是以 π 为周期的无界奇函数. $\tan x$ 定义域为 $\{x\,|\,x\in R$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$(k 为整数)$\}$,值域为 $(-\infty,+\infty)$,在每个周期内单调增加,且以直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线;$\cot x$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\in R$ 且 $x\neq k\pi$ (k 为整数)$\}$,值域为 $(-\infty,+\infty)$,在每个周期内单调减少,且以直线 $x=k\pi+\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线,如图1.8(a)、(b).



(a)正切函数的图形　　(b)余切函数的图形

图1.8

2. 复合函数

我们经常会把两个或两个以上的函数组合成一个新的函数.

例如,函数 $y=\mathrm{e}^u$ 和 $u=\sin x$ 可以组合成函数 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$,在此例中,y 是 u 的函数,u 是 x 的函数,那么 y 通过 u 最终是 x 的函数.

定义1.6　设函数 $y=f(u)$,$u\in U$ 和函数 $u=\varphi(x)$,$x\in X$ 且 $\varphi(x)\subset U$,则由

$$y=f[\varphi(x)],\ x\in X$$

确定的函数，称为**复合函数**，其中 x 是自变量，定义域为 X，u 称为**中间变量**，这样的运算称为**复合运算**.

需要注意的是，并不是任意两个函数都可以复合成一个新的函数，例如，$y=\ln u$ 和 $u=-x^2$就不能构成复合函数，因为函数 $y=\ln u$ 要求 $u>0$，而 $u=-x^2\leqslant 0$，因此任何 x 取值都不能使 $y=\ln u$ 有意义.

另外，函数的复合运算可以不止一次，许多复杂的函数往往是由多个基本初等函数复合而成的，例如，$y=3^{\tan\frac{1}{x}}$ 就可以看做是经 $y=3^u$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{1}{x}$这三个基本初等函数复合而成的.

3. *初等函数*

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的函数叫做**初等函数**. 初等函数是微积分研究的主要对象，一般地，初等函数都可以用一个解析式表示.

例如，$y=(x-1)^2+2^x$，$y=\ln\cos(x^2+1)$，$y=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$都是初等函数.

而 $y=1+x+x^2+x^3+\cdots$不满足有限次四则运算，$y=\begin{cases}x, x>0\\0, x=0\\1-x, x<0\end{cases}$ 不是由一个解析式表达的，因此都不是初等函数.

形如 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$（其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n$ 为任意常数）的函数，称为**多项式函数**；由两个多项式函数构成的分式函数 $y=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$（其中分母不等于零）称为**有理函数**. 多项式函数和有理函数是常见的初等函数.

在第 2 章导数与微分中，我们会遇到复合函数求导数的运算，这就需要我们会对复合函数进行分解.

[例 1－1－8] 将下列函数分解为基本初等函数的四则运算或复合运算：

(1) $y=\sin^2 x$　(2) $y=\ln(\cos 5x)$　(3) $y=\dfrac{\sqrt{2^x+1}}{\log_2(3x-1)}$

解：(1) 函数 $y=\sin^2 x$ 由函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成.

(2) 函数 $y=\ln(\cos 5x)$ 由函数 $y=\ln u$，$u=\cos v$，$v=5x$ 复合而成.

(3) 函数 $y=\dfrac{\sqrt{2^x+1}}{\log_2(3x-1)}$由函数 $y=\dfrac{u}{v}$，$u=\sqrt{w}$，$w=2^x+1$，$v=\log_2 t$，$t=3x-1$ 复合而成.

练习 1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2+3}$　(2) $y=\dfrac{1}{\ln(x+5)}$　(3) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{2x+5}$

2. 已知函数 $f(x)=x^2+2$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(x+1)$，$f(x)+1$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. 设已知函数$f(x)=\begin{cases}2x^2+3, & -1<x\leqslant 3\\ 5-x, & 3<x<7\end{cases}$，求$f(x)$的定义域及函数值$f(0)$，$f(4)$，$f(f(1))$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1)$y=5x^5-3x^3+x$　　(2)$y=x\sin x$

(3)$y=e^{-x}-e^x$　　(4)$y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

5. 将下列初等函数分解为基本初等函数的四则运算或复合运算.

(1)$y=\sqrt{3x-1}$　　(2)$y=\sin^2(2x^3+1)$

(3)$y=e^{\tan\frac{1}{x}}$　　(4)$y=\dfrac{\ln(3x+1)}{\sqrt{2+x^2}}$

1.2　极限的概念

极限是微积分学中的一个基本概念，微积分中许多概念都是用极限表述的，一些重要的性质和定理也是通过极限的方法推得的，因此，掌握极限的思想与极限的计算方法是学好微积分的前提和基础.

早在我国古代三国时期，数学家刘徽（生于公元250年左右）在他的《割圆术》中就已经阐述了极限的思想：**"割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣."**这段话说的是用圆内接正多边形的面积来逼近圆面积（图1.9）. 若用S表示圆面积，S_n表示正n边形的面积，显然，正n边形的边数n越多，S_n越接近S，当边数无限增加时，S_n就无限地接近S. 这就是刘徽用割圆术来计算圆周率的想法，含有极限观念，是他的一大创造. 他计算了圆内接正192边形的周长，得到了圆周率的近似值$\pi=157/50(=3.14)$；后来又计算了圆内接正3072边形的周长，又得到了圆周率的近以值$\pi=3927/1250(=3.1416)$. 下面我们先介绍数列的极限，进而再学习函数的极限.

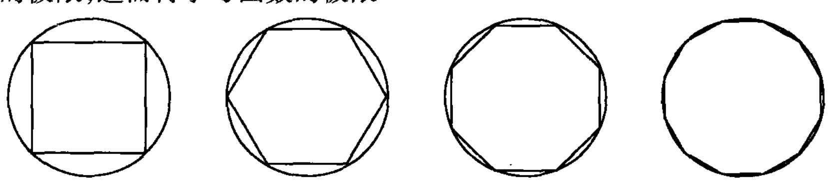


图1.9

1.2.1　数列的极限

一般地，无穷多个按一定规律排列的一串数$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\cdots$称为**数列**，简记作$\{x_n\}$. 数列也可以看成是定义在正整数集上的函数$x_n=f(n)(n=1,2,3,\cdots)$，数列中每一个数称为数列的项，$x_n$称为数列的通项或一般项.

[例 1 -2 -1] 下面是几个数列的例子:

(1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}:1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$

(2) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}:2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$

(3) $\{(-1)^{n+1}\}:1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$

(4) $\{\sqrt{n}\}:1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\cdots,\sqrt{n},\cdots$

观察上面的例子可以看到,当 n 无限增大时,它们的变化趋势各不相同. 如果,当 n 无限增大时,数列 x_n 越来越接近某个固定的常数,我们就说该数列是以这个常数为极限的.

定义 1.7 对于数列 $\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时,x_n 无限地趋近于某个固定的常数 A,则称当 n **趋于无穷时,数列** $\{x_n\}$ **以** A **为极限**,记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \quad 或 \quad x_n\to A(n\to\infty)$$

如果一个数列 $\{x_n\}$ 有极限,我们就称这个数列是**收敛**的,否则就称它是**发散**的. $\{x_n\}$ 以 A 为极限,亦称 $\{x_n\}$ 收敛于 A.

由定义可知,[例 1 -2 -1] 中数列(1)、(2)是收敛的,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$

数列(3),当 n 无限增大时 x_n 总是在 1 和 -1 之间跳跃,永远都不会趋近于一个固定的常数,因此数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 发散. 而数列(4),当 n 无限增大时,$\sqrt{n}$ 越来越大,不可能趋于一个固定的常数,因此数列 $\{\sqrt{n}\}$ 发散.

[例 1 -2 -2] 用定义说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

解: 观察数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 在 n 增大时的变化趋势.

表 1 -2 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **的数值变化趋势**

n	1	2	5	10	10^2	10^4	10^6	…
x_n	2.0	2.25	2.48832	2.593742	2.704814	2.718268	2.718280	…

从表 1 -2 可以看到,数列随着 n 的增大,逐渐趋近于无理数 e,即有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$. 这一形式的极限,我们在下一节中将着重讨论.

1.2.2 函数的极限

数列作为一类特殊的函数,其自变量 n 只有一种变化状态,即 $n\to\infty$(事实上是 $n\to+\infty$),对于一般的函数 $f(x)$ 而言,自变量有趋于无穷大(记为 $x\to\infty$)和趋于某个点(记为